CẤU TRÚC TẬP NGHIỆM CỦA MỘT LỚP BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN

NGUYỄN BÍCH HUY*

TÓM TẮT

Trong bài báo chúng tôi sử dụng phương pháp bậc tôpô để nghiên cứu một lớp bất đẳng thức biến phân và chứng minh rằng tập nghiệm của nó là nhánh liên tục không bị chặn, xuất phát từ θ.

ABSTRACT

Structure of the solution set for a class of variational inequalities

In the present paper we use the topological degree method to study a class of variational inequalities and prove that its solution set is an unbounded continuous branch, emanating from θ.

1. Mở đầu

Bậc tôpô là một công cụ mạnh và hữu hiệu để nghiên cứu sự tồn tại nghiệm và cấu trúc tập nghiệm của phương trình phi tuyến tổng quát. Phương pháp bậc tôpô đã được áp dụng cho các phương trình vi phân từ những năm 1930 và được các nhà toán học quan tâm nghiên cứu để hoàn thiện và mở rộng cho đến tận ngày nay. Trong khi đó, phương pháp bậc tôpô lại chỉ được áp dụng cho các bất đẳng thức vi phân khá muộn, vào những năm 1980 [4,5] và cho đến nay cũng mới chỉ ứng dụng cho một số lớp tương đối hẹp các bất đẳng thức. Việc hoàn thiện và mở rộng phạm vi ứng dụng của phương pháp bậc tôpô cho các bất đẳng thức vi phân là cần thiết và hứa hẹn nhiều kết quả thú vị.

Trong bài báo này, chúng tôi sẽ dùng một kết quả của phương pháp bậc tôpô để nghiên cứu cấu trúc tập nghiệm của bất đẳng thức biến phân sau:

$$(1)\begin{cases} u\in K,\ f(\lambda,x,u)\in L^1(\Omega), \quad uf(\lambda,x,u)\in L^1(\Omega) \\ \langle Au, v-u\rangle \geq \int\limits_\Omega f(\lambda,x,u)(v-u)dx \qquad \forall v\in K\cap L^\infty(\Omega)\end{cases}$$

trong đó: $\Omega\subset {}^N$ là miền mở, có biên trơn, $Au=\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)$, $K=\left\{u\in W_0^{1,p}(\Omega): u\geq 0\right\}$, $f(\lambda,x,u)=h(\lambda,x,u)-g(x,u), \lambda\in[0,\infty)$ là tham số, h,g là các hàm Caratheodory. Trong [3] chúng tôi đã xét (1) khi f không phụ thuộc tham số λ, g,h là các hàm tăng và đã dùng một định lí điểm bất động của ánh xạ tăng để chứng minh bài toán có nghiệm. Ở đây, chúng tôi sẽ chỉ ra rằng với các giả thiết thích hợp thì tập nghiệm của (1) là nhánh liên tục, không bị chặn xuất phát từ θ.

* PGS TS, Khoa Toán – Tin học Trường Đại học Sư phạm TP HCM

2. Các khái niệm và kết quả bổ trợ

Phương trình trong không gian có thứ tự

Cho $(X, \|.\|)$ là không gian Banach với thứ tự "$\leq$" sinh bởi nón $K \subset X$. Cho ánh xạ $F: \;_+ \times K \to K$, ta xét bài toán tìm cặp $(\lambda, x) \in \;_+ \times K$ sao cho

$x = F(\lambda, x)$ (2)

Ta kí hiệu $S = \{x \in K \setminus \{\theta\} : \exists \lambda \geq 0, x = F(\lambda, x)\}$.

Định nghĩa.

Ta nói S là nhánh liên tục, không bị chặn xuất phát từ θ nếu với mọi tập mở, bị chặn G chứa θ thì $S \bigcap \partial G$ khác rỗng.

