BÓNG CỦA ĐOẠN TRONG POSET CÁC TẬP CON TẬP ĐA BỘI

TRẦN HUYÊN*

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi xem xét về bóng của một đoạn trong poset các tập con của tập đa bội theo thứ tự từ điển và đưa ra một vài điều kiện cần và đủ để bóng của một đoạn trong poset này là một đoạn.

Từ khóa: bóng tập hợp, đoạn, mức.

ABSTRACT

On the shadow of a segment in the poset of subsets of multiple sets

In this paper, we look at the shadow of a segment in the poset of subsets of multiple set, defined lexicographic order, and prove some necessary and sufficient conditions to prove that the shadow of a segment in this poset is a segment.

Keywords: shadow of the set, segment, level.

1. Mở đầu

Poset $S(k_1,k_2,...,k_n)$ các tập con của tập đa bội *n* phần tử mà phần tử thứ *i* lặp k_i lần, có thể đồng nhất với các vectơ nguyên $x = x_1x_2...x_n$ mà $0 \le x_i \le k_i$ với mỗi *i*. Thứ tự bao hàm của các tập con chuyển sang các vectơ cho ta thứ tự tự nhiên sau: $x = x_1x_2...x_n \le y = y_1y_2...y_n$ khi và chỉ khi $x_i \le y_i$ với mọi *i*.

Khái niệm bóng của phần tử và tập hợp trong poset $S(k_1,k_2,...,k_n)$ được xác định tương tự như trong poset các tập con tập đơn bội. Cụ thể là, với mỗi phần tử $a = a_1a_2...a_n$, bóng thứ *i* của *a* là $\Delta_i a = a_1...(a_i - 1)...a_n$ nếu $a_i > 0$, còn $\Delta_i a = \varnothing$ nếu $a_i = 0$. Bóng của phần tử *a* là $\Delta a = \bigcup \Delta_i a$. Nếu tập $A \subset S(k_1,k_2,...,k_n)$ thì bóng $\Delta A = \bigcup\{\Delta a : a \in A\}$.

Với mỗi $x = x_1x_2...x_n$, hạng của *x* là $|x| = x_1 + x_2 + ... + x_n$.

Với mỗi số tự nhiên *k* cho trước, mức hạng *k* trong $S(k_1,k_2,...,k_n)$ được định nghĩa là: $S_k = \{x : |x| = k\}$.

Các nhà toán học Clement và Lindstrom đã xác lập trên mỗi mức S_k một thứ tự tuyến tính – là thứ tự từ điển – như sau: Với $a = a_1...a_s...a_n$ và $b = b_1...b_s...b_n$ thì $a < b$ nếu tồn tại số tự nhiên *s*, $1 \le s \le n$ sao cho $a_t = b_t$ khi $t < s$ còn $a_s < b_s$, đồng thời đã chứng minh được với thứ tự từ điển này, $S(k_1,k_2,...,k_n)$ là một *k* – poset. Nói riêng, họ

* TS, Trường Đại học Sư phạm TPHCM

đã chỉ ra rằng, bóng của một đoạn đầu xác định bởi phần tử *a*: $IS(a)=\{x:x\le a\}$ trong S_k theo thứ tự từ điển lại là một đoạn đầu trong S_{k-1}.

Bài viết này giới thiệu vài mở rộng của kết quả trên, nhằm giải quyết vấn đề: Với những điều kiện nào cho một đoạn $[a;b]$ trong S_k theo thứ tự từ điển thì bóng $\Delta[a;b]$ lại là một đoạn trong S_{k-1}? Cũng vì lí do này, mà từ nay về sau, trong bài viết này, thứ tự mà ta nói tới chỉ là thứ tự từ điển.

2. Các kết quả chính

Để tiện lợi cho sự trình bày, trước hết ta cần thống nhất một số kí hiệu.

Với mỗi phần tử $a\in S_k$ mà tọa độ khác không đầu tiên là a_i ta có thể viết: $a=za_iu$, ở đây $z=\varnothing$ hay $z=0...0$, còn $u=a_{i+1}...a_n$. Nếu tọa độ khác không cuối cùng của *a* là a_t thì ta viết $a=va_tz$. Đối với các bóng thành phần của phần tử *a*, ta sẽ kí hiệu: $\Delta^h a=\max\{\Delta_i a\},\Delta^l a=\min\{\Delta_i a\}$.

