NGHIỆM TUẦN HOÀN CỦA PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN PHI TUYẾN BẬC HAI LOẠI TRUNG HÒA VỚI ĐỐI SỐ LỆCH

LÊ HOÀN HÓA*, LÊ THỊ HẰNG**

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi sử dụng định lí điểm bất động của toán tử dạng Krasnoselskii để chứng minh sự tồn tại nghiệm tuần hoàn của phương trình vi phân phi tuyến bậc hai loại trung hòa với đối số lệch sau:

$$x''(t)+cx''(t-\tau)+p(t)x'(t)+q(t)x(t)$$
$$+f\left(t,x\left(t-\tau_1(t)\right),x\left(t-\tau_2(t)\right),...,x\left(t-\tau_n(t)\right)\right)=g(t) \quad (1)$$

trong đó $|c|<1$ *và* τ *là hằng số.*

Từ khóa: nghiệm tuần hoàn, phương trình vi phân phi tuyến bậc hai loại trung hòa với đối số lệch.

ABSTRACT

Periodic solutions for a second – order nonlinear neutral differential equation with deviating argument

In this paper, we use Krasnoselskii's fixed point theorem to prove the existence of periodic solutions for a second – order nonlinear neutral differential equation with deviating argument:

$$x''(t)+cx''(t-\tau)+p(t)x'(t)+q(t)x(t)$$
$$+f\left(t,x\left(t-\tau_1(t)\right),x\left(t-\tau_2(t)\right),...,x\left(t-\tau_n(t)\right)\right)=g(t) \quad (1)$$

where $|c|<1$ *and* τ *is a constant.*

Keywords: periodic solutions, second – order nonlinear neutral differential equation with deviating argument.

1. Giới thiệu

Năm 2010, Guo, O'Regan và P.Agarwal [2] đã sử dụng định lí điểm bất động của toán tử dạng Krasnoselskii để chứng minh sự tồn tại nghiệm tuần hoàn của phương trình

$$x''(t)+cx''(t-\tau)+a(t)x(t)+g\left(t,x\left(t-\tau_1(t)\right),x\left(t-\tau_2(t)\right),...,x\left(t-\tau_n(t)\right)\right)=p(t)$$

Trong bài báo trên, phương trình được xét không chứa đạo hàm cấp một $x'(t)$,

* PGS TS, Khoa Toán – Tin học Trường Đại học Sư phạm TPHCM
** HVCH, Trường Đại học Sư phạm TPHCM

do đó trong bài báo này chúng tôi thiết lập một số điều kiện để chỉ ra sự tồn tại nghiệm tuần hoàn của phương trình (1).

Để chứng minh sự tồn tại nghiệm tuần hoàn của phương trình (1), trước tiên chúng tôi tìm hàm Green của phương trình (1) để biến đổi phương trình (1) về phương trình tích phân, sau đó tiếp tục biến đổi đưa về dạng tổng của một ánh xạ co và một ánh xạ compact, từ đó áp dụng định lí điểm bất động kiểu Krasnoselskii.

Để tìm hàm Green cho phương trình (1) chúng tôi dựa vào kết quả của Wang, Lian và Ge [3] khi các tác giả nghiên cứu sự tồn tại nghiệm tuần hoàn của phương trình

$$x''(t)+p(t)x'(t)+q(t)x(t)=r(t)x'(t-\tau(t))+f\big(t,x(t),x(t-\tau(t))\big)$$

2. Kiến thức chuẩn bị

Trong suốt bài báo này chúng tôi luôn giả sử:

(H_1) p và q là các hàm liên tục, tuần hoàn với chu kì T,

$$\int_0^T p(u)du>0\ ;\ \int_0^T q(u)du>0$$

(H_2) $f\in C\left(\mathbb{R}^{n+1},\mathbb{R}\right)$, $f\left(t+T,x_1,x_2,...,x_n\right)=f\left(t,x_1,x_2,...,x_n\right)\ \forall t\in\mathbb{R}$

và tồn tại $k>0: \left|f(t,x)-f(t,y)\right|\le k\|x-y\|_2$,

trong đó $\|.\|_2$ là chuẩn Euclide trong $\mathbb{R}^n$

(H_3) g là hàm liên tục, tuần hoàn với chu kì T.

