MÔ HÌNH ĐỊNH GIÁ TÀI SẢN TƯ BẢN

NGUYỄN CHÍ LONG*

TÓM TẮT

Mỗi nhà đầu tư trong thị trường tài chính, khi phải chọn lựa các phương án đầu tư khác nhau, nhưng chúng có cùng trung bình lợi tức, thì tùy theo mức độ e ngại rủi ro (thể hiện qua hàm lợi ích) mà lựa chọn phương án ít rủi ro nhất, nghĩa là phương án có phương sai bé nhất. Nội dung này, được giới thiệu qua mô hình định giá tài sản tư bản. Đây là một trong những kết quả nền tảng của Toán tài chính.

Từ khóa: hàm lợi ích, lý thuyết đầu tư hiện đại, mô hình định giá tài sản tư bản.

ABSTRACT

The capital asset pricing model

In financial markets, when the investor has a choice of different portfolios that have the same average return, depending on the level of risk aversion (presented by the utility function); he chooses the least risky portfolio; i.e. the portfolio that has the smallest variance. This is presented through the capital asset pricing model. This is one of the fundamental results of financial mathematics.

Keywords: utility function, modern portfolio theory, capital asset pricing model.

1. Lợi nhuận và hàm lợi ích

1.1. Một số khái niệm, định nghĩa

Xét mô hình tài chính một chu kỳ với thời gian giao dịch $T = \{0,1\}$. Thời điểm t = 0 là thời điểm hiện tại, bắt đầu giao dịch và thời điểm t = 1 là thời điểm đáo hạn, kết thúc giao dịch. Thị trường tài chính gồm $N + 1$ tài sản nền tảng để đầu tư, đó là một tài khoản tín dụng trong ngân hàng (hay trái phiếu không rủi ro) B_t, $t = 0,1$; với lãi suất cố định trong một chu kỳ là r và N chứng khoán

$\{S_t^i\}$, $i = 1, 2, ..., N; t = 0, 1.$

Đối với tài khoản tín dụng B_t, giả thiết $B_0 = 1$ đơn vị tiền tệ gửi vào ngân hàng tại thời điểm $t = 0$ và sẽ có được $B_1 = 1 + r$ đơn vị tiền tệ khi $t = 1$.

Giá của N chứng khoán tại thời điểm t = 0, S_0^1, S_0^2,…, S_0^N thì được xác định, nhưng giá chứng khoán tại thời điểm t = 1 lại phụ thuộc vào một trong k kịch bản tài chính ω_i, i = 1, …, κ thuộc

$\Omega := \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\kappa\}$

Giả sử sự xuất hiện của mỗi kịch bản $\omega_i \in \Omega$ có xác suất $P(\omega_i) > 0$, i = 1, …,κ. Gọi $F = P(\Omega)$ là tập hợp tất cả các tập con của Ω thì F là trường thông tin lớn nhất của

* TS, Trường Đại học Sư phạm TPHCM

thị trường tài chính đang xét. Lúc đó S_1^i, $i = 1, \dots, N$ là các biến ngẫu nhiên xác định trên (Ω, F, P) và $S_1^i(\omega)$ là giá chứng khoán thứ i tại thời điểm $t = 1$ khi kịch bản $\omega \in \Omega$ xuất hiện.

* Một phương án đầu tư (viết tắt PA) là một cặp (x, ϕ) trong đó x là tổng số tiền đầu tư ban đầu và ϕ là danh mục chứng khoán đầu tư, nó là véctơ gồm N thành phần $\phi := (\phi^1, \dots, \phi^N)$ với ϕ^i là số đơn vị cổ phiếu của chứng khoán thứ i được mua tại thời điểm $t = 0$. Số tiền còn lại sau khi mua N chứng khoán

$$\phi^0 := x - \sum_{i=1}^{N} \phi^i S_0^i$$

sẽ được gửi vào tài khoản tín dụng (hay mua trái phiếu không rủi ro).

* Quá trình giá của *PA* (x, ϕ) là cặp $(V_0(x, \phi); V_1(x, \phi))$

Trong đó $V_0(x, \phi) = x$ và $V_1(x, \phi)$ là biến ngẫu nhiên

$$V_1(x, \phi) = \phi^0 B_1 + \sum_{i=1}^{N} \phi^i S_1^i$$

Gọi R^i là *lợi tức* của chứng khoán thứ i $(i = 1,\dots,N)$:

$$R^i := \frac{S_1^i - S_0^i}{S_0^i}$$

và R^0 là lợi tức của tài khoản tín dụng, đây là hằng số xác định dương r:

$$R^0 := \frac{B_1 - B_0}{B_0} = r$$

* Quá trình lời $G(x, \phi)$ của *PA* (x, ϕ) là biến ngẫu nhiên

$$G(x, \phi) = \phi^0 r + \sum_{i=1}^{N} \phi^i \Delta S^i \text{, với } \Delta S^i := S_1^i - S_0^i$$

và khi biểu diễn quá trình lời qua lợi tức thì

$$G(x, \phi) = \phi^0 B^0 R^0 + \sum_{i=1}^{N} \phi^i S_0^i R^i,$$

* Trong trường hợp mọi hàng hóa trong thị trường phải chiết khấu thì quá trình giá chứng khoán đã chiết khấu là

$\hat{S}_0^i = S_0^i$ và $\hat{S}_1^i = \frac{1}{B_1} . S_1^i$; lúc đó quá trình giá đã chiết khấu của PA (x, ϕ)

$\hat{V}_0(x, \phi) = x$ và $\hat{V}_1(x, \phi) = \phi^0 + \sum_{i=1}^{N} \phi^i \hat{S}_1^i$, và quá trình lời đã chiết khấu là:

$$\hat{G}(x, \phi) = \sum_{i=1}^{N} \phi^i \Delta \hat{S}^i, \quad \text{với} \quad \Delta \hat{S}^i = \hat{S}_1^i - \hat{S}_0^i$$

* Từ các khái niệm trên ta có :

$V_1(x, \phi) = V_0(x, \phi) + G(x, \phi)$ (1)

$\hat{V}_t = \frac{1}{B_1} . V_t$; (t = 0;1) và $\hat{V}_1(x, \phi) = \hat{V}_0(x, \phi) + \hat{G}(x, \phi)$ (2)

* Thị trường tài chính là ***lành mạnh***, nếu trong thị trường không tồn tại PA (x, ϕ) nào thỏa mãn cả 3 điều kiện sau:

(1) $x = V_0(x, \phi) = 0$,

(2) $V_1(x, \phi) \geq 0$ (hoặc $\hat{G}(x, \phi) \geq 0$),

(3) $\exists\, \omega \in \Omega : V_1(x, \phi)(\omega) > 0$ (hoặc $\hat{G}(x, \phi)(\omega) > 0$).