***Định lí A* [2]**

Giả sử $F: \;_+ \times K \to K$ là hoàn toàn liên tục và tồn tại ánh xạ tăng $G: K \to K$, hàm $\varphi: \;_+ \to \;_+$ sao cho

$F(\lambda, x) \geq G(\varphi(\lambda).x) \qquad \forall (\lambda, x) \in \;_+ \times K$

hơn nữa, giả sử tồn tại phần tử $u_0 \in K \setminus \{\theta\}$ và các số dương a, b sao cho:

i) $G(tu_0) \geq atu_0 \;\; \forall t \in [0, b]$

ii) $\lim\limits_{\lambda \to \infty} \varphi(\lambda) = \infty, \qquad \lim\limits_{t \to \infty} \| G(tu_0) \|_0 = \infty$, trong đó $\|.\|_0$ là một chuẩn trên X có tính chất

$\| x \|_0 \leq c \| x \| \;\; \forall x \in X; \quad \theta \leq x \leq y \Rightarrow \| x \|_0 \leq \| y \|_0$

Khi đó tập nghiệm S của phương trình (1) là nhánh liên tục không bị chặn xuất phát từ θ.

Về một bất đẳng thức biến phân bổ trợ

Ta xét các không gian $L^p(\Omega), W_0^{1,p}(\Omega)$ thông thường với chuẩn kí hiệu là $\|.\|_p, \|.\|$, $W_0^{-1,p'}(\Omega)$ là không gian liên hợp của $W_0^{1,p}(\Omega)$ với $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$, $\Omega \subset \;^N$ là miền bị chặn, có biên trơn , $p < N$. Dưới đây nếu không nói rõ thêm thì ta hiểu tích phân lấy trên Ω.

***Định lí B* [1]**

Cho $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$, μ là độ đo Radon dương, $h \in L^1(\Omega)$ thỏa mãn:

$\mu + h \in W_0^{-1,p'}(\Omega),\; u_0 \geq 0,\; h.u_0 \geq v \in L^1(\Omega)$.

Khi đó $h.u_0 \in L^1(\Omega),\; u_0 \in L^1(\Omega, \mu)$ và ta có

$\langle \mu + h, u_0 \rangle = \int u_0 d\mu + \int hu_0 dx.$

***Định lí C* [1]**

Giả sử $K = \{v \in W_0^{1,p}(\Omega) : v \geq 0\}, z \in W_0^{-1,p'}(\Omega)$ và $g: \Omega \times \quad \to \quad$ là hàm Caratheodory thỏa mãn các điều kiện sau:

i) $g(x, 0) = 0,\; g(x, .)$ là hàm tăng,

ii) $\forall t > 0$ tồn tại hàm $h_t \in L^1(\Omega)$ sao cho $\sup\limits_{|u|\le t} |g(x,u)| \le h_t(x)$.

Khi đó bài toán

$$(3)\begin{cases} u \in K,\ g(x,u) \in L^1(\Omega), \quad ug(x,u) \in L^1(\Omega) \\ \langle Au - z, v - u\rangle + \int g(x,u)(v-u)dx \ge 0 \qquad \forall v \in K \cap L^\infty(\Omega) \end{cases}$$

có duy nhất nghiệm u thỏa mãn đẳng thức

$$\langle Au - z, v - u\rangle + \int g(x,u)udx = 0 \qquad (4)$$

Hơn nữa, nếu u_1, u_2 là nghiệm của (3) với z thay bởi z_1, z_2 thì $u_1 g(x,u_2) \in L^1(\Omega)$, $u_2 g(x,u_1) \in L^1(\Omega)$ và ta có

$$\langle Au_1 - Au_2, u_1 - u_2\rangle + \int [g(x,u_1) - g(x,u_2)](u_1 - u_2)dx \le \langle z_1 - z_2, u_1 - u_2\rangle. \quad (5)$$

Bổ đề 1.

