DẠY VÀ HỌC KHÁI NIỆM GIỚI HẠN HÀM SỐ Ở TRƯỜNG TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

LÊ THÁI BẢO THIÊN TRUNG*

TÓM TẮT

Tư tưởng giới hạn đã xuất hiện ngầm ẩn từ thời Euclide, nhưng phải đợi đến thế kỉ XIX nhân loại mới có một định nghĩa chính xác. Điều đó chứng tỏ những khó khăn mang bản chất tri thức luận (chướng ngại tri thức luận) mà bất cứ ai cũng có thể gặp phải trong quá trình lĩnh hội khái niệm tinh tế này. Ở bậc THPT, định nghĩa bằng ngôn ngữ ε, δ đã biến mất trong các sách giáo khoa hiện hành với mục đích làm giảm khó khăn cho học sinh khi học khái niệm này. Tuy nhiên, chọn lựa sư phạm này chưa đủ để học sinh vượt qua các chướng ngại để chiếm lĩnh đầy đủ ý nghĩa của khái niệm giới hạn.

ABSTRACT

Teaching and learning the concept of limit function at secondary high schools

The notion of limit first appeared implicitly in the Euclidean time, but until the 19th century, there was an exact definition on it. This fact showed that epistemological difficulties (obstacles) in the process of acquiring of this subtle concept are inevitable. At the level of secondary high school, the language definitions of ε and δ disappeared in the current mathematics textbooks aiming at reducing the difficulties for students to learn them. However, this pedagogical choice is not enough for students to overcome obstacles to acquire the full meaning of the term "limit".

Bài báo này sẽ đề cập đến một số kết quả nghiên cứu của chúng tôi dựa trên các công cụ của lý thuyết nhân học (Chevallard 1985) và lý thuyết tình huống (Brousseau 1998). Sau khi giới thiệu một điều tra về quan niệm của học sinh lớp 12, chúng tôi sẽ trình bày những quan điểm tri thức luận về khái niệm giới hạn rút ra từ những phân tích lịch sử và toán học. Việc so sánh quan niệm của học sinh về khái niệm giới hạn với các quan điểm tri thức luận cho phép chúng tôi làm rõ những ý nghĩa còn thiếu ở học sinh về khái niệm này. Trong phần cuối của bài báo, chúng tôi giới thiệu một đồ án dạy học nhắm vào mục tiêu bổ sung những ý nghĩa còn thiếu về khái niệm giới hạn của học sinh.

1. Quan niệm của học sinh sau khi học khái niệm giới hạn hàm số

Theo chương trình chỉnh lí hợp nhất và chương trình hiện hành, khái niệm giới hạn được giảng dạy ở lớp 11. Nhằm tìm hiểu một phần quan niệm của học sinh sau khi học khái niệm giới hạn hàm số, chúng tôi đã tiến hành một thực nghiệm trên 131 học sinh lớp 12 (chương trình chỉnh lí hợp nhất). Thực nghiệm gồm hai câu hỏi sau đây :

Câu hỏi 1. Hãy tính $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{2-x}-1}{x-3}$.

* TS, Khoa Toán – Tin học
Trường Đại học Sư phạm TP HCM

Câu hỏi 2. Hãy giải thích cho một học sinh lớp 10 biết kí hiệu $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$ có nghĩa là gì ?

Kết quả thu được như sau :

- Đối với câu hỏi 1: 86% học sinh được hỏi đã áp dụng quy tắc đại số để khử dạng vô định (0/0) và cho kết quả hoặc là một số cụ thể hoặc là kí hiệu ∞ (mặc dù giới hạn này không tồn tại).
- Đối với câu 2, 73% học sinh được hỏi soạn một chỉ dẫn để tính giới hạn. Đặc biệt, một cố học sinh còn lưu ý rằng « cứ làm như vậy mà chẳng cần hiểu gì về lim ».