* Một độ đo xác suất Q trên Ω được gọi là ***độ đo xác suất trung hòa rủi ro*** nếu

(1) $Q(\omega) > 0,\ \forall\omega \in \Omega$ (Mỗi kịch bản xảy ra với xác suất dương) và

(2) $E_Q[\Delta \hat{S}^i] = 0$ (Kỳ vọng của số gia chứng khoán đã chiết khấu lấy theo độ đo Q thì bằng 0).

* Một ***quyền tài chính (hay phái sinh)*** là một biến ngẫu nhiên X xác định trên không gian xác định (Ω, F, P) biểu diễn ***một thu hoạch*** tại thời điểm đáo hạn $t = 1$.

* Cho X là một ***quyền tài chính***. Một phương án đầu tư (x, ϕ) được gọi là ***phương án đáp ứng*** (a replicating strategy) hay ***một bảo hộ*** (hedge) cho X nếu $V_1(x, \phi) = X$ tại thời điểm $t = 1$.

* Một quyền tài chính X được gọi là ***đạt được*** (attainable) hay ***mua bán được*** (marketable) nếu có một phương án đầu tư (x, ϕ) bảo hộ cho X.

* Thị trường tài chính là ***đầy đủ*** nếu mọi quyền tài chính X đều có thể tìm được một phương án (x, ϕ) bảo hộ cho X. Mô hình tài chính không có tính chất này gọi là mô hình tài chính ***không đầy đủ.***

2.2. Nguyên lý một giá trong thị trường tài chính đầy đủ

Trong [4] và [2], chúng tôi đã giới thiệu và chứng minh nguyên lý: ***Thị trường tài chính là lành mạnh khi và chỉ khi tồn tại một độ đo xác suất trung hòa rủi ro.***

Và nguyên lý: ***Trong thị trường tài chính lành mạnh thì thị trường tài chính là đầy đủ khi và chỉ khi tồn tại duy nhất một độ đo xác suất trung hòa rủi ro.***

Đối với nhà đầu tư (viết tắt: NĐT) tài chính,vấn đề quan tâm chính là: *Cách nào là tối ưu để đầu tư vào thị trường tài chính?*

Lời đáp của câu hỏi này phụ thuộc vào mô hình tài chính nào đang xét và chọn lựa phương án đầu tư nào? Tính tối ưu được hiểu chính xác như thế nào? Hay cụ thể hơn là, xác định giá trị đối với mỗi cách biểu diễn phương án đầu tư như thế nào? Giá trị này trong thị trường tài chính thường bị chi phối bởi ba đặc trưng sau:

1. NĐT thích thu hoạch cao hơn là thu hoạch thấp hơn đối với một phương án đầu tư.

Đặc trưng này là hiển nhiên. Tuy nhiên, trong thực tế ở thị trường tài chính, lợi ích thu được từ một phương án đầu tư có tính ngẫu nhiên; chẳng hạn, phương án đầu tư 1 có thể đạt được thu hoạch cao khi trạng thái tài chính này xảy ra, nhưng phương án đầu tư 2 lại đạt được thu hoạch cao khi trạng thái tài chính khác xảy ra. Do đó, sẽ không có ý nghĩa khi so sánh hai phương án trên cùng một trạng thái, mà phải xét chung trên toàn bộ các trạng thái có thể xảy ra ở thị trường tài chính, nghĩa là xét kỳ vọng của nó, do đó đặc trưng thứ hai là:

2. NĐT xét giá trị trung bình hay kỳ vọng của từng phương án đầu tư.

3. NĐT thường có tâm lý e ngại rủi ro.

Để làm rõ đặc trưng này ta xét

Ví dụ 1:

Giả sử NĐT được mời chọn một trong hai phương án 1 và 2, tương ứng với thu hoạch X_1 và X_2. Nếu NĐT chọn phương án 1 sẽ thu được 100 triệu đồng; còn nếu chọn phương án 2, thì phải tuân theo quy tắc may rủi sau: Nếu tung đồng xu (gồm 2 mặt, một mặt có hình Quốc huy mà ta ghi là H và một mặt chỉ giá Trị đồng xu mà ta ghi là T) mà mặt H xuất hiện thì NĐT thu được 200 triệu đồng, còn nếu mặt T xuất hiện thì NĐT sẽ không thu được đồng nào. Thông thường, nếu NĐT không phải là tỷ phú, thì có tâm lý chọn phương án 1 để thu hoạch chắc chắn 100 triệu đồng hơn là chọn phương án 2 có thể xảy ra tình trạng trắng tay, nghĩa là NĐT có tâm lý e ngại rủi ro, mặc dù thu hoạch trung bình của hai phương án là như nhau:

Vì $X_1 = 100$ là tất định và kỳ vọng của nó, $E[X_1] = 100$, còn đối với X_2 phụ thuộc ngẫu nhiên vào T hoặc H; X_2(T) = 0; X_2(H) = 200; do đó nếu đánh giá thu hoạch theo kỳ vọng thì $E[X_2] = \frac{1}{2}.0 + \frac{1}{2}.200 = 100 = E[X_1]$.

Khái niệm *e ngại rủi ro* thường được sử dụng trong mô hình thông qua các *hàm lợi ích* (utility functions).

Hàm lợi ích cho ta cách đo lường sự chọn lựa của NĐT phụ thuộc vào tổng vốn hiện có và mức độ e ngại rủi ro, mà NĐT mong muốn là đạt được tổng tài sản về sau lớn hơn. Do đó, hàm lợi ích là hạt nhân của lý thuyết đầu tư tối ưu hiện đại.

Định nghĩa 1.

Một hàm $U : R^+ \times \Omega \to R$ được gọi là hàm lợi ích nếu nó thỏa mãn hai điều kiện sau:

1. *Cố định $\omega \in \Omega$, thì hàm U(x, ω) là tăng ngặt theo biến x, nghĩa là đạo hàm theo biến x của U là U'(x, ω) > 0, với mọi x > 0, và*
2. *Cố định $\omega \in \Omega$, thì hàm U(x, ω) là lõm ngặt theo biến x, nghĩa là*

   $U(\lambda x + (1-\lambda)y;\omega) > \lambda U(x;\omega) + (1-\lambda) U(y;\omega)$

   Hay tương đương với U''(x, ω) < 0, với mọi x > 0.

