NHÌN VỀ MỘT ĐẲNG THỨC TÍCH PHÂN

PHẠM QUỐC PHONG*

TÓM TẮT

Bài viết này, trình bày sự xâu chuỗi các hệ quả của một đẳng thức tích phân liên hệ giữa hai hàm số có đồ thị đối xứng với nhau qua đường thẳng cùng phương với trục tung.

Từ khóa: tích phân, tích phân đặc biệt, xâu chuỗi, đồ thị đối xứng.

ABSTRACT

A glance at an integration equality

This paper presents the series of corollaries of an integration equality which relates to two functions with the symmetrical graphs to each other across a straight line parallel to the vertical axis.

Keywords: integration, specific integration, series of, symmetrical graphs.

1. Mở đầu

Xâu chuỗi các bài toán là một yêu cầu vô cùng cần thiết trong dạy và học toán. Chỉ khi nào xâu chuỗi được các bài toán, tìm ra bài toán gốc, ta mới thấy được đường lối chung và bản chất của phương pháp giải. Bài viết này đề cập đến xâu chuỗi các hệ quả của một đẳng thức tích phân liên hệ giữa hai hàm số có đồ thị đối xứng với nhau qua đường thẳng song song với trục tung.

2. Tính chất & hệ quả

Tính chất. Với mọi hàm số f(x) liên tục trên [a; b] ta luôn có

$$\int_a^b \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{f}(a+b-x)\mathrm{d}x$$

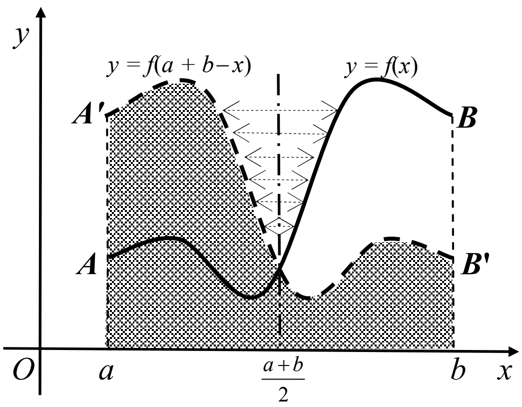
(Dễ dàng chứng minh định lí bằng cách đổi biến $x = a + b - t$.)

Chú ý.

Trên đoạn [a; b], đồ thì hai hàm số $y = \mathrm{f}(x)$ và $y = \mathrm{f}(a + b - x)$ đối xứng với nhau qua đường thẳng $x = \frac{a+b}{2}$ (xem hình vẽ)

Lời bình 1. Tính chất trên cho ta cách nghĩ thay vì tính tích phân $\int_a^b \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x$, ta có thể tính tích phân $\int_a^b \mathrm{f}(a+b-x)\mathrm{d}x$, bằng cách đổi biến $x = a + b - t$.

* Nhà giáo Ưu tú, nguyên GV Trường THPT Hồng Lĩnh tỉnh Hà Tĩnh



Từ chính chất trên ta thu được các hệ quả sau :

Hệ quả 1. Cho $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Với mọi hàm số f liên tục trên $[-1; 1]$ ta đều có

$$\int_{\frac{\pi}{4a}-b}^{\frac{\pi}{4a}+b} \mathrm{f}(\sin ax)\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{4a}-b}^{\frac{\pi}{4a}+b} \mathrm{f}(\cos ax)\mathrm{d}x .$$

Hệ quả 2. Với mọi hàm số f liên tục trên $[a; b]$, với mọi $p, q \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ ta đều có

$$\int_a^b \frac{p\mathrm{f}(x)+q\mathrm{f}(a+b-x)}{[\mathrm{f}(x)+\mathrm{f}(a+b-x)]^k}\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{p\mathrm{f}(a+b-x)+q\mathrm{f}(x)}{[\mathrm{f}(x)+\mathrm{f}(a+b-x)]^k}\mathrm{d}x$$