(H_4) $\tau_i\,(i=1,2,...,n)$ tuần hoàn với chu kì T, khả vi trên $\mathbb{R}$ và $\tau_i'(t)<1,\ t\in\mathbb{R}$

Hơn nữa kí hiệu hàm ngược của $t-\tau_i(t)$ là μ_i.Đặt $\lambda_i=\max\limits_{\mathbb{R}}\dfrac{1}{1-\tau_i'(\mu_i(t))}$

***Bổ đề 1.* ([3])**

Giả sử điều kiện (H_1) được thỏa mãn và

$$(H_5)\quad \frac{R_1\left[\exp\left(\int_0^T p(u)\,du\right)-1\right]}{Q_1T}\ge 1$$

với $R_1 = \max_{t\in[0,T]} \left| \int_t^{t+T} \frac{\exp\left(\int_t^s p(u)du\right)}{\exp\left(\int_0^T p(u)du\right) - 1} q(s)ds \right|$ và $Q_1 = \left(1 + \exp\left(\int_0^T p(u)du\right)\right)^2 R_1^2$

Khi đó tồn tại các hàm liên tục, tuần hoàn với chu kì T là a và b sao cho

$$b(t) > 0 \,;\, \int_0^T a(u)du > 0 \,;\, a(t) + b(t) = p(t) \,;\, b'(t) + a(t)b(t) = q(t),\ t \in \mathbb{R}$$

***Bổ đề 2.* ([3])**

Giả sử các điều kiện của bổ đề 1 được thoả mãn và φ là hàm liên tục, tuần hoàn với chu kì T. Khi đó phương trình sau sẽ có nghiệm tuần hoàn chu kì T :

$$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = \varphi(t)$$

Hơn nữa nghiệm có dạng :

$$x(t) = \int_t^{t+T} G(t,s)\varphi(s)ds$$

với $$G(t,s) = \frac{\int_t^s \exp\left[\int_t^u b(v)dv + \int_u^s a(v)dv\right]du + \int_s^{t+T} \exp\left[\int_t^u b(v)dv + \int_u^{s+T} a(v)dv\right]du}{\left[\exp\left(\int_0^T a(u)du\right) - 1\right]\left[\exp\left(\int_0^T b(u)du\right) - 1\right]}$$

***Hệ quả.* ([3])**

Hàm Green G có các tính chất sau

$$G(t, t+T) = G(t,t) \,;\, G(t+T, s+T) = G(t,s)$$

$$\frac{\partial G}{\partial s}(t,s) = a(s)G(t,s) - \frac{\exp\left(\int_t^s b(v)dv\right)}{\exp\left(\int_0^T b(v)dv\right) - 1}$$

$$\frac{\partial G}{\partial t}(t,s) = -b(t)G(t,s) + \frac{\exp\left(\int_t^s a(v)dv\right)}{\exp\left(\int_0^T a(v)dv\right)-1}$$

***Bổ đề 3.* ([3])**

Đặt $A = \int_0^T p(u)du$, $B = T^2 \exp\left(\frac{1}{T}\int_0^T \ln(q(u))du\right)$. Nếu

(H_6) $A^2 \geq 4B$ thì ta có

$$\min\left\{\int_0^T a(u)du, \int_0^T b(u)du\right\} \geq \frac{1}{2}\left(A - \sqrt{A^2 - 4B}\right) := l$$

$$\max\left\{\int_0^T a(u)du, \int_0^T b(u)du\right\} \leq \frac{1}{2}\left(A + \sqrt{A^2 - 4B}\right) := m$$

và khi đó ta có các đánh giá sau

$$\frac{T}{\left(e^m - 1\right)^2} \leq G(t,s) \leq \frac{T\exp\left(\int_0^T p(u)du\right)}{\left(e^l - 1\right)^2} = \frac{T\exp\left(\int_0^T a(u)du\right)\exp\left(\int_0^T b(u)du\right)}{\left(e^l - 1\right)^2}$$

$$\leq \frac{T\left(e^m\right)^2}{\left(e^l - 1\right)^2} = T\left(\frac{e^m}{e^l - 1}\right)^2 = T\beta^2, \text{ với } \beta = \frac{e^m}{e^l - 1}.$$

Đặt $E_b(t,s) = \dfrac{\exp\left(\int_t^s b(v)dv\right)}{\exp\left(\int_0^T b(v)dv\right) - 1}$. Khi đó ta có $\left|E_b(t,s)\right| \leq \beta$

Định lí Krasnoselskii

Giả sử Ω là tập con khác rỗng, lồi, đóng và bị chặn của không gian Banach X.