Để đơn giản cách biểu diễn, ta thường viết hàm lợi ích dạng hiện theo biến tổng tài sản *x*, *U(x, ω) = U(x(ω)) = U(x),* và ngầm hiểu nó còn phụ thuộc vào trạng thái ω.

Bây giờ ta xét một biến ngẫu nhiên *X* biểu diễn thu hoạch của NĐT. Cố định hàm lợi ích *U*. Ta sẽ đo lường thu hoạch của NĐT qua kỳ vọng

$$E[U(X)] = \sum_{i=1}^{k} P(\omega_i)U(X(\omega_i))$$

Sự biểu diễn thu hoạch này bao hàm ba đặc trưng vừa nêu trên: Đặc trưng thứ nhất phản ảnh qua hàm lợi ích thì tăng ngặt, đặc trưng thứ hai phản ảnh qua giá trị trung bình, còn đặc trưng thứ ba, tính e ngại rủi ro, phản ảnh qua tính lõm ngặt của hàm lợi ích.

Ví dụ 2:

Giả sử NĐT đang có tổng tài sản là 5 triệu đồng và thị trường chỉ có một cách đầu tư là mua một loại cổ phiếu: $S_0 = 5$ (triệu). Cũng giả sử, tại thời điểm đáo hạn *t = 1*, một trong hai kịch bản trong thị trường có thể xảy ra giống như việc tung đồng xu hai mặt *H* và *T*: $\Omega := \{H, T\}$ với xác suất $P(H) = P(T) = 0{,}5$. Nếu kịch bản H xảy ra (tình hình kinh tế phát triển tốt) thì giá chứng khoán tăng: $S_1(H) = 9$ (triệu), nghĩa là tăng thêm 4 triệu; còn nếu kịch bản *T* xảy ra (tình hình kinh tế khó khăn) thì giá chứng khoán giảm: $S_1(T) = 1$ (triệu), nghĩa là giảm 4 triệu. (Trường hợp này còn được gọi là trò chơi công bằng vì kỳ vọng lợi nhuận là

E[G] = 0,5. 4 + 0,5.(- 4)) = 0).

Xét hàm lợi ích: *U(x)* $= \sqrt{x}$. Ta thử tìm hiểu, trên quan điểm đáp ứng nguyên lý cực đại kỳ vọng hàm lợi ích, NĐT sẽ chọn phương án đầu tư hay không chọn?

Nếu NĐT từ chối phương án trên, giữ nguyên 5 triệu đồng lúc đầu, thì đến thời điểm đáo hạn *t = 1*, số tiền vẫn còn nguyên 5 triệu; đối với hàm lợi ích thì trên: *U(x)* = *U(5)* = $\sqrt{5}$ (hằng số) nên kỳ vọng của nó *E[U(5)] = U(5) =* $\sqrt{5}$ = 2,24.

Nếu NĐT chọn phương án đầu tư thì kỳ vọng của hàm lợi ích

E[U(x)] = P(H).U(x(H)) + P(T).U(x(T)) = 0,5. $\sqrt{9}$ + 0,5. $\sqrt{1}$ = 2.

Vì kỳ vọng hàm lợi ích khi từ chối phương án đầu tư thì lớn hơn kỳ vọng hàm lợi ích khi chọn phương án (2,24 > 2), nên NĐT sẽ từ chối phương án.

Một cách tổng quát, NĐT e ngại rủi ro thường từ chối trò chơi công bằng vì kỳ vọng lợi tức là 0%. Nếu kỳ vọng lợi tức lớn hơn 0%, NĐT có thể chọn hay không chọn phương án đầu tư phụ thuộc vào hàm lợi ích và tổng vốn ban đầu. Chẳng hạn, nếu xác suất xảy ra của kịch bản *H*, *P(H)* = 75% thay vì *P(H)* = 50%, thì kỳ vọng lợi ích là

E[U(x)] = 0,75. $\sqrt{9}$ + 0,25. $\sqrt{1}$ = 2,5 > 2,24

nên NĐT sẽ chọn phương án đầu tư.

Sử dụng kết quả trên, từ việc tìm phương án đầu tư tối ưu trong thị trường tài chính, chuyển sang tìm phương án (x, ϕ) sao cho $E[U(V_1(x, \phi))]$ đạt giá trị tối ưu. Bài toán này được gọi là ***bài toán đầu tư tối ưu***. Giá trị tối ưu dĩ nhiên phụ thuộc vào tổng vốn đầu tư ban đầu *x*. Khi vốn đầu tư ban đầu *x* càng lớn, thì kỳ vọng thu hoạch càng cao, do đó ta xem vốn đầu tư ban đầu như một tham số của bài toán.

Định nghĩa 2.

Một phương án đầu tư (x,ϕ^*) *được gọi là một nghiệm của bài toán đầu tư tối ưu, với vốn đầu tư ban đầu là* $V_0 = x$ *và hàm lợi ích U nếu*

$$E[U(V_1(x,\phi^*))] = Max_{(x,\phi)} E[U(V_1(x,\phi))]$$

Mệnh đề 1.

Nếu bài toán đầu tư tối ưu trong thị trường tài chính đang xét có một nghiệm, thì mô hình tài chính này là lành mạnh.

Chứng minh:

Ta cần chứng minh rằng, nếu thị trường tài chính không lành mạnh thì bài toán đầu tư tối ưu vô nghiệm.

Giả sử thị trường tài chính là không lành mạnh, nghĩa là tồn tại một phương án có độ chênh lệch thị giá $(0,\psi)$. Đối với mỗi phương án đầu tư (x,ϕ) chúng ta phải có

$$V_1(x,\phi+\psi)(\omega) = V_1(x,\phi)(\omega) + V_1(0,\psi)(\omega)$$

trong đó: $(x,\phi+\psi)$ là phương án đầu tư tổng của hai phương án (x,ϕ) và $(0,\psi)$, nghĩa là phương án đầu tư mua $\phi^i + \psi^i$ đơn vị cổ phiếu chứng khoán S^i. Theo định nghĩa của độ chênh lệch thị giá, phương án này chỉ cần đầu tư vốn ban đầu là *x* và bất đẳng thức trên sẽ thỏa ngặt với ít nhất một kịch bản $\omega \in \Omega$, do đó với mỗi hàm lợi ích *U* ta có:

$$E[U(V_1(x,\phi+\psi))] > E[U(V_1(x,\phi))]$$

Điều này chỉ ra rằng, khi thị trường tài chính không lành mạnh, thì đối với mỗi phương án đầu tư (x,ϕ), đều có một phương án đầu tư khác, có cùng số vốn đầu tư ban đầu với phương án (x,ϕ) nhưng thu hoạch trung bình lại cao hơn. Vậy bài toán đầu tư tối ưu không có nghiệm. Do đó, bổ đề đã được chứng minh.□

Theo nguyên lý căn bản định giá phái sinh, thì tính chất lành mạnh của thị trường tài chính tương đương với sự tồn tại một độ đo xác suất trung hòa rủi ro. Một độ đo xác suất trung hòa rủi ro như vậy được tính qua nghiệm của bài toán đầu tư tối ưu qua mệnh đề sau:

Mệnh đề 2.