Đặc biệt khi k = 1 ta có :

$$\int_a^b \frac{p\mathrm{f}(x)+q\mathrm{f}(a+b-x)}{\mathrm{f}(x)+\mathrm{f}(a+b-x)}\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{p\mathrm{f}(a+b-x)+q\mathrm{f}(x)}{\mathrm{f}(x)+\mathrm{f}(a+b-x)}\mathrm{d}x = \frac{(p+q)(b-a)}{2}$$

• Khai thác hệ quả 2, ta có thể tính được tích phân kiểu $\int_a^b \frac{p\mathrm{f}(x)+q\mathrm{f}(a+b-x)}{[\mathrm{f}(x)+\mathrm{f}(a+b-x)]^k}\mathrm{d}x$ hoặc $\int_a^b \frac{\mathrm{f}(x)}{[\mathrm{f}(x)+\mathrm{f}(a+b-x)]^k}\mathrm{d}x$ hoặc $\int_a^b \frac{\mathrm{f}^k(x)}{\mathrm{f}(x)+\mathrm{f}(a+b-x)}\mathrm{d}x$ bằng thuật đổi biến $x = a + b - t$ mà không cần một chút thông minh nào.

Hệ quả 3. Với mọi hàm liên tục trên $[a; b]$, với mọi $p, q \in \mathbb{R}$, $p \neq -q$ ta luôn có :

$$\int_a^b \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{p+q}\int_a^b [p.\mathrm{f}(x)+q.\mathrm{f}(a+b-x)]\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^{\frac{a+b}{2}} [\mathrm{f}(x)+\mathrm{f}(a+b-x)]\mathrm{d}x = \int_{\frac{a+b}{2}}^b [\mathrm{f}(x)+\mathrm{f}(a+b-x)]\mathrm{d}x$$

Lời bình 2. Nếu biết tổng p.f(x) + q.f(a + b − x) là tính được tích phân $\int_a^b \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x$, mà không cần biết hàm số y = f(x).

Hệ quả 4. Nếu $f(x)$ là hàm liên tục và thoả mãn f(x) = f($\alpha + \beta - x$) với mọi $x \in [\alpha; \beta]$ thì

i) $$\int_\alpha^\beta \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x = 2\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x = 2\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x$$

ii) $$\int_\alpha^\beta x.\mathrm{f}(x)\mathrm{d}x = \frac{\alpha+\beta}{2}\int_\alpha^\beta \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x$$

iii) $$\int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{f}(x)}{1+a^{x-\frac{\alpha+\beta}{2}}}\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta \frac{a^{x-\frac{\alpha+\beta}{2}}\mathrm{f}(x)}{1+a^{x-\frac{\alpha+\beta}{2}}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x = \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x$$

- *Đặc biệt khi $\alpha + \beta = 0$ từ i) ta có*:

  Nếu f(x) là hàm chẵn liên tục trên đoạn $[-a; a]$ thì

  $$\int_{-a}^{a} \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^a \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x; \qquad \int_{-a}^{a} x.\mathrm{f}(x)\mathrm{d}x = 0$$

- *Trong ii)*: Với f(x) = sinax, $a \neq 0$ ta có

  $$\int_{\frac{\pi}{2a}-b}^{\frac{\pi}{2a}+b} x.\mathrm{f}(\sin ax)\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2a}\int_{\frac{\pi}{2a}-b}^{\frac{\pi}{2a}+b} \mathrm{f}(\sin ax)\mathrm{d}x$$

***Thí dụ 1*.** Cho $a > 0$. $a \neq 1$. Tính theo α, β tích phân $\displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}x}{1+a^{x-\frac{\alpha+\beta}{2}}}$

Lời giải. Đặt $x = \alpha + \beta - t$ suy ra $\displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}x}{1+a^{x-\frac{\alpha+\beta}{2}}} = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \mathrm{d}x = \frac{\beta-\alpha}{2}$. □

***Thí dụ 2*.** Tính tích phân $\displaystyle I = \int_{-2}^{6} \frac{\sqrt[n]{2+x}\,\mathrm{d}x}{\sqrt[n]{2+x}+\sqrt[n]{6-x}}$, với $n \in \mathbb{N}$