Các ánh xạ $U, S : \Omega \to X$ thỏa mãn các điều kiện sau:

i. $Ux+Sy \in \Omega$ với mọi $x, y \in \Omega$.

ii. U là ánh xạ co.

iii. S là ánh xạ compact.

Khi đó tồn tại $z \in \Omega$ sao cho $z = Uz + Sz$.

3. Kết quả chính

Kí hiệu: $a_0 = \max\limits_{[0,T]}|a(t)|$, $b_0 = \max\limits_{[0,T]}|b(t)|$, $g_0 = \max\limits_{[0,T]}|g(t)|$

$$\rho_0 = \max_{[0,T]}|f(t,0,0,...,0)|,\ p_0 = \max_{[0,T]}|p(t)|,\ q_0 = \max_{[0,T]}|q(t)|$$

Định lí.

Giả sử các điều kiện từ $(H_1) - (H_6)$ được thoả mãn và có thêm giả thiết sau

$$|c|(1+a_0\beta T)(1+b_0\beta T) + k\beta^2 T^2 \sum_{i=1}^{n} \lambda_i < 1$$

Khi đó phương trình (1) sẽ có nghiệm tuần hoàn với chu kì T.

Chứng minh:

Đặt $X = \left\{ x \,\middle|\, x \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}), x(t+T) = x(t) \right\}$ với chuẩn

$$\|x\| = \max_{[0,T]}|x(t)| + \max_{[0,T]}|x'(t)| + \max_{[0,T]}|x''(t)|$$

Khi đó $(X, \|.\|)$ là không gian Banach.

$$(1) \Leftrightarrow x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = -cx''(t-\tau)$$

$$-f\left(t, x(t-\tau_1(t)), x(t-\tau_2(t)), ..., x(t-\tau_n(t))\right) + g(t)$$

$$\Leftrightarrow x(t) = \int_t^{t+T} G(t,s)\left[-cx''(s-\tau) - f\left(s, x(s-\tau_1(s)), ..., x(s-\tau_n(s))\right) + g(s)\right] ds$$

Áp dụng tích phân từng phần và hệ quả, ta được

$$\int_t^{t+T} G(t,s)x''(s-\tau)ds = G(t,s)x'(s-\tau)\Big|_{s=t}^{t+T} - \int_t^{t+T} \frac{\partial G}{\partial s}(t,s)x'(s-\tau)ds$$

$$= \int_t^{t+T} x'(s-\tau)E_b(t,s)ds - \int_t^{t+T} x'(s-\tau)a(s)G(t,s)ds$$

$$= x(t-\tau) - \int_t^{t+T} x(s-\tau)b(s)E_b(t,s)\,ds - \int_t^{t+T} x'(s-\tau)a(s)G(t,s)\,ds$$

Vậy $x(t) = -cx(t-\tau) + c\int_t^{t+T} x(s-\tau)b(s)E_b(t,s)\,ds$

$$+\int_t^{t+T} G(t,s)\Big[cx'(s-\tau)a(s) - f\big(s, x(s-\tau_1(s)),\ldots,x(s-\tau_n(s))\big) + g(s)\Big]ds$$

Chọn K_1 là số thoả mãn

$$(\rho_0 + g_0)\beta^2 T^2 \le \left(1 - |c|(1+a_0\beta T)(1+b_0\beta T) - k\beta^2 T^2 \sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)K_1$$

Đặt $K_2 = \dfrac{1+b_0\beta T}{\beta T}K_1$, $K_3 = \dfrac{\left(q_0 + k\sqrt{n}\right)K_1 + p_0 K_2 + g_0 + \rho_0}{1-|c|}$ và

$$\Omega = \left\{x \in X \,\big|\, |x(t)| \le K_1, |x'(t)| \le K_2, |x''(t)| \le K_3\right\}$$

Khi đó Ω là tập con lồi, đóng, bị chặn của X.

Đặt U, S là các ánh xạ xác định như sau

$U : X \to X$, $(Ux)(t) = -cx(t-\tau)$

$S : X \to X$

$$(Sx)(t) = c\int_t^{t+T} x(s-\tau)b(s)E_b(t,s)\,ds$$

$$+\int_t^{t+T} G(t,s)\Big[cx'(s-\tau)a(s) - f\big(s, x(s-\tau_1(s)),\ldots,x(s-\tau_n(s))\big) + g(s)\Big]ds$$