Gọi (x,ϕ^*) *là một nghiệm của bài toán đầu tư tối ưu với tổng vốn đầu tư ban đầu là x và hàm lợi ích U, thì độ đo Q xác định bởi*

$$Q(\omega) := \frac{P(\omega)U'(V_1(x,\phi^*)(\omega))}{E[U'(V_1(x,\phi^*))]}$$

là một độ đo xác suất trung hòa rủi ro. Trong đó $U'(x)$ *là đạo hàm của U theo x.*

Chứng minh:

Vì $Q(\omega) > 0$ với mọi $\omega \in \Omega$ và

$$Q(\Omega) = \sum_{i=1}^{k} Q(\omega_i) = \sum_{i=1}^{k} \frac{P(\omega_i)U'(V_1(x,\phi^*)(\omega_i))}{E[U'(V_1(x,\phi^*))]}$$

$$= \frac{1}{E[U'(V_1(x,\phi^*))]} \sum_{i=1}^{k} P(\omega_i)U'(V_1(x,\phi^*)(\omega_i))$$

$$= \frac{1}{E[U'(V_1(x,\phi^*))]} E[U'(V_1(x,\phi^*))]$$

$$= 1$$

Nên Q là một độ đo xác suất xác định trên Ω. Ta cần chứng minh Q thỏa thêm điều kiện sau: $E_Q[\Delta\hat{S}^j] = 0.$

Do tính chất của kỳ vọng, hàm hợp

$\phi \mapsto E[U(V_1(x,\phi))]$

với $\phi \in R^N$ là hàm khả vi và đạt cực trị tại ϕ^*. Do đó, đạo hàm riêng của hàm này triệt tiêu tại ϕ^*.

$$\frac{\partial}{\partial \phi_j} E[U(V_1(x,\phi))]|_{\phi=\phi^*} = 0 \tag{3}$$

Mặt khác, từ (1) và (2), ta có

$V_t(x,\phi) = B_1\hat{V}_t(x,\phi) = B_1(x + \phi^1\Delta\hat{S}^1 + ... + \phi^N\Delta\hat{S}^N)$,

do đó

$$E[U(V_1(x,\phi))] = E[U(B_1(x + \phi^1\Delta\hat{S}^1 + ... + \phi^N\Delta\hat{S}^N))]$$

Và từ (3), suy ra hệ phương trình sau: Với $j = 1,2,...,N$

$$B_1\sum_{i=1}^{k} P(\omega_i)U'(B_1(x + \phi^{*1}\Delta\hat{S}^1 + ... + \phi^{*N}\Delta\hat{S}^N)(\omega_i))\Delta\hat{S}^j(\omega_i) = 0$$

Do đó

$$\sum_{i=1}^{k} P(\omega_i)U'(B_1(x + \phi^{*1}\Delta\hat{S}^1 + ... + \phi^{*N}\Delta\hat{S}^N)(\omega_i))\Delta\hat{S}^j(\omega_i) = 0$$

Hay $\sum_{i=1}^{k} P(\omega_i)U'(V_1(x,\phi^*)(\omega_i))\Delta\hat{S}^j(\omega_i) = 0$ (4)

(vì $B_1 = 1 + r > 0$).

Suy ra

$$E_Q[\Delta\hat{S}^j] = \sum_{i=1}^{k} Q(\omega_i)\Delta\hat{S}^j(\omega_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{P(\omega_i)U'(V_1(x,\phi^*)(\omega_i))}{E[U'(V_1(x,\phi^*))]}\Delta\hat{S}^j(\omega_i)$$

$$= \frac{1}{E[U'(V_1(x,\phi^*))]}\sum_{i=1}^{k} P(\omega_i)U'(V_1(x,\phi^*)(\omega_i))\Delta\hat{S}^j(\omega_i)$$

$= 0$ (do (4)). □

Độ đo xác suất trung hòa rủi ro được xác định trong mệnh đề trên có thể dùng để tính giá quyền tài chính. Do đó hai vấn đề cốt lõi là tìm phương án đầu tư tối ưu và định giá quyền tài chính liên hệ chặc chẽ với nhau.

Trong thực tế, việc giải hệ phương trình trong (4) để tìm phương án đầu tư thông qua $\phi^i, i = 1,...,N$ không hề đơn giản. Một kỹ thuật để giải bài toán là dựa vào độ đo xác suất trung hòa rủi ro và phương pháp nhân tử Lagrange; ý tưởng của phương pháp này là phân tích bài toán đang xét thành hai bài toán con theo hai bước sau:

Bước 1: *Xác định cực đại V_1 của hàm $V \mapsto E[U(V)]$ trên tập hợp chấp nhận được các biến ngẫu nhiên V.*

Bước 2: *Tìm một phương án đầu tư mà nó có giá trị tại thời điể t = 1, bằng giá trị cực đại V_1 được xác định ở bước 1.*

Phương án đầu tư tìm được ở bước 2, chính là phương án tối ưu. Bài toán con ở bước 2 chính là bài toán tìm phương án bảo hộ, mà nó tương đương với việc giải hệ phương trình tuyến tính.

Trước tiên ta xét mô hình tài chính đầy đủ, nghĩa là trong mô hình chỉ tồn tại một độ đo xác suất gốc *P* và một độ đo xác suất trung hòa rủi ro *Q*.

Định nghĩa 3.

Tổng tài sản đạt được từ vốn ban đầu x > 0 được định nghĩa là tập

$$\widetilde{W}_x := \left\{ W \in R^k : E_Q[\frac{1}{B_1}W] = x \right\}$$

Khi $W \in \widetilde{W}_x$ thì có một phương án đầu tư (x,ϕ) sao cho $V_1(x,\phi) = W$.