Kết quả trên cho thấy, học sinh hiểu khái niệm giới hạn thông qua kí hiệu $\lim\limits_{x\to a} \mathrm{f}(x)$ chỉ là việc thực hiện các biến đổi đại số để tính toán giới hạn. Như vậy học sinh không hiểu ý nghĩa thực sự của khái niệm giới hạn, không quan tâm đến tính thích đáng của bài toán và không khảo sát hàm số cũng như dự đoán giới hạn cần tính.

Phần tiếp theo của bài báo nhằm trả lời câu hỏi: trong lịch sử đã có những quan điểm nào về khái niệm giới hạn hàm số ?

2. Những quan điểm về khái niệm giới hạn trong lịch sử

Quan điểm đầu tiên về khái niệm giới hạn tồn tại từ thời Euclide (tư tưởng của nó thể hiện trong Phương pháp vét cạn) đến tận Newton (1642-1727). Chúng tôi gọi đây là quan điểm « xấp xỉ *x* ». Trong quan điểm này, biến số « kéo » hàm số :

Nếu một đại lượng x tiến về một giá trị a của đại lượng này (theo nghĩa, nó nhận các giá trị ngày càng gần a) thì đại lượng y – đại lượng phụ thuộc x (một hàm số biến x) – tiến về một giá trị l. Nghĩa là x càng lúc càng gần a kéo theo y càng lúc càng gần l.

Quan điểm thứ hai về khái niệm giới hạn xuất hiện khi Cauchy (1821) đưa ra định nghĩa chính xác cho khái niệm này. Chúng tôi gọi đây là quan điểm « xấp xỉ *f(x)*».

Trong quan điểm « xấp xỉ f(x) » chúng ta hiểu khái niệm giới hạn (thể hiện trong kí hiệu hiện đại ngày nay $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$*) có nghĩa là độ xấp xỉ của f(x) với l mà ta mong muốn sẽ quyết định độ xấp xỉ của x với a cần chọn.*

Chúng ta biết rằng chính quan điểm thứ hai đã hình thành nghĩa đúng của khái niệm giới hạn. Năm 1876, Weierstrass đã thể hiện quan điểm « xấp xỉ f(x) » của khái niệm giới hạn bằng ngôn ngữ ε, δ. Định nghĩ súc tích này vẫn được sử dụng ở bậc đại học ngày nay. Với ngôn ngữ hình thức, người ta có thể trình bày khái niệm giới hạn như sau :

$$\lim_{x\to a} f(x)=l \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$$

Hai quan điểm kể trên thể hiện sự đối lập nhau về vai trò của độ xấp xỉ biến δ và độ xấp xỉ giá trị hàm số ε : trong quan điểm « xấp xỉ *x* », độ xấp xỉ δ kéo theo độ xấp xỉ ε ; còn trong quan điểm « xấp xỉ *f(x)* », độ xấp xỉ ε mong muốn sẽ quyết định độ xấp xỉ δ.

Chẳng hạn, xét dãy số[1] (u_n) : $u_n = 0,\underbrace{98...98}_{n}$ ta thấy dãy số này tăng nghiêm ngặt và càng gần 1 khi *n* càng lớn[2] theo quan điểm « xấp xỉ *x* », nhưng không có giới hạn là 1 theo quan điểm « xấp xỉ *f(x)* ». Nói cách khác 1 là một chặn trên nhưng không phải là chặn trên nhỏ nhất của dãy (u_n).

Tuy quan điểm « xấp xỉ x » chưa thể hiện đúng bản chất của khái niệm giới hạn hàm số nhưng nó cho ta một hình ảnh trực quan khi tiếp cận khái niệm. Vì vậy khi bắt đầu giảng dạy khái niệm giới hạn ở THPT người ta không loại bỏ quan điểm « xấp xỉ *x* ».