Ta kiểm tra các điều kiện của định lí Krasnoselskii

1) Với $x, y \in \Omega$ ta chứng minh $Uy + Sx \in \Omega$

$$|(\mathrm{Uy})(t)| = |-cy(t-\tau)| \le |c|K_1$$

$$|(Sx)(t)| \le |c|b_0\beta T K_1 + |c|a_0\beta^2 T^2 K_2$$

$$+\int_t^{t+T} |G(t,s)|\Big[\big|f\big(s, x(s-\tau_1(s)),\ldots,x(s-\tau_n(s))\big) - f(s,0,\ldots,0)\big|\Big]ds$$

$$+\int_t^{t+T}|G(t,s)||f(s,0,...,0)|ds+g_0\beta^2T^2$$

$$\le|c|b_0\beta TK_1+|c|a_0\beta^2T^2K_2+k\beta^2T\int_t^{t+T}\left(\sum_{i=1}^n|x(s-\tau_i(s))|^2\right)^{1/2}ds+\rho_0\beta^2T^2+g_0\beta^2T^2$$

$$\le|c|b_0\beta TK_1+|c|a_0\beta^2T^2K_2+k\beta^2T\int_t^{t+T}\left(\sum_{i=1}^n|x(s-\tau_i(s))|\right)ds+\rho_0\beta^2T^2+g_0\beta^2T^2$$

$$=|c|b_0\beta TK_1+|c|a_0\beta^2T^2K_2+k\beta^2T\sum_{i=1}^n\int_0^T\frac{|x(u)|}{1-\tau_i'(\mu_i(u))}du+\rho_0\beta^2T^2+g_0\beta^2T^2$$

$$\le|c|b_0\beta TK_1+|c|a_0\beta^2T^2K_2+k\beta^2T^2K_1\sum_{i=1}^n\lambda_i+\rho_0\beta^2T^2+g_0\beta^2T^2$$

Dẫn đến $|(Uy)(t)+(Sx)(t)|\le|(Uy)(t)|+|(Sx)(t)|$

$$\le\left(|c|+|c|b_0\beta T+k\beta^2T^2\sum_{i=1}^n\lambda_i\right)K_1+|c|a_0\beta^2T^2K_2+(\rho_0+g_0)\beta^2T^2=K_1 \qquad (2)$$

$$(Uy)'(t)=-cy'(t-\tau)$$

$$(Sx)'(t)=c\left[x(t+T-\tau)b(t+T)E_b(t,t+T)-x(t-\tau)b(t)E_b(t,t)\right]$$

$$+c\int_t^{t+T}x(s-\tau)b(s)\frac{\partial E_b}{\partial t}(t,s)ds+c\int_t^{t+T}x'(s-\tau)a(s)\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)ds$$

$$-\int_t^{t+T}\frac{\partial G}{\partial t}(t,s)\left[f\left(s,x(s-\tau_1(s)),...,x(s-\tau_n(s))\right)-g(s)\right]ds$$

$$=-b(t)\left[(\mathrm{Ux})(t)+(Sx)(t)\right]$$

$$+\int_t^{t+T}E_a(t,s)\left[cx'(s-\tau)a(s)-f\left(s,x(s-\tau_1(s)),...,x(s-\tau_n(s))\right)+g(s)\right]ds$$

$$\left|(Uy)'(t)\right|=|-cy'(t-\tau)|\le|c|K_2$$

$$\left|(Sx)'(t)\right| \le b_0K_1 + \beta\left[|c|a_0TK_2 + kTK_1\sum_{i=1}^{n}\lambda_i + T\rho_0 + Tg_0\right]$$

Do đó $\left|(Uy)'(t)+(Sx)'(t)\right| \le \left|(Uy)'(t)\right| + \left|(Sx)'(t)\right|$

$$\le \left(b_0 + k\beta T\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)K_1 + |c|(1+a_0\beta T)K_2 + \beta T(\rho_0+g_0) \le \frac{1+b_0\beta T}{\beta T}K_1 = K_2 \quad (3)$$

$$(Uy)''(t) = -cy''(t-\tau)$$

$$(Sx)''(t) = -b'(t)\left[(Ux)(t)+(Sx)(t)\right] - b(t)\left[(Ux)'(t)+(Sx)'(t)\right]$$

$$+\left(E_a(t,t+T)-E_a(t,t)\right)\left[cx'(t-\tau)a(t) - f\left(t,x(t-\tau_1(t)),...,x(t-\tau_n(t))\right)+g(t)\right]$$