Bài toán con ở bước 1 chính là bài toán tối ưu

Tìm cực đại $E[U(W)]$

Với ràng buộc $W \in \widetilde{W}_x$

Dùng phương pháp nhân tử Lagrange, với hàm Lagrange

$$L(W,\lambda) := E[U(W)] - \lambda(E_Q[\frac{1}{B_1}W] - x) \tag{5}$$

Một nghiệm của bài toán tối ưu có ràng buộc trên là nghiệm của hệ thức có được từ đạo hàm riêng của hàm Lagrange theo các biến $W_i \equiv W(\omega_i)$ và λ bằng 0. Trong biểu thức định nghĩa của hàm Lagrange (5), ta phải tính kỳ vọng theo hai độ đo khác nhau là *P* và *Q*; để tiện việc tính toán, ta định nghĩa một biến ngẫu nhiên mới

$$L(\omega) := \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \tag{6}$$

và gọi là *mật độ giá trạng thái*.

Lúc này hàm Lagrange có thể viết

$$L(W,\lambda) = \sum_{i=1}^{k} P(\omega_i)[U(W(\omega_i)) - \lambda(L(\omega_i)\frac{1}{B_1}W(\omega_i) - x)]$$

Đạo hàm riêng của hàm Lagrange theo các biến W_i bằng 0, cho ta

$$U'(W(\omega_i)) = \lambda\frac{L(\omega_i)}{B_1} \tag{7}$$

Kết hợp với độ đo xác suất Q xác định trong mệnh đề 2 thì

$$\lambda = E[B_1U'(W)] \tag{8}$$

Vì đạo hàm *U'(x)* của hàm lợi ích là tăng ngặt, do đó tồn tại hàm ngược *I(x)* của *U'(x)* sao cho *U'(I(x)) = x = I(U'(x)),* do đó từ (7) suy ra

$$W(\omega) = I(\lambda\frac{L(\omega)}{B_1}) \tag{9}$$

Phương trình trên cho ta nghiệm của bài toán tối ưu có ràng buộc khi ta biết chính xác giá trị của λ.

Công thức (9) không giúp ta tính được λ vì nó biểu diễn thông qua biến chưa biết *W*, tuy nhiên ta lại biết rằng *W* phải thỏa mãn điều kiện

$$E_Q[\frac{1}{B_1}W] = x \tag{10}$$

Thay *W* trong (9) vào (10), ta được

$$E_Q[\frac{1}{B_1}I(\lambda\frac{L}{B_1})] = x \tag{11}$$

Giải phương trình (11) ta tìm được λ, rồi thay vào (9) ta tìm được nghiệm của bài toán tối ưu có ràng buộc. Trong trường hợp hàm lợi ích *U(x)* trong định nghĩa 1. có thêm tính chất

(3) $\lim_{x\to 0} U'(x) = +\infty$ và $\lim_{x\to +\infty} U'(x) = 0$

thì nghiệm λ của phương trình (11) luôn tồn tại và duy nhất, vì lúc đó hàm $h(\lambda) := E[\frac{1}{B_1} I(\lambda \frac{L}{B_1})]$ là hàm giảm ngặt, liên tục và thỏa mãn điều kiện $\lim_{\lambda \to 0} h(\lambda) = +\infty$; $\lim_{\lambda \to +\infty} h(\lambda) = 0$.

Trong trường hợp mô hình tài chính không đầy đủ, có quá lắm là hữu hạn độ đo xác suất trung hòa rủi ro $Q_i, i = 1,2,...,l$ và một quyền tài chính *X* là đạt được nếu và chỉ nếu kỳ vọng $E_Q[\frac{1}{B_1} X]$ có cùng một giá trị đối với mọi độ đo xác suất trung hòa rủi ro $Q = Q_i, i = 1,2,...,l$; do đó ta có thể tổng quát hóa định nghĩa 3.

Định nghĩa 4.

Tập hợp tổng thu hoạch đạt được từ vốn đầu tư ban đầu x > 0 trong thị trường tài chính, có thể không đầy đủ, được định nghĩa là tập:

$$\widetilde{W}_x := \left\{ W \in R^k : E_Q[\frac{1}{B_1} W] = x, \quad \forall Q = Q_i ; i = 1,...,l \right\}$$

Bài toán tối ưu trên có thể viết lại như là bài toán tối ưu với hữu hạn ràng buộc:

Tìm cực đại $E[U(W)]$

Với ràng buộc $E_{Q_i}[\frac{1}{B_1} W] = x$, *với i =1, 2,…, l.*

và hàm Lagrange tương ứng

$$L(W, \lambda) := E[U(W)] - \sum_{i=1}^{l} \lambda_i (E[\frac{L_i}{B_1} W] - x)$$

trong đó $L_i := \frac{Q_i}{P}$ và $\lambda := (\lambda_1, ..., \lambda_l)$ là nghiệm của bài toán đầu tư tối ưu ở bước 1

$$W(\omega) = I(\sum_{i=1}^{l} \lambda_i \frac{L_i(\omega)}{B_1})$$

Để xác định nhân tử Lagrange λ ta giải hệ gồm *l* phương trình

$$E[L_i I(\frac{\lambda_1 L_1 + ... + \lambda_l L_l}{B_1})] = x$$

2. Phân tích trung bình phương sai của phương án đầu tư

Khi NĐT phải chọn một trong hai phương án đầu tư mà chúng có cùng trung bình lợi tức, thì NĐT sẽ chọn phương án nào có phương sai bé hơn, nghĩa là ít rủi ro hơn. Vậy NĐT sẽ giải bài toán trung bình phương sai sau:

Bài toán 1.

Tìm cực tiểu $Var[R]$

Với ràng buộc $E[R] = \rho$

trong đó *R* là lợi tức của phương án đầu tư được xác định bởi:

$$R \equiv R(x,\phi) := \frac{V_1(x,\phi) - V_0(x,\phi)}{V_0(x,\phi)}$$

Khái niệm *phí rủi ro* (*risk premium*), ký hiệu $\overline{R} - r$, là khái niệm quan trọng trong lãnh vực đầu tư, được xác định qua bổ đề sau:

Bổ đề 1.

Phí rủi ro của phương án đầu tư có lợi tức R, trong thị trường tài chính mà lãi suất của tài khoản tín dụng cố định r, được xác định bởi

$$\overline{R} - r = -Cov(R, L) \tag{12}$$

Trong đó L là mật độ giá trạng thái và Cov, viết tắc của Covarian, chỉ hiệp phương sai.