Lời giải. Đặt $x = -2 + 6 - t = 4 - t$ suy ra $\displaystyle I = \frac{1}{2}\int_{-2}^{6} \mathrm{d}x = 4$.□

***Thí dụ 3*.** Cho $a > 0$. Tính theo a tích phân $\displaystyle I = \int_0^{\frac{\pi}{4a}} \ln(1+\tan ax)\mathrm{d}x$

Lời giải. Đặt $x=\dfrac{\pi}{4a}-t$ suy ra $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4a}}\ln 2\mathrm{d}t-I \Leftrightarrow I=\dfrac{\pi\ln 2}{8a}$

Thí dụ 4. Tính tích phân $I=\int\limits_1^2\dfrac{\mathrm{d}x}{1+\log_{(1+x^2)}(x^2-6x+10)}$

Lời giải. Ta có $1+\log_{(1+x^2)}(x^2-6x+10)=\dfrac{\ln(1+x^2)+\ln(x^2-6x+10)}{\ln(1+x^2)}$

Vậy nên $I=\int\limits_1^2\dfrac{\ln(1+x^2)\mathrm{d}x}{\ln(x^2+1)+\ln[(3-x)^2+1]}$. Đặt $x=3-t$ suy ra $I=\dfrac{1}{2}\int\limits_1^2\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}$. □

Thí dụ 5. Tính tích phân $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\dfrac{(1+\sin x)^{1+\cos x}}{1+\cos x}\mathrm{d}x$.

Lời giải. Ta có $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\dfrac{(1+\sin x)^{1+\cos x}}{1+\cos x}\mathrm{d}x=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1+\sin x)^{1+\cos x}\mathrm{d}x-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1+\cos x)\mathrm{d}x$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}[(1+\cos x)\ln(1+\sin x)]\mathrm{d}x-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1+\cos x)\mathrm{d}x$$

$$=\underbrace{\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}[\ln(1+\sin x)]-\ln(1+\cos x)]\mathrm{d}x}_{A}+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}[\cos x.\ln(1+\sin x)]\mathrm{d}x$$

Theo hệ quả 1 ta có $A=0$ nên $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(1+\sin x)\mathrm{d}x(1+\sin x)=\int\limits_1^2\ln x\mathrm{d}x=2\ln 2-1$. □

Thí dụ 6. Tính $\int\limits_{-3}^{1}\mathrm{f}(x)\mathrm{d}x$, biết rằng f($x$) là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn :

$$2.\mathrm{f}(x)+3.\mathrm{f}(-2-x)=\frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}$$

Lời giải. Thay $\int\limits_{-3}^{1}\mathrm{f}(-2-x)\mathrm{d}x=\int\limits_{-3}^{1}\mathrm{f}(x)\mathrm{d}x$ ta có $\int\limits_{-3}^{1}[2\mathrm{f}(x)+3\mathrm{f}(-2-x)]\mathrm{d}x=5\int\limits_{-3}^{1}\mathrm{f}(x)\mathrm{d}x$

$$\Rightarrow \int_{-3}^{1} f(x)dx = \frac{1}{5}\int_{-3}^{1}\frac{x^2-1}{x^4+x^2+1}dx = \frac{1}{10}\left(\ln\left|\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right|\right)\Bigg|_{-3}^{1} = \frac{1}{10}\ln\frac{7}{39}. \square$$

***Thí dụ** 7*(P). Cho $a \in \mathbb{R}$. Tính theo S tích phân $A = \int_{-1}^{3}[x^3 - 2x^2 + (1+a^2)x]dx$, biết rằng hình phẳng (H) giới hạn bởi parabol $f(x) = x^2 - 2x + 4 + a^2$, trục Ox, $x = 1$, $x = 3$ có diện tích bằng S.

Lời giải. Để ý $f(x) = x^2 - 2x + 1 + a^2 = (x-1)^2 + a^2 \geq 0$ suy ra $\forall x \in \mathbb{R}$ có $f(x) \geq 0$ và $f(x) = f(2-x)$. Vậy nên theo giả thiết có : $S = \int_{1}^{3}|f(x)|dx = \int_{1}^{3} f(x)dx$.