$$+\int_t^{t+T}\frac{\partial E_a}{\partial t}(t,s)\left[cx'(s-\tau)a(s) - f\left(s,x(s-\tau_1(s)),...,x(s-\tau_n(s))\right)+g(s)\right]ds$$

$$= -b'(t)\left[(Ux)(t)+(Sx)(t)\right] - b(t)\left[(Ux)'(t)+(Sx)'(t)\right]$$

$$+cx'(t-\tau)a(t) - f\left(t,x(t-\tau_1(t)),...,x(t-\tau_n(t))\right)+g(t)$$

$$-a(t)\int_t^{t+T}E_a(t,s)\left[cx'(s-\tau)a(s) - f\left(s,x(s-\tau_1(s)),...,x(s-\tau_n(s))\right)+g(s)\right]ds$$

$$= -q(t)\left[(Ux)(t)+(Sx)(t)\right] - p(t)\left[(Ux)'(t)+(Sx)'(t)\right]$$

$$-f\left(t,x(t-\tau_1(t)),...,x(t-\tau_n(t))\right)+g(t)$$

Ta có

$$\left|f\left(t,x(t-\tau_1(t)),...,x(t-\tau_n(t))\right)\right| \le$$

$$\left|f\left(t,x(t-\tau_1(t)),...,x(t-\tau_n(t))\right) - f(t,0,...,0)\right|$$

$$+\left|f(t,0,...,0)\right|$$

$$\le k\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left|x(t-\tau_i(t))\right|^2} + \left|f(t,0,...,0)\right|$$

Do đó $\left|(Sx)''(t)\right| \le q_0K_1 + p_0K_2 + k\sqrt{n}K_1 + \rho_0 + g_0 = \left(q_0 + k\sqrt{n}\right)K_1 + p_0K_2 + \rho_0 + g_0$

Dẫn đến $\left|(Uy)''(t) + (Sx)''(t)\right| \le \left|(Uy)''(t)\right| + \left|(Sx)''(t)\right|$

$$\le |c|K_3 + \left(q_0 + k\sqrt{n}\right)K_1 + p_0K_2 + \rho_0 + g_0 = |c|K_3 + (1-|c|)K_3 = K_3 \tag{4}$$

Từ (2),(3) và (4) ta có $Uy + Sx \in \Omega$ với $x, y \in \Omega$.

2) U là ánh xạ co trên Ω

Ta có $(Ux)(t+T) = (Ux)(t)$. Với $x, y \in \Omega$

$$\|Ux - Uy\| \le |c|\max_{[0,T]}\left|x(t-\tau) - y(t-\tau)\right| + |c|\max_{[0,T]}\left|x'(t-\tau) - y'(t-\tau)\right|$$

$$+|c|\max_{[0,T]}\left|x''(t-\tau) - y''(t-\tau)\right| = |c|\|x-y\|$$

Vậy U là ánh xạ co.

3) S là ánh xạ compact trên Ω.

❖ Trước tiên ta chứng minh S liên tục trên Ω.

Ta có $(Sx)(t+T) = (Sx)(t)$.

Với $x \in \Omega$ bất kì, giả sử $(x_m)_m$ là dãy trong Ω sao cho $\|x_m - x\| \to 0$.

Với $\varepsilon > 0$ cho trước, do $\|x_m - x\| \to 0$ nên $\exists m_0$ sao cho $\|x_m - x\| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}, \forall m \ge m_0$

hay $\max_{[0,T]}\left|x_m(t) - x(t)\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ và $\max_{[0,T]}\left|x'_m(t) - x'(t)\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \quad \forall m \ge m_0$

Với $m \ge m_0$, từ giả thiết (H_2) ta có

$$\left|(Sx_m)(t) - (Sx)(t)\right| \le |c|\int_t^{t+T}\left|x_m(s-\tau) - x(s-\tau)\right|\left|b(s)\right|\left|E_b(t,s)\right|ds$$

$$+|c|\int_t^{t+T}\left|x_m'(s-\tau) - x'(s-\tau)\right|\left|a(s)\right|\left|G(t,s)\right|ds$$

$$+\int_t^{t+T}|G(t,s)|\left|f\left(s,x_m\left(s-\tau_1(s)\right),...,x_m\left(s-\tau_n(s)\right)\right)-f\left(s,x\left(s-\tau_1(s)\right),...,x\left(s-\tau_n(s)\right)\right)\right|ds$$

$$\le |c|\max_{[0,T]}|x_m(t)-x(t)|b_0\beta T+|c|\max_{[0,T]}\left|x_m{}'(t)-x'(t)\right|a_0\beta^2T^2+k\beta^2T^2\varepsilon,\quad \forall t\in[0,T]$$