Chứng minh:

Xét một độ đo xác suất trung hòa rủi ro *Q* cố định trong thị trường tài chính, từ khái niệm giá chứng khoán chiết khấu, ta có:

$$\begin{aligned}\hat{S}_1^i - \hat{S}_0^i &= \frac{S_1^i - B_1 S_0^i}{B_1}\\ &= \frac{(1+R^i)S_0^i - (1+R^0)S_0^i}{1+R^0}\\ &= S_0^i\left(\frac{R^i - R^0}{1+R^0}\right)\end{aligned}$$

Lấy kỳ vọng hai vế theo độ đo xác suất Q, thì vế trái bằng 0, nên

$$0 = E_Q\left[S_0^i\left(\frac{R^i - R^0}{1+R^0}\right)\right]$$

$$= \frac{S_0^i}{1+R^0} E_Q[R^i - R^0]$$

Suy ra $E_Q[R^i] = R^0 = r$

Do đó, $Covarian(R^i, L) \equiv Cov(R^i, L) = E[R^i L] - E[R^i]E[L]$

$$= E_Q[R^i] - E[R^i]$$

$$= r - \overline{R}^i$$

trong đó $\overline{R}^i := E[R^i]$ và chú ý rằng do định nghĩa của mât độ giá trạng thái *L*, thì

E[L] = 1.

Mặt khác từ định nghĩa của V_1 và *R*, thì

$$R = \frac{\phi_0}{V_0} r + \sum_{i=1}^{N} \frac{\phi^i S_0^i}{V_0} R^i$$

Do đó, $\overline{R} - r = -Cov(R, L)$

trong đó, $\overline{R} := E[R]$. Vậy ta có điều cần chứng minh.☐

Bổ đề 2.

*Cho a, b là hai số thực và $b \neq 0$. Giả sử quyền tài chính a + b L được sinh bởi một phương án đầu tư bảo hộ nào đó mà nó có lợi tức $\widetilde{R}$, thì phí rủi ro của phương án đầu tư bất kỳ có lợi tức R, tỷ lệ với phí rủi ro của phương án đầu tư có lợi tức $\widetilde{R}$, theo hằng số tỷ lệ là **beta**, với beta := $\dfrac{Cov(R,\widetilde{R})}{Var(\widetilde{R})}$, hay nói cách khác, phí rủi ro thay đổi tỷ lệ với beta của nó qua phép biến đổi tuyến tính theo mật độ giá trạng thái:*

$$\frac{\overline{R} - r}{\overline{\widetilde{R}} - r} = \frac{Cov(R,\widetilde{R})}{Var(\widetilde{R})} \tag{13}$$

Chứng minh:

Xét một quyền tài chính mua bán được có dạng đặt biệt *a* + *b L*, trong đó *a, b* là hằng số và *b* khác 0, khi đó có một phương án đầu tư (x,ϕ) sao cho quá trình giá của nó $\widetilde{V}_t \equiv \widetilde{V}_t(x,\phi)$ với t = 0, 1 thỏa mãn

$$\widetilde{V}_1 = a + bL$$

Gọi $\widetilde{R}$ là lợi tức tương ứng với phương án này thì

$$\widetilde{V}_0(1+\widetilde{R}) = a + bL$$

Phương trình này có nghiệm *L* là

$$L = \frac{\widetilde{V}_0(1+\widetilde{R}) - a}{b}$$

Đối với một phương án đầu tư bất kỳ có lợi tức *R* thì

$$\begin{aligned} Cov(R,L) &= Cov(R, \frac{\widetilde{V}_0(1+\widetilde{R}) - a}{b}) \\ &= Cov(R, \frac{\widetilde{V}_0\widetilde{R}}{b} - \frac{a\widetilde{V}_0}{b}) \\ &= Cov(R, \frac{\widetilde{V}_0\widetilde{R}}{b}) \\ &= \frac{\widetilde{V}_0}{b} Cov(R,\widetilde{R}) \end{aligned}$$

Do đó (12) trở thành

$$\overline{R} - r = -\frac{\widetilde{V}_0}{b} Cov(R, \widetilde{R}) \qquad (14)$$

Trường hợp riêng khi $R = \widetilde{R}$ thì (14) trở thành

$$\overline{\widetilde{R}} - r = -\frac{\widetilde{V}_0}{b} Cov(\widetilde{R}, \widetilde{R}) = -\frac{\widetilde{V}_0}{b} Var(\widetilde{R})$$

Hay $-\frac{\widetilde{V}_0}{b} = \frac{\overline{\widetilde{R}} - r}{Var(\widetilde{R})}$ thay vào (14), suy ra

$\frac{\overline{R} - r}{\overline{\widetilde{R}} - r} = \frac{Cov(R, \widetilde{R})}{Var(\widetilde{R})}$, điều cần chứng minh □

Để có được kết quả cổ điển mà người ta thường gọi là *mô hình định giá tài sản tư bản,* ta chuyển bài toán tìm cực tiểu phương sai lợi tức sang bài toán tối ưu sau:

Bài toán 2.

Tìm cực tiểu $Var(V_1)$

Với ràng buộc $E[V_1] = x.(1+\rho)$ *và* $V_0 = x$

Ràng buộc đầu của bài toán 2 là đẳng thức lấy giá trị của quá trình giá tại thời điểm đáo hạn t = 1 của phương án đầu tư được bổ sung tổng vốn ban đầu x, mà kỳ vọng của nó bằng $x.(1+\rho)$. Điều kiện ràng buộc $V_0 = x$ thì tương đương với $E_Q[\frac{1}{B_1} V_1] = x$. Bài toán 1 thì tương đương với bài toán 2; thật vậy, nếu $\hat{V}_1$ là một nghiệm của bài toán 2, thì $\hat{R} = \frac{\hat{V}_1 - x}{x}$ thỏa mãn ràng buộc của bài toán 1, hơn nữa với mọi phương án mà lợi tức *R* thỏa mãn ràng buộc của bài toán 1 thì $\hat{V}_1 = x.(1+R)$ thỏa mãn $E[\hat{V}_1] = x.(1+\rho)$, nghĩa là thỏa mãn ràng buộc của bài toán 2,

Do đó $Var(\hat{R}) = \frac{1}{x^2} Var(\hat{V}_1) \leq \frac{1}{x^2} Var(V_1) = Var(R)$, điều này chứng tỏ là nghiệm của bài toán 1, ngược lại nếu $\hat{R}$ là nghiệm tối ưu của bài toán 1, thì dễ thấy $\hat{V}_1 = x.(1+\hat{R})$ là nghiệm tối ưu của bài toán 2. Vậy bài toán 1 và 2 là tương đương nhau.