Ta có $A = \int_{-1}^{3}[x^3 - 2x^2 + (1+a^2)x]dx = \int_{-1}^{3} x[x^2 - 2x + (1+a^2)]dx = \int_{-1}^{3} x.f(x)dx$.

Đặt $x = 2 - t$ với chú ý $f(x) = f(2-x)$ suy ra $A = \int_{-1}^{3} f(x)dx = \underbrace{\int_{-1}^{1} f(x)dx}_{B} + \int_{1}^{3} f(x)dx$ (1)

Đặt $x = 2 - t$ với chú ý $f(x) = f(2-x)$ suy ra $B = \int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{1}^{3} f(x)dx = S$.

Thay vào (1) có $A = 2S$. $\square$

3. Tích phân no và tích phân không no

Trở lại Hệ quả 2, xét tích phân dạng

$$I = \int_{a}^{b}\frac{f^k(x)}{[f(x) + p.f(\theta - x)]^l}dx \qquad \begin{pmatrix} a, b, \theta \in \mathbb{R} \\ p, k, l \in \mathbb{N} \end{pmatrix}$$

(vừa chứa cả $f(x)$ và $f(\theta - x)$)

• Nếu $a + b = 2\theta$, việc tính I thường được thực hiện bằng cách đổi biến $x = a + b - t$.

Ta nói $I = \int_{a}^{b}\frac{f^k(x)}{[f(x) + pf(a+b-x)]^l}dx$ là tích phân no. (Các Thí dụ đã trình bày là tích phân no).

• Nếu $a + b \neq 2\theta$, ta nói $I = \int_{a}^{b}\frac{f^k(x)}{[f(x) + pf(a+b-x)]^l}dx$ là tích phân không no.

Việc tính tích phân không no I thường được thực hiện bằng cách thêm bớt vào I tích phân

$J = \int_{a}^{b}\frac{f^k(\theta - x)}{[f(x) + p.f(\theta - x)]^l}dx$ để đưa về tính những tích phân đơn giản hơn.

(Chú ý: Với tích phân không no, phép đổi biến $x = a + b - t$ không trả lại cận ban đầu, việc tính tích phân chưa thể gọn gàng ngay.)

Sau đây là các Thí dụ về tích phân không no.

Thí dụ 8. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{8\cos x\mathrm{d}x}{\sqrt{3} + \tan x}$

Lời giải. Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{8\cos x\mathrm{d}x}{\sqrt{3} + \tan x} = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{4\cos^2 x}{\sqrt{3}\cos x + \sin x}\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(3\cos^2 x - \sin^2 x) + 1}{\sqrt{3}\cos x + \sin x}\mathrm{d}x$

$$= 2\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{3}} (\sqrt{3}\cos x - \sin x)\mathrm{d}x}_{A} + 6\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3}\cos x + \sin x}}_{B} \qquad (1)$$

Dễ dàng có $A = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$, $B = \frac{\ln 3}{2}$. Thay vào (1) có $I = \sqrt{3} - 1 + \ln 3$. □

Lời nhắn. Người ta nói : $I = \int_a^b \frac{\mathrm{f}^k(x)}{[\mathrm{f}(x) + p.\mathrm{f}(\theta - x)]^l}\mathrm{d}x$ và $J = \int_a^b \frac{\mathrm{f}^k(\theta - x)}{[\mathrm{f}(x) + p.\mathrm{f}(\theta - x)]^l}\mathrm{d}x$

là hai tích phân liên kết với nhau.

Thí dụ 9. Tính tích phân $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{96\sin x\mathrm{d}x}{(\sin x + \sqrt{3}\cos x)^3}$.