$$\le |c|\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}b_0\beta T+|c|\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}a_0\beta^2T^2+k\beta^2T^2\varepsilon,\quad \forall t\in[0,T]$$

$$\Rightarrow \max_{[0,T]}\left|(Sx_m)(t)-(Sx)(t)\right|\le |c|\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}b_0\beta T+|c|\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}a_0\beta^2T^2+k\beta^2T^2\varepsilon\ ,\quad \forall m\ge m_0$$

$$\Rightarrow \max_{[0,T]}\left|(Sx_m)(t)-(Sx)(t)\right|\to 0 \text{ khi } m\to\infty$$

Lập luận tương tự ta có $\max\limits_{[0,T]}\left|(Sx_m)'(t)-(Sx)'(t)\right|\to 0$ khi $m\to\infty$

$$\max_{[0,T]}\left|(Sx_m)''(t)-(Sx)''(t)\right|\to 0 \text{ khi } m\to\infty$$

Dẫn đến $\|Sx_m-Sx\|\to 0$, nghĩa là S liên tục tại $x\in\Omega$ bất kì. Suy ra S liên tục trên Ω.

❖ Ta chứng minh $S(\Omega)$ là tập compact tương đối trong X

Trước tiên ta chứng minh $S(\Omega)$ là tập compact tương đối trong $C^2([0,T],\mathbb{R})$ với chuẩn $\|x\|=\max\limits_{[0,T]}|x(t)|+\max\limits_{[0,T]}|x'(t)|+\max\limits_{[0,T]}|x''(t)|$

$\forall t\in[0,T], x\in\Omega$ ta có

$$|(Sx)(t)|\le\omega \text{ với } \omega=\left(|c|b_0\beta T+k\beta^2T^2\sum_{i=1}^n\lambda_i\right)K_1+|c|a_0\beta^2T^2K_2+\rho_0\beta^2T^2+g_0\beta^2T^2$$

$$\left|(Sx)'(t)\right|\le\lambda \text{ với } \lambda=b_0K_1+\beta\left[|c|a_0TK_2+kTK_1\sum_{i=1}^n\lambda_i+T\rho_0+Tg_0\right]$$

$$\left|(Sx)''(t)\right|\le\theta \text{ với } \theta=\left(q_0+k\sqrt{n}\right)K_1+p_0K_2+\rho_0+g_0$$

Do đó $S(\Omega)$ bị chặn đều trong $C^2([0,T],\mathbb{R}),\ \|\cdot\|$

$$\left|(Sx)(t_1)-(Sx)(t_2)\right| = \left|\int_{t_1}^{t_2}(Sx)'(t)\,dt\right| \le \lambda|t_1-t_2| \tag{5}$$

$$\left|(Sx)'(t_1)-(Sx)'(t_2)\right| = \left|\int_{t_1}^{t_2}(Sx)''(t)\,dt\right| \le \theta|t_1-t_2| \tag{6}$$

$$\left|(Sx)''(t_1)-(Sx)''(t_2)\right| \le \left|q(t_1)(Ux)(t_1)-q(t_2)(Ux)(t_2)\right| + \left|q(t_1)(Sx)(t_1)-q(t_2)(Sx)(t_2)\right|$$

$$+\left|p(t_1)(Ux)'(t_1)-p(t_2)(Ux)'(t_2)\right| + \left|p(t_1)(Sx)'(t_1)-p(t_2)(Sx)'(t_2)\right| + \left|g(t_1)-g(t_2)\right|$$

$$+\left|f\left(t_1,x\left(t_1-\tau_1(t_1)\right),\ldots,x\left(t_1-\tau_n(t_1)\right)\right)-f\left(t_2,x\left(t_2-\tau_1(t_2)\right),\ldots,x\left(t_2-\tau_n(t_2)\right)\right)\right|$$