Để giải bài toán 2 bằng phương pháp nhân tử Lagrange, ta đưa vào tham số β và tìm cực tiểu hàm mục tiêu $Var(V_1) - \beta E[V_1]$ với ràng buộc $V_0 = x$, nhưng

$Var(V_1) = E[V_1^2] - (E[V_1])^2$, nên hàm mục tiêu sẽ được xét dưới dạng $E[\frac{1}{2} V_1^2 - \beta V_1]$.

Vậy ta xét bài toán tối ưu sau:

Bài toán 3.

Tìm giá trị cực đại của $E[-\frac{1}{2}V_1^2 + \beta V_1]$

Với ràng buộc $V_0 = x$.

Hàm $U(x) := -\frac{1}{2}x^2 + \beta x$ không phải là hàm lợi ích đơn điệu ngặt theo định nghĩa 1, tuy nhiên nó là hàm lõm vì đạo hàm bậc 2 âm. Vì $U'(x) = -x + \beta$ nên hàm ngược có thể đồng nhất $I(x) = -x + \beta$. Giải phương trình (11) ta tìm được nhân tử Lagrange

$$\lambda = -\frac{(x.B_1 - \beta)B_1}{E_Q[L]}$$

Từ công thức (9), ta tìm được nghiệm tối ưu, ký hiệu là $\hat{V}_1$ (thay cho W trong (9))

$$\hat{V}_1 = \frac{\beta}{E_Q[L]}(E_Q[L] - L) + x.B_1 \frac{L}{E_Q[L]} \tag{15}$$

Do đó, $E[\hat{V}_1] = \frac{\beta}{E_Q[L]}(E_Q[L] - 1) + x.B_1 \frac{1}{E_Q[L]}$ (16)

Bây giờ ta muốn $\hat{V}_1$ thỏa mãn điều kiện ràng buộc của bài toán 2 nên

$$E[\hat{V}_1] = x.(1+\rho) \tag{17}$$

Khi $P \neq Q$ thì $E_Q[L] > 1$ và từ (16), (17) ta tìm được nghiệm β

$$\beta = \frac{x.(E_Q[L](1+\rho) - B_1)}{E_Q[L] - 1} \tag{18}$$

Chú ý rằng β là hàm tăng ngặt theo ρ và bằng $x.(1+r) \equiv x.B_1$ khi $\rho = r$. Hơn nữa khi $\rho = r$ thì nghiệm tối ưu của bài toán 3 sẽ là $\hat{V}_1 = x.(1+r)$, là hằng số đã biết.

Với sự chọn lựa giá trị này của β trong (18) thì nghiệm $\hat{V}_1$ của bài toán 3 sẽ thỏa mãn ràng buộc của bài toán 2. Nếu V_1 là một biến ngẫu nhiên nào đó mà nó thỏa mãn ràng buộc của bài toán 2, thì

$$E[V_1] = x.(1+\rho) = E[\hat{V}_1]$$

Và do đó, $E[-\frac{1}{2}\hat{V}_1^2 + \beta\hat{V}_1] \geq E[-\frac{1}{2}V_1^2 + \beta V_1]$

$$\Leftrightarrow\ E[\frac{1}{2}\hat{V}_1^2] \leq E[\frac{1}{2}V_1^2]$$

$$\Leftrightarrow\ Var[\hat{V}_1] \leq Var[V_1]$$

Mặt khác, bằng lý lẽ ngược lại với ý trên, ta thấy nghiệm của bài toán 3, cũng là nghiệm của bài toán 2; do đó hai bài toán này là tương nhau với β và ρ xác định như trên.

Bổ đề 3.

Gọi $\hat{R}$ là lợi tức của một phương án đầu tư có phương sai cực tiểu so với tất cả các phương án đầu tư mà lợi tức của nó có cùng kỳ vọng ρ, thì $\hat{R}$ là hàm tuyến tính theo mật độ giá trạng thái L, cụ thể hơn $\hat{R}$ xác định bởi

$$\hat{R} = \frac{\rho E_Q[L]-r}{E_Q[L]-1} - \frac{(\rho-r)L}{E_Q[L]-1} \tag{19}$$

Chứng minh:

Với β xác định trong (18), thay vào nghiệm tối ưu $\hat{V}_1$ trong (15), ta có

$$\begin{aligned}
\hat{V}_1 &= \frac{x[(1+\rho)E_Q[L]-B_1]}{(E_Q[L]-1)E_Q[L]}(E_Q[L]-L) + xB_1\frac{L}{E_Q[L]} \\
&= \frac{x[(1+\rho)E_Q[L]-(1+r)]}{(E_Q[L]-1)E_Q[L]}(E_Q[L]-L) + x(1+r)\frac{L}{E_Q[L]} \\
&= \left(\frac{x(1+r)}{E_Q[L]-1} + \frac{x(\rho-r)}{E_Q[L]-1} - \frac{x(1+r)}{(E_Q[L]-1)E_Q[L]}\right)(E_Q[L]-L) + x(1+r)\frac{L}{E_Q[L]} \\
&= \left(\frac{x(1+r)E_Q[L]-x(1+r)}{(E_Q[L]-1)E_Q[L]} + \frac{x(\rho-r)}{E_Q[L]-1}\right)(E_Q[L]-L) + x(1+r)\frac{L}{E_Q[L]} \\
&= \left(\frac{x(1+r)}{E_Q[L]} + \frac{x(\rho-r)}{E_Q[L]-1}\right)(E_Q[L]-L) + x(1+r)\frac{L}{E_Q[L]} \\
&= \left(x(1+r) + \frac{x(1+r)L}{E_Q[L]} + \frac{x(\rho-r)}{E_Q[L]-1}\right)(E_Q[L]-L) + x(1+r)\frac{L}{E_Q[L]} \\
&= x(1+r) + \frac{x(\rho-r)}{E_Q[L]-1}(E_Q[L]-L)
\end{aligned}$$

Sự tương đương của bài toán 2 với bài toán 1 cho ta

$$\begin{aligned}
\hat{R} = \frac{\hat{V}_1 - x}{x} &= r + \frac{x(\rho-r)}{E_Q[L]-1})(E_Q[L]-L) \\
&= \frac{r(E_Q[L]-1)}{E_Q[L]-1} + \frac{\rho E_Q[L]-rE_Q[L]}{E_Q[L]-1} - \frac{(\rho-r)L}{E_Q[L]-1} \\
&= \frac{\rho E_Q[L]-r}{E_Q[L]-1} - \frac{(\rho-r)L}{E_Q[L]-1}
\end{aligned}$$

Đây là điều cần chứng minh.☐

3. Mô hình định giá tài sản tư bản

Điểm đáng quan tâm của bổ đề 3 là nghiệm $\hat{R}$ của bài toán trung bình phương sai là một hàm tuyến tính theo *L*, mật độ giá trạng thái. Công thức (13) cũng cho ta hệ thức liên lạc giữa kỳ vọng lợi tức của một phương án bất kỳ với kỳ vọng lợi tức của một phương án phụ thuộc tuyến tính vào mật độ giá trạng thái. Rõ ràng nghiệm $\hat{R}$ của bài toán 1, về trung bình phương sai, là đạt được. Định lý có tên Mô hình định giá tài sản tư bản sau là hệ quả trực tiếp của các bổ đề trên.