Ngay sau khi khái niệm giới hạn hàm số được hoàn thiện theo quan điểm « xấp xỉ *f(x)* », các nhà toán học thực hiện việc mô hình hóa các quy tắc đại số trên các hàm số chuyển qua giới hạn khi nghiên cứu giải tích. Chẳng hạn, chúng ta có thể tìm thấy các quy tắc đại số khi thực hiện phép tính với các vô cùng bé (kí hiệu là 0) và vô cùng lớn (kí hiệu là $+\infty$ và $-\infty$) trong giáo trình *Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique* của Cauchy ấn hành năm 1821. Như vậy, người ta có thể thao tác theo các quy tắc đại số trên các giới hạn mà không đề cập đến ý nghĩa của khái niệm giới hạn. Lang (1986) đã xem một tập hợp các quy tắc đại số « tối tiểu » trên các giới hạn như một hệ tiên đề. Đến đây, một quan điểm mà chúng tôi gọi là « quan điểm đại số » của khái niệm giới hạn xuất hiện.

So sánh với kết quả thực nghiệm, chúng ta thấy học sinh chỉ hiểu khái niệm giới hạn hàm số theo quan điểm cuối cùng, « quan điểm đại số ». Sự thiếu vắng các quan điểm « xấp xỉ x » và « xấp xỉ f(x) » không những khiến học sinh cho rằng giới hạn không gì khác hơn là thực hiện tính toán mà còn khiến họ khó có thể áp dụng khái niệm khi giải quyết các bài toán (của toán học, vật lí, hóa học ..) liên quan đến việc chuyển qua giới hạn. Ngoài ra, việc xây dựng các khái niệm toán học khác như hàm số liên tục, đạo hàm của hàm số, tiệm cận… dựa trên việc chuyển qua giới hạn cũng sẽ mất đi ý nghĩa.

3. Một đồ án dạy học nhằm xây dựng các quan điểm xấp xỉ của khái niệm giới hạn

Chúng tôi đã xây dựng, thực nghiệm và phân tích một đồ án dạy học dựa vào các công cụ của lí thuyết tình huống do Brousseau (1998) đặt nền móng.

Đồ án của chúng tôi bao gồm 4 hoạt động, trong khuôn khổ của bài báo chúng tôi chọn giới thiệu hoạt động 2 và hoạt động 4, làm rõ ý đồ của các hoạt động này nhưng không trình bày phân tích thực nghiệm. Độc giả có thể tham khảo đầy đủ các phân tích trong [4].

3.1. Bài toán cơ sở và những lựa chọn cho đồ án

Toàn bộ đồ án dựa trên một bài toán cơ sở của khái niệm giới hạn :

« Cho hàm số $y = f(x)$. Hãy tìm *n* cặp (hay tất cả các cặp) (x ; $f(x)$) sao cho $f(x)$ thuộc vào khoảng($l - \varepsilon$; $l + \varepsilon$) ».

Chúng tôi chọn hàm số được cho bởi công thức sau: $y = \dfrac{2x^2 + 0,1x - 0,21}{x^2 + 0,7x - 0,3}$.

Hàm số được chọn có dạng hữu tỷ $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ thường xuất hiện trong các tính toán giới hạn của chương trình THPT.

Hàm số này có miền xác định D=R\{-1 ; 0,3} và $\lim_{x \to 0,3} f(x) = 1$.

Các hệ số thập phân được chọn nhằm gây khó khăn cho việc đặt nhân tử chung và khử dạng vô định khi tính toán giới hạn. Ngoài ra sự chọn lựa này còn nhằm thiết kế các hoạt động tính toán gần đúng bằng máy tính bỏ túi.

Máy tính bỏ túi sử dụng trong thực nghiệm là CASIO fx – 570MS (kiểu máy được sử dụng phổ biến trong nhà trường hiện nay) với chức năng nhập biểu thức chứa biến và thực hiện liên tiếp các tính toán gần đúng giá trị *f(x)* với những giá trị cụ thể của biến *x*. Chúng tôi dạy học sinh sử dụng chức năng này trong hoạt động 1.

3.2. Hoạt động 2: ủy thác tình huống

Hoạt động 2 gồm hai câu hỏi. Học sinh được yêu cầu trả lời một cách độc lập vào những phiếu đã phát. Các sản phẩm thu được sẽ phục vụ cho việc phân tích các chiến lược xuất hiện trong lớp.