Ta có

$$\left|q(t_1)(Ux)(t_1)-q(t_2)(Ux)(t_2)\right| \le \left|q(t_1)\right|\left|(Ux)(t_1)-(Ux)(t_2)\right| + \left|q(t_1)-q(t_2)\right|\left|(Ux)(t_2)\right|$$

$$\le |c|q_0\left|\int_{t_2-\tau}^{t_1-\tau}|x'(s)|\,ds\right| + |c|K_1\left|q(t_1)-q(t_2)\right| \le |c|q_0K_2|t_1-t_2| + |c|K_1\left|q(t_1)-q(t_2)\right| \tag{7}$$

$$\left|q(t_1)(Sx)(t_1)-q(t_2)(Sx)(t_2)\right| \le \left|q(t_1)-q(t_2)\right|\left|(Sx)(t_1)\right| + \left|q(t_2)\right|\left|(Sx)(t_1)-(Sx)(t_2)\right|$$

$$\le \omega\left|q(t_1)-q(t_2)\right| + \lambda q_0|t_1-t_2| \tag{8}$$

$$\left|p(t_1)(Ux)'(t_1)-p(t_2)(Ux)'(t_2)\right| \le \left|p(t_1)-p(t_2)\right|\left|(Ux)'(t_1)\right| + \left|p(t_2)\right|\left|(Ux)'(t_1)-(Ux)'(t_2)\right|$$

$$\le |c|K_2\left|p(t_1)-p(t_2)\right| + |c|\,p_0K_3|t_1-t_2| \tag{9}$$

$$\left|p(t_1)(Sx)'(t_1)-p(t_2)(Sx)'(t_2)\right| \le \left|p(t_1)-p(t_2)\right|\left|(Sx)'(t_1)\right| + \left|p(t_2)\right|\left|(Sx)'(t_1)-(Sx)'(t_2)\right|$$

$$\le \lambda\left|p(t_1)-p(t_2)\right| + p_0\theta|t_1-t_2| \tag{10}$$

Với $i=1,2,\ldots,n$

$$\left|x\left(t_1-\tau_i(t_1)\right)-x\left(t_2-\tau_i(t_2)\right)\right| \le \left|\int_{t_2-\tau_i(t_2)}^{t_1-\tau_i(t_1)}|x'(s)|\,ds\right| \le K_2\left[|t_1-t_2| + \left|\tau_i(t_1)-\tau_i(t_2)\right|\right]$$

$$\le K_2\left[|t_1-t_2| + \left|\int_{t_2}^{t_1}\left|\tau_i'(s)\right|ds\right|\right] < 2K_2|t_1-t_2|$$

Dẫn đến ta có

$$\left|f\left(t_1,x\left(t_1-\tau_1\left(t_1\right)\right),...,x\left(t_1-\tau_n\left(t_1\right)\right)\right)-f\left(t_2,x\left(t_2-\tau_1\left(t_2\right)\right),...,x\left(t_2-\tau_n\left(t_2\right)\right)\right)\right|$$

$$\le\left|f\left(t_1,x\left(t_1-\tau_1\left(t_1\right)\right),...,x\left(t_1-\tau_n\left(t_1\right)\right)\right)-f\left(t_2,x\left(t_1-\tau_1\left(t_1\right)\right),...,x\left(t_1-\tau_n\left(t_1\right)\right)\right)\right|$$

$$+\left|f\left(t_2,x\left(t_1-\tau_1\left(t_1\right)\right),...,x\left(t_1-\tau_n\left(t_1\right)\right)\right)-f\left(t_2,x\left(t_2-\tau_1\left(t_2\right)\right),...,x\left(t_2-\tau_n\left(t_2\right)\right)\right)\right|$$

$$\le\left|f\left(t_1,x\left(t_1-\tau_1\left(t_1\right)\right),...,x\left(t_1-\tau_n\left(t_1\right)\right)\right)-f\left(t_2,x\left(t_1-\tau_1\left(t_1\right)\right),...,x\left(t_1-\tau_n\left(t_1\right)\right)\right)\right|$$

$$+k\left(\sum_{i=1}^{n}\left|x\left(t_1-\tau_i\left(t_1\right)\right)-x\left(t_2-\tau_i\left(t_2\right)\right)\right|^2\right)^{1/2}$$

$$\le\left|f\left(t_1,x\left(t_1-\tau_1\left(t_1\right)\right),...,x\left(t_1-\tau_n\left(t_1\right)\right)\right)-f\left(t_2,x\left(t_1-\tau_1\left(t_1\right)\right),...,x\left(t_1-\tau_n\left(t_1\right)\right)\right)\right|$$

$$+2kK_2\sqrt{n}\left|t_1-t_2\right| \quad (11)$$

Kí hiệu $\overline{B}\left(0,K_1\right)$ là quả cầu đóng tâm O bán kính K_1 trong $\mathbb{R}^n$.