Dễ thấy: nếu $a=za_iua_tz$ thì $\Delta^h a=za_iu(a_t-1)z$ và $\Delta^l a=z(a_i-1)ua_tz$

Đối với số tự nhiên $m\le k,$ ta kí hiệu:

$h_i(m)=\max\{x=zx_iu:|x|=m,x_i\ne 0\}$

$l_i(m)=\min\{x=vx_iz:|x|=m,x_i\ne 0\}$

Nói riêng, $h(m)=\max\{x:x\in S_m\},l(m)=\min\{x:x\in S_m\}$

Bây giờ, ta xét bóng $\Delta[a;b]$ mà *a*, *b* có tọa độ khác 0 đầu tiên là như nhau, tức $a=za_iu$ và $b=za_iv$. Ta sẽ phân tích $\Delta[a;b]$ thành hai bộ phận được kí hiệu như sau:

$$\Delta^l[a;b]=\{\Delta^l x:x\in[a;b]\}=\{z(a_i-1)w:za_iw\in[a;b]\}$$

và $$\Delta^h[a;b]=\Delta[a;b]\setminus\Delta^l[a;b]=\{za_iw':za_iw'\in\Delta[a;b]\}$$

Để ý rằng, khi *a*, *b* thỏa mãn điều kiện trên, ta luôn có: $\Delta^h a\le\Delta^h b$ và $\Delta^l a\le\Delta^l b$, do đó ta có bao hàm thức: $\Delta[a;b]\subset[\Delta^l a;\Delta^h b]$. Vậy để có $\Delta[a;b]$ là đoạn, ta cần có bao hàm thức ngược lại. Để giải quyết yêu cầu này, trước hết ta cần đến các kết quả sau:

Mệnh đề 1

Trong mức S_k cho $a=za_iu<za_iv=b$. Khi đó, $\Delta^l[a;b]=\{z(a_i-1)w:za_iw\in[a;b]\}$ luôn luôn là một đoạn. Nếu $a=za_izl(k-a_i)$ thì $\Delta^h[a;b]$ cũng là một đoạn.

Chứng minh:

Kết luận thứ nhất được suy ra từ kết quả hiển nhiên sau: $za_iu \le za_iw \le za_iv$ khi và chỉ khi $z(a_i-1)u \le z(a_i-1)w \le z(a_i-1)v$ và do đó:

$\Delta^l[a;b] = [z(a_i-1)u; z(a_i-1)v]$

Bởi $\Delta^h b = \max \Delta^h[a;b]$ và $a' = za_izl(k-a_i-1) = \min \Delta^h[a;b]$, nên để chỉ ra $\Delta^h[a;b]$ là đoạn ta chỉ cần chứng tỏ $[a';\Delta^h b] \subset \Delta^h[a;b]$. Giả sử $b = za_ib_{i+1}...b_tz$, khi đó $\Delta^h b = za_i...(b_t-1)z$. Lấy phần tử bất kì $x' \in [a';\Delta^h b]$, $x' = za_ix_{i+1}...x_n < \Delta^h b$; Xảy ra các khả năng sau:

- Khả năng thứ nhất: $b_j = x_j$ với mọi $j < t$ và $x_t < b_t - 1$.

  Khi đó chọn $x = za_i...(x_t+1)...x_n \in [a;b]$ thì $x' = \Delta_t x$, tức $x' \in \Delta^h[a;b]$.

- Khả năng thứ hai: tồn tại s mà $i < s < t$ sao cho $b_j = x_j$ với mọi $j < s$ và $x_s < b_s$.

  Trong khả năng này, xảy ra các trường hợp sau:

  + Trường hợp thứ nhất: Phần tử $x = za_i...(x_s+1)...x_n \le b$. Khi đó $x' = \Delta_s x \in \Delta^h[a;b]$.