Định lý.

Nếu $\hat{R}$ là một nghiệm của bài toán 1 về trung bình phương sai với $\rho \geq r$ và nếu R là lợi tức của một phương án bất kỳ, thì

$$E[R] - r = \frac{Cov(R, \hat{R})}{Var(\hat{R})}(E[\hat{R}] - r) \tag{20}$$

Hệ thức trên quan trọng ở chỗ, trong giới các nhà đầu tư dựa vào phân tích trung bình phương sai, thì thường tồn tại phương án mà nó có thể được xem như là nghiệm của bài toán 1 (chẳng hạn, như chỉ số chứng khoán), và từ đó có thể ước lượng được kỳ vọng lợi tức của một phương án bất kỳ thông qua hệ thức (20).

Hệ quả*. Giả sử $\hat{R}$ là một nghiệm của bài toán trung bình phương sai 1 với tham số $\rho \geq r$ và tổng vốn đầu tư ban đầu là x. Lấy $\widetilde{\rho} > r$ và $\widetilde{\rho} \neq \rho$ là một tham số khác, thì*

$$\widetilde{R} := \lambda r + (1-\lambda)\hat{R} \quad với \quad \lambda := \frac{\rho - \widetilde{\rho}}{\rho - r}$$

Là một nghiệm của bài toán trung bình phương sai 1, với tham số $\widetilde{\rho}$ và tổng vốn đầu tư ban đầu x.

Hệ quả được kiểm chứng dễ dàng vì $E[\widetilde{R}] = \lambda r + (1-\lambda)E[\hat{R}] = \lambda r + (1-\lambda)\rho = \widetilde{\rho}$ và với một phương án đầu tư bất kỳ R thỏa mãn $E[R] = \widetilde{\rho}$ thì $Var(\widetilde{R}) \leq Var(R)$.

Hệ quả quan trọng của định lý chỉ ra rằng, ta chỉ cần tìm nghiệm của bài toán trung bình phương sai đối với bài toán có tham số ρ rồi suy ra các nghiệm khác đối với bài toán có tham số khác bằng cách đầu tư theo tổ hợp lồi của trái phiếu không rủi ro và số lượng cổ phiếu tương ứng với nghiệm cố định của bài toán trung bình phương sai này. Nguyên lý này được gọi là ***nguyên lý quỹ hỗ tương đầu tư (Mutual Fund Principle)***, được phát biểu qua mệnh đề sau:

Mệnh đề*.*

Giả sử ta cố định một phương án đầu tư mà lợi tức của nó là nghiệm của bài toán 1 về trung bình phương sai, tương ứng với một tham số lợi tức trung bình ρ. Thì nghiệm của bài toán trung bình phương sai tương ứng với một tham số lợi tức trung bình khác, có thể tìm được bằng một phương án đầu tư bao gồm sự đầu tư vào tài *khoản tiết kiệm ngân hàng (hay trái phiếu không rủi ro) và phương án đầu tư cố định ban đầu.*

Để làm rõ hơn từ *mô hình định giá tài sản tư bản*, ta xét một quyền tài chính có giá X tại thời điểm đáo hạn $t = 1$, mà ta muốn *định giá của quyền tài chính này* tại thời điểm $t = 0$. Giả sử lợi tức $\hat{R}$ là nghiệm của bài toán 1 về trung bình phương sai. Theo định nghĩa, lợi tức của quyền tài chính X là $R := \frac{X - x}{x}$, thay vào (20), ta được

$$\frac{E[X] - x}{x} - r = \frac{Cov(X, \hat{R})}{Var(\hat{R})}(E[\hat{R}] - r)$$

Giải phương trình này ta được nghiệm x, chính là của quyền tài chính tại thời điểm $t = 0$:

$$x = \frac{E[X]}{1 + r + \frac{Cov(X, \hat{R})}{Var(\hat{R})}(E[\hat{R}] - r)}$$

Vậy từ $\hat{R}$ người ta có thể xác định giá của một tài sản tư bản X.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Văn Hữu, Vương Quân Hoàng (2007), *Các phương pháp toán học trong tài chính*, Nxb Đại học Quốc gia Hà Nội.
2. Nguyễn Chí Long (2011), "Bổ đề Fakas và áp dụng trong thị trường tài chính", *Tạp chí Khoa học ĐHSP TPHCM*, 27(61), tr. 41-53.
3. Nguyễn Chí Long (2011), "Định giá tài sản trong mô hình nhị thức", Số chuyên đề của ĐH Sài Gòn: *Hội thảo Khoa học Quốc tế Giải tích và Toán Ứng dụng*, ĐHSG TPHCM, tr. 513 – 525.
4. Nguyễn Chí Long (2010), "Nguyên lý căn bản định giá tài sản trong thị trường tài chính", *Tạp chí Khoa học ĐHSP TPHCM*, 21(55), tr. 38 – 51.
5. Nguyễn Chí Long (2008), *Xác suất thống kê và quá trình ngẫu nhiên*, Nxb Đại học Quốc gia TPHCM.
6. Trần Hùng Thao (2004), *Nhập môn toán học tài chính,* Nxb KHKT Hà Nội.
7. Robert J. Elliott and P. E. Kopp (2005), *Mathematics of Financial Markets,* Springe Finance, Second Edition.
8. Hans Foellmer and Alexander Schied (2002), *An Introduction in Discrete time,* Walter de Gruyter.
9. G. Pennacchi (2008), *Theory of Asset Pricing,* Pearson Education, Increase affect.
10. Pliska (1997), *Introduction to Mathematical Finance,* Blackwell Publishing.

(Ngày Tòa soạn nhận được bài: 23-3-2011; ngày chấp nhận đăng: 16-8-2011)