Với $\varepsilon>0$ cho trước, do f liên tục đều trên $\left[0,T\right]\times\overline{B}\left(0,K_1\right)$ nên $\exists\delta_1>0$ sao cho với $t_1,t_2\in\left[0,T\right],\left|t_1-t_2\right|<\delta_1$ suy ra

$$\left|f\left(t_1,x\left(t_1-\tau_1\left(t_1\right)\right),...,x\left(t_1-\tau_n\left(t_1\right)\right)\right)-f\left(t_2,x\left(t_1-\tau_1\left(t_1\right)\right),...,x\left(t_1-\tau_n\left(t_1\right)\right)\right)\right|\le\varepsilon \quad (12)$$

Do tính liên tục đều của các hàm p,q,g trên $\left[0,T\right]$, ta có thể chọn được $\delta>0$ sao cho với $t_1,t_2\in\left[0,T\right],\left|t_1-t_2\right|<\delta$ từ (5) - (12) ta suy ra

$$\left|(Sx)(t_1)-(Sx)(t_2)\right|\le C_1\varepsilon,\left|(Sx)'(t_1)-(Sx)'(t_2)\right|\le C_2\varepsilon,\left|(Sx)''(t_1)-(Sx)''(t_2)\right|\le C_3\varepsilon$$

trong đó $C_i\left(i=1,2,3\right)$ là hằng số dương. Do đó $S\left(\Omega\right)$ đồng liên tục trên $\left[0,T\right]$.

Theo định lí Ascoli – Azela, $S\left(\Omega\right)$ là tập compact tương đối trong $C^2\left(\left[0,T\right],\mathbb{R}\right)$.

Giả sử $\left(x_m\right)_m$ là một dãy trong $S\left(\Omega\right)$. Đặt $\left(S\left(\Omega\right)\right)_1=\left\{x\big|_{[0,T]}:x\in S\left(\Omega\right)\right\}$ trong đó $x\big|_{[0,T]}$ là thu hẹp của x trên $\left[0,T\right]$. Khi đó $\left(S\left(\Omega\right)\right)_1$ là tập compact tương đối trong $C^2([0,T],\mathbb{R})$. Do đó tồn tại dãy con của $(x_m)_m$ là $(x_{m_k})_k$ sao cho $\lim\limits_{k\to\infty} x_{m_k}\big|_{[0,T]} = a_0$ trong $C^2([0,T],\mathbb{R})$.

Đặt $a(t)=\begin{cases} a_0(t) \quad khi\ t\in[0,T] \\ a_0(t-kT)\ khi\ t\in[kT,(k+1)T] \end{cases}$ $(k\in\mathbb{Z})$

Khi đó $x_{m_k}\to a$ trong X. Thật vậy

$$\|x_{m_k}-a\| = \max_{[0,T]}|x_{m_k}(t)-a(t)| + \max_{[0,T]}|x'_{m_k}(t)-a'(t)| + \max_{[0,T]}|x''_{m_k}(t)-a''(t)|$$

$$= \max_{[0,T]}|x_{m_k}(t)-a_0(t)| + \max_{[0,T]}|x'_{m_k}(t)-a'_0(t)| + \max_{[0,T]}|x''_{m_k}(t)-a''_0(t)|$$

Từ $\lim\limits_{k\to\infty} x_{m_k}\big|_{[0,T]} = a_0$ trong $C^2([0,T],\mathbb{R})$ dẫn đến $x_{m_k}\to a$ trong X.

Do đó $S(\Omega)$ compact tương đối trong X. Vậy S là ánh xạ compact trên Ω.

Theo định lí điểm bất động Krasnoselskii, ánh xạ U + S có điểm bất động trong Ω. Điểm bất động đó là nghiệm tuần hoàn của phương trình (1).

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Lê Hoàn Hóa, (2010), *Định lí điểm bất động và ứng dụng để nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của phương trình*, Đề tài nghiên cứu khoa học cấp cơ sở, Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh.
2. Chengjun Guo, Donal O'Regan, Ravi P.Agarwal, (2010), "Existence of periodic solutions for a class of second – order neutral differential equations with multiple deviating arguments", *CUBO A Mathematical Journal*, Vol.12, pp. 153-165.
3. Youyu Wang, Hairong Lian, Weigao Ge, (2007), "Periodic solutions for a second order nonlinear functional differential equation", *Applied Mathematics Letters*, 20 (2007), pp. 110-115.

(Ngày Tòa soạn nhận được bài: 01-6-2012; ngày phản biện đánh giá: 04-10-2012; ngày chấp nhận đăng: 22-11-2012)