  + Trường hợp thứ hai: Phần tử $x = za_i...(x_s+1)...x_n > b$. Khi đó ắt tồn tại chỉ số q, $q > s$ sao cho $x_j = b_j$ với mọi $j < q$ và $x_q > b_q$. Do $|x| = |b|$ nên $b_{q+1} + ... + b_t > x_{q+1} + ... + x_n$, ắt tồn tại chỉ số p mà $q < p \le t$ để $b_p > x_p$. Chọn $y = za_i...(x_p+1)...x_n$ thì $y \in [a;b]$ và $x' = \Delta_p y \in \Delta^h[a;b]$.

Vậy trong mọi khả năng và mọi trường hợp có thể xảy ra, bất kì $x' \in [a';\Delta^h b]$ đều có $x' \in \Delta^h[a;b]$, cho ta kết luận: $\Delta^h[a;b] = [a';\Delta^h b]$.+

Sử dụng mệnh đề 1, ta đi tới kết quả đáng chú ý sau:

Mệnh đề 2

Trong mức S_k cho $a = za_iu < za_iv = b$. Khi đó, $\Delta[a;b]$ là đoạn khi và chỉ khi $b = za_ih_{i+1}(k-a_i)z$, còn $a < a^* = za_iu^*$ mà $za_izl(k-a_i-1) = \Delta_j a^*$ với $j \ge i+1$.

Chứng minh: Nếu $\Delta[a;b]$ là đoạn thì $\Delta[a;b] = [\Delta^l a; \Delta^h b]$.

Dễ thấy $z(a_i-1)h_{i+1}(k-a_i)z,\ za_izl(k-a_i-1)\in\left[\Delta^l a;\Delta^h b\right]$, buộc các phần tử $za_ih_{i+1}(k-a_i)$ và $a^*=za_iu^*$ mà $za_izl(k-a_i-1)=\Delta_j a^*$ (với $j\ge i+1$) phải thuộc $[a;b]$. Từ đó suy ra $b=za_ih_{i+1}(k-a_i)z$ và $a<a^*=za_iu^*$.

Ngược lại, nếu các đầu mút *a*, *b* thỏa các điều kiện của mệnh đề 2, trước hết ta sẽ chỉ ra $\Delta[a;b]$ là đoạn. Từ sự phân tích $\Delta[a;b]=\Delta^h[a;b]\cup\Delta^l[a;b]$ theo mệnh đề 1, $\Delta^l[a;b]=\left[\Delta^l a;\Delta^l b\right]$; và để ý rằng $\min\Delta^h[a;b]=\Delta_j a^*$ là trội trực tiếp của $\Delta^l b$. Do đó để chứng minh $\Delta[a;b]$ là đoạn ta chỉ cần chứng minh $\Delta^h[a^*;b]=\left[\Delta_j a^*;\Delta^h b\right]$.

Nếu $a^*=za_izl(k-a_i)$ thì $\Delta^h[a^*;b]$ là đoạn theo mệnh đề 1.

Nếu $a^*>za_izl(k-a_i)$ và $x'\in\left[\Delta_j a^*;\Delta^h b\right]$ thì có hai khả năng xảy ra sau:

- Khả năng thứ nhất: $x'\ge\Delta^h a^*$. Khi đó ắt tồn tại *x* mà $b>x\ge a^*$ và chỉ số $t>j$ sao cho $\Delta_t x=x'$.
- Khả năng thứ hai: $x'<\Delta^h a^*$. Khi đó ắt tồn tại *x* mà $b>x>a^*$ sao cho $\Delta_j x=x'$.

Như vậy theo hết các khả năng có thể xảy ra ta đều có $\left[\Delta_j a^*;\Delta^h b\right]\subset\Delta[a^*;b]$, suy ra kết luận. +

Vấn đề sẽ trở nên phức tạp hơn khi các đầu mút *a*, *b* không cùng chung tọa độ khác 0 đầu tiên. Dưới đây ta chỉ xét một vài kết quả liên quan tới các đầu mút *a*, *b* đều có tọa độ khác không đầu tiên cùng thứ *i*, tuy nhiên $a_i\ne b_i$.