Câu hỏi 1: *Giải phương trình f(x) =1.*

Với câu hỏi này, học sinh và giáo viên sẽ đi đến tổng kết như sau: « với tập xác định của phương trình D= R\{-1 ; 0,3}, không tồn tại giá trị *x* nào cho *f(x)* bằng 1 ».

Kết luận này làm xuất hiện vấn đề : *Không có giá trị nào của x cho f(x) bằng 1, nhưng liệu có các giá trị x sao cho f(x) gần 1 nhất có thể ? Nếu có thì đó là những giá trị nào ? Nếu không thì tại sao ?*

Vấn đề đặt ra bắt đầu được ủy thác cho học sinh một cách ngầm ẩn qua câu hỏi 2: *Hãy tìm 3 giá trị x sao cho f(x) thuộc vào đoạn [0,99 ; 1,01]*. Với câu hỏi này học sinh có thể sử dụng hai chiến lược.

Chiến lược 1: Giải hệ bất phương trình 0,99 ≤ *f(x)* ≤ 1,01 rồi chọn 3 giá trị x nằm trong tập nghiệm.

Chiến lược 2: Dùng máy tính bỏ túi dò các giá trị *x* có giá trị gần đúng của *f(x)* thuộc vào đoạn [0,99 ; 1,01].

Chiến lược 1 sẽ rất tốn thời gian và khó đi đến kết quả cuối cùng so với chiến lược 2. Chúng tôi đặt học sinh trước một tình huống tạo thuận lợi cho chiến lược tính gần đúng. Với chọn lựa này chúng tôi nhắm đến các quan điểm xấp xỉ của khái niệm giới hạn.

3.3. Hoạt động 3: Trò chơi tìm cặp số tốt nhất

Lớp thực nghiệm được chia thành những nhóm hai học sinh. Mỗi nhóm được phát một phiếu « Quy tắc trò chơi – câu trả lời của nhóm » và hai « Phiếu cá nhân » như dưới đây.

Quy tắc trò chơi « Tìm cặp số (*x* ; *f(x)*) tốt nhất »

Các em hãy cùng nhau làm việc. Mỗi nhóm gồm hai bạn (gọi là bạn A và bạn B) sẽ tìm một cặp số (*x ; f(x)*) sao cho *f(x)* gần 1 nhất có thể.

Quá trình tìm kiếm bao gồm hai giai đoạn.

Giai đoạn 1. (15 phút)

A tìm kiếm với *x* < 0,3 và B tìm kiếm với *x* > 0,3.

Mỗi em hãy ghi lại các cặp mà mình tìm thấy vào « Phiếu cá nhân » rồi khoanh tròn cặp số tốt nhất của (nghĩa là cặp có *f(x)* gần 1 nhất)

Giai đoạn 2. (10 phút)

A và B ghi cặp số khoanh tròn của mình vào phiếu.

Sau đó, hãy cùng nhau thảo luận để chọn cặp số « tốt nhất » để trình bày trước cả lớp.

Nhóm chiến thắng là nhóm có cặp số tốt nhất trong lớp, nghĩa là có cặp số (*x* ; *f(x)*) sao cho *f(x)* gần 1 nhất.

Giai đoạn 2

Cặp số tốt nhất của A	
Cặp số tốt nhất của B	
Cặp số tốt nhất của nhóm	
Giải thích tại sao lại chọn cặp số này làm cặp số tốt nhất của nhóm	

Phiếu cá nhân của A (với x < 0,3) :…………………..Nhóm……...........................		
X	f(x)	Nháp
0	0,7	

Phiếu cá nhân của B (với *x* > 0,3) :…………………..Nhóm………………………		
X	*f(x)*	Nháp
1	1,35	

Chúng tôi dự kiến hai chiến lược chủ yếu mà học sinh có thể sử dụng theo hai quan điểm xấp xỉ của khái niệm giới hạn như sau.

Chiến lược « xấp xỉ *x* »: học sinh chọn những giá trị x càng lúc càng gần 0,3 để tính gần đúng *f*(*x*) bằng máy tính bỏ túi và thấy rằng *f*(*x*) càng lúc càng gần 1.