Lời giải. Ta có $I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{96\sin x\mathrm{d}x}{(\sin x + \sqrt{3}\cos x)^3} = 24\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{(\sin x + \sqrt{3}\cos x) - \sqrt{3}(\cos x - \sqrt{3}\sin x)}{(\sin x + \sqrt{3}\cos x)^3}\mathrm{d}x$

$$= 24\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\mathrm{d}x}{(\sin x + \sqrt{3}\cos x)^2}}_{A} - 24\sqrt{3}\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\mathrm{d}(\sin x + \sqrt{3}\cos x)}{(\sin x + \sqrt{3}\cos x)^3}}_{B} \qquad (1)$$

Dễ dàng có $A = \frac{\sqrt{3}}{12}$, $B = \frac{1}{24}$. Thay vào (1) có $I = \sqrt{3}$. □

Lời bình 3. Với mọi *a, p, q* ∈ □ , $a \neq 0$, với mọi k ∈ □ ta luôn có

$$\int_{\frac{\pi}{4a}-b}^{\frac{\pi}{4a}+b} \frac{p\sin ax + q\cos ax}{(\sin ax + \cos ax)^k}\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{4a}-b}^{\frac{\pi}{4a}+b} \frac{p\cos ax + q\sin ax}{(\sin ax + \cos ax)^k}\mathrm{d}x$$

(Nhưng chỉ thuận lợi tính được với $k = 0, 1, 2, 3$).

4. Bài tập

Bài 1$^{(P)}$. Tính mỗi tích phân sau

11$^{\text{P}}$**)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{9\sin 2x - \cos 2x}{(\sin 2x + \cos 2x)^3}\mathrm{d}x$ **2**$^{\text{P}}$**)** $\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{12\cos^2 x - 1}{\sin x - \sqrt{3}\cos x}\mathrm{d}x$

44$^{\text{P}}$**)** $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{16}}^{\frac{3\pi}{16}} \ln\frac{\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4} + x)}{\cos x}\mathrm{d}x$ **5**$^{\text{P}}$**)** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\sin\pi x\mathrm{d}x}{1 + \cos^2\pi x}$

Bài 2. Tính mỗi tích phân sau

1$^{\text{P}}$**)** $\displaystyle\int_{-3}^{3} \frac{2^{x-1}\cos^2\frac{\pi x}{3}}{1 + 2^x}dx$ **2**$^{\text{P}}$**)** $\displaystyle\int_{-2}^{6} \frac{x(\sqrt{2+x} + \sqrt{6-x})}{1 + 5^{x-2}}\mathrm{d}x$

Bài 3. 1) Tính tích phân $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x$, nếu f($x$) là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn:

f(x) + 3f($-x$) = 2x + tan$x$.

2)Tính $\displaystyle\int_e^{3e} \mathrm{f}(x)\mathrm{d}x$, biết rằng f($x$) là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ thoả mãn :

f(x) + f(4e – x) = $\dfrac{1}{x\sqrt{\ln x}}$.

Bài 4. Cho $a \in \mathbb{R}$. Tính $A = \displaystyle\int_{-1}^{3} [x^3 - ax^2 + (a-1)x]\mathrm{d}x$, biết rằng hình phẳng (H) giới hạn bởi parabol f(x) = x^2 – ax + a – 1 , trục Ox, x = –1, x = 3 có diện tích bằng S.

Bài 5. Cho $a \in \mathbb{R}$. Tính $A = \displaystyle\int_{-1}^{7} x\lg(x^2 - 6x + 10 + a^2)\mathrm{d}x$, biết rằng hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị f(x) = ln(x^2 – 6x + 10 + a^2), trục Ox, x = 3, x = 7 có diện tích bằng S.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Bộ Giáo dục & Đào tạo (2008), *Giải tích 12 nâng cao*, Nxb Giáo dục
2. Phan Đức Chính, Vũ Dương Thuỵ, Tạ Mân, Đào Tam, Lê Thống Nhất (1995), *Bài giảng luyện thi môn Toán*, Nxb Giáo dục.
3. Phan Huy Khải (1995), *Giải tích–Toán nâng cao cho lớp 12*, Nxb Khoa học và Kĩ thuật.
4. Phạm Quốc Phong (2008), *Bồi dưỡng giải tích 12*, Nxb Đại học Quốc gia Hà Nội.

(Ngày Tòa soạn nhận được bài: 04-10-2011; ngày chấp nhận đăng: 24-4-2012)