Mệnh đề 3

Trong mức S_k cho $a=za_iu<zb_iv=b$ với $a_i=b_i-1\ne 0$. Nếu $b=zb_ih_{i+1}(k-b_i)z$ hay $a=za_izl(k-a_i)$ thì $\Delta[a;b]$ là đoạn.

Chứng minh: Nếu $b=zb_ih_{i+1}(k-b_i)z$, chọn $a'=zb_izl(k-b_i)$ và phân tích $[a;b]=[a;a']\cup[a';b]$.

Theo mệnh đề 2: $\Delta[a';b]=\left[\Delta^l a';\Delta^h b\right]$.

Khi đó $\Delta[a;b]\subset\left[\Delta^l a;\Delta^h b\right]=\left[\Delta^l a;\Delta^h a'\right]\cup\left[\Delta^l a';\Delta^h b\right]$.

Song $\Delta[a;b]\supset\Delta[a';b]\cup\Delta[a;a']\supset\left[\Delta^l a';\Delta^h b\right]\cup\Delta^l[a;a')$

$=\left[\Delta^l a';\Delta^h b\right]\cup\left[\Delta^l a;\Delta^l a'\right)=\left[\Delta^l a;\Delta^h b\right]$

Vậy, $\Delta[a;b]=\left[\Delta^l a;\Delta^h b\right]$.

Nếu $a = za_i zl(k - a_i)$, chọn $a' = za_i h_{i+1}(k - a_i)z$, và phân tích

$[a;b] = [a;a'] \cup [a';b]$

Theo mệnh đề 2: $\Delta[a;a'] = [\Delta^l a; \Delta^h a']$.

Theo mệnh đề 1: $\Delta^h(a';b] \supset [zb_i zl(k - a_i); \Delta^h b]$.

Để ý rằng $\Delta^h a'$ có trội trực tiếp là $zb_i zl(k - a_i)$ nên

$\Delta[a;b] = \Delta[a;a'] \cup \Delta^h[a';b] = [\Delta^l a; \Delta^h b]$ +

Xem như là hệ quả trực tiếp của mệnh đề 3, ta có:

Mệnh đề 4

Trong mức S_k cho $a = za_i u < zb_i v = b$ với $1 \le a_i < b_i - 1$. Khi đó $\Delta[a;b]$ là đoạn. +

Cuối cùng để kết thúc bài viết, ta lưu ý rằng các kết quả trên được phát biểu cho các mức S_k với độ lớn *k* thích hợp. Khi độ lớn *k* khá bé cần có những điều chỉnh nhất định. Chẳng hạn khi *k* = 2, ta có các kết quả cụ thể hơn như sau mà việc kiểm chứng chúng xin được nhường lại cho độc giả.

Mệnh đề 5

Trong mức S_2 cho $a < b$. Khi đó

i) Nếu $\Delta^h a = \Delta^h b = z1_i z$ thì $\Delta[a;b]$ là đoạn khi và chỉ khi hoặc $b = z2_i z$ hoặc $b = z1_i 1z$.

ii) Nếu $\Delta^h b = z1_i z$ còn $\Delta^h a = z1_{i+t} z$ với $t > 1$ thì $\Delta[a;b] = IS(\Delta^h b)$.

iii) Nếu $\Delta^h b = z1_i z$ còn $\Delta^h a = z1_{i+1} z$ thì $\Delta[a;b] = IS(\Delta^h b)$ khi và chỉ khi $\Delta^l b \ge \Delta^l a$. +

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Anderson, I. (1989), "Combinatorics of finite set", *Clarendon press*, Oxford.
2. Clement, G. F and Lindstrom, B. (1969), "A generalization of a combinatorial therem of Macaulay", *J. Combinat,* Theory 7.
3. Clement, G. F (1984), "Antichains in the set of subsets of a multiset", *Pariod. Math Hung*, 15.
4. Tran Huyen, Le Cao Tu (2007), "Some prolem on the shadow of segments in finite boolean rings", *VNU journal of Science. Math* - phys - 23.

(Ngày Tòa soạn nhận được bài: 26-9-2011; ngày chấp nhận đăng: 27-10-2011)