Tuy nhiên, đến một lúc nào đó khi *x* đủ gần 0,3 (chẳng hạn *x* = 0,299999) máy tính bỏ túi sẽ cho kết quả tính *f*(*x*) = 1. Điều này tạo ra một mâu thuẫn ở học sinh bởi vì họ đã biết trong hoạt động 2 rằng « không có giá trị nào của *x* cho *f(x)* = 1 ».

Mâu thuẫn này cho phép đi đến kết luận rằng còn có những giá trị *x* sao cho *f(x)* gần 1 đến nỗi máy tính bỏ túi không còn phân biệt được giá trị gần đúng này với số 1. Như vậy tư tưởng « xấp xỉ *f(x)* » có thể xuất hiện.

Sau khi tổ chức tranh luận cho tất cả các nhóm về cặp số của nhóm nào là tốt nhất, giáo viên sẽ kết luận về trò chơi này bằng câu hỏi sau đây :

Có tồn tại hay không một cặp số (x ; f(x)) sao cho f(x) gần 1 nhất ? Tại sao ?

4. Thay cho lời kết

Phân tích chương trình và sách giáo khoa bậc THPT cùng với những nghiên cứu thực tế dạy học khái niệm giới hạn cho thấy kiểu nhiệm vụ tính giới hạn đã lấn át những vấn đề khác mang lại ý nghĩa thực thụ cho khái niệm này. Những kiểu nhiệm vụ được giới thiệu trong đồ án dạy học của chúng tôi (vắng mặt trong dạy học ở nước ta) có thể giúp học sinh hiểu rõ ý nghĩa của giới hạn hơn. Ngoài ra, khi tham chiếu các kết quả nghiên cứu tri thức luận, chúng tôi cho rằng việc giảng dạy khái niệm giới hạn không phải chỉ được thực hiện trong bài học có tên Giới hạn (khi khái niệm được định nghĩa và với tư cách là một đối tượng nghiên cứu) và theo một trình tự xuất hiện trong các sách giáo khoa nước ta (giới hạn – hàm số liên tục – đạo hàm – tiếp tuyến – tiệm cận – tích phân). Chẳng hạn, giáo viên có thể cho học sinh tiếp cận khái niệm giới hạn gắn với các quan điểm xấp xỉ của nó khi nghiên cứu bài toán tìm tiếp tuyến của đường cong hay bài toán tìm diện tích hình thang cong trước khi khái niệm giới hạn chính thức được gọi tên và được định nghĩa. Chọn lựa sư phạm này không những giúp cho học sinh lĩnh hội ý nghĩa thực thụ của giới hạn mà còn giúp họ hiểu được sự xây dựng các khái niệm khác (đạo hàm, tích phân …) nhờ vào khái niệm giới hạn : từ việc đánh giá xấp xỉ (chẳng hạn : xấp xỉ tiếp tuyến bằng cát tuyến, xấp xỉ diện tích hình thang cong bằng tổng diện tích các hình chữ nhật …) rồi chuyển qua giới hạn.

[1] Một cách tổng quát ta có thể xem dãy số như một hàm số $f : \mathbf{N}^* \to \mathbf{R}$.
[2] n tiến ra $+\infty$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Brousseau G. (1998), *Théorie des situations didactiques*, Pensée Sauvage, Grenoble.
2. Chevallard Y. (1985), *La transposition didactique – du savoir savant au savoir enseigné*, éd. Pensée Sauvage, Grenoble.
3. Lê Thái Bảo Thiên Trung (2004), *Nghiên cứu về khái niệm giới hạn hàm số trong dạy- học toán: Đồ án didactic trong môi trường máy tính bỏ túi*, Luận văn Thạc sĩ, Đại học Sư phạm TP HCM.
4. Lê Thái Bảo Thiên Trung (2007), *Etude didactique des relations entre notion de limite et décimalisation des nombres réels dans un environnement « calculatrice »*, thèse Université Joseph Fourier – Grenoble I .