Giả sử u là nghiệm của (3) và $v \in K$. Khi đó ta có

1) $\langle Au - z, (tu - v)^+\rangle + \int g(x,u)(tu - v)^+ dx \le 0,\ \forall t \ge 0,$

2) $\langle Au - z, (tv - u)^+\rangle + \int g(x,u)(tv - u)^+ dx \ge 0$ nếu $vg(x,u) \in L^1(\Omega)$,

3) $\langle Au - z, v - u\rangle + \int g(x,u)(v - u)dx \ge 0$ nếu $vg(x,u) \in L^1(\Omega)$.

Chứng minh:

Ta sẽ áp dụng định lí C cho $\mu = Au - z + g(x,u)$, $h = -g(x,u)$ còn u_0 được chọn thích hợp cho mỗi trường hợp.

1) Chọn $u_0 = tu - (tu - v)^+ = \min\{tu, v\}$ ta có

$hu_0 = -g(x,u)\min\{tu, v\} \ge -g(x,u)tu \in L^1(\Omega)$.

Áp dụng định lí C ta được

$$\langle Au - z, tu - (tu - v)^+\rangle + \int g(x,u)\left[tu - (tu - v)^+\right]dx \ge 0. \qquad (6)$$

Nhân (4) với t rồi trừ cho (5) ta có đpcm.

2) Chọn $u_0 = u + (tv - u)^+$ và đặt $\Omega_1 = \{u \ge tv\}$, $\Omega_2 = \{u < tv\}$ ta có $hu_0 = -g(x,u)u$ trên Ω_1, $hu_0 = -g(x,u)tv$ trên Ω_2. Do đó hu_0 lớn hơn một hàm thuộc $L^1(\Omega)$. Áp dụng định lí B ta có

$$\langle Au - z, u + (tv - u)^+\rangle + \int g(x,u)\left[u + (tv - u)^+\right]dx \ge 0.$$

Kết hợp với (4) ta có đpcm.

3) Chọn $u_0 = v$ và lí luận tương tự hai trường hợp trên.

Bổ đề 2.

1) Giả sử $z_1 \le z_2$ và u_1, u_2 là nghiệm của (3) với z thay bằng z_1, z_2. Khi đó $u_1 \le u_2$.

2) Giả sử các hàm $g_1, g_2 : \Omega \times \quad \to \quad$ có các tính chất như hàm g nói trong định lí C và $g_1(x,u) \ge g_2(x,u)\ \forall (x,u) \in \Omega \times \quad$. Gọi u_i là nghiệm của (3) với g thay bằng g_i thì ta có $u_1 \le u_2$.

Chứng minh:

1) Áp dụng bổ đề 1 ta có

$$\left\langle Au_1 - z_1, (u_1-u_2)^+ \right\rangle + \int g(x,u_1)(u_1-u_2)^+ dx \le 0,$$

$$\left\langle Au_2 - z_2, (u_1-u_2)^+ \right\rangle + \int g(x,u_2)(u_1-u_2)^+ dx \ge 0.$$

Từ đây ta có

$$\left\langle Au_1 - Au_2, (u_1-u_2)^+ \right\rangle + \int_{\Omega_1} \left[g(x,u_1) - g(x,u_2)\right](u_1-u_2)dx + \left\langle z_2 - z_1, (u_1-u_2)^+ \right\rangle \le 0, \quad (7)$$

trong đó $\Omega_1 = \{u_1 \ge u_2\}$. Các số hạng thứ 2 và thứ 3 trong (7) không âm nên $\left\langle Au_1 - Au_2, (u_1-u_2)^+ \right\rangle \le 0$. Do đó $(u_1-u_2)^+ = 0$ hay $u_1 \le u_2$ hkn.

2) Áp dụng bổ đề 1 ta có

$$\left\langle Au_1 - z, (u_1-u_2)^+ \right\rangle + \int g_1(x,u_1)(u_1-u_2)^+ dx \le 0,$$

$$\left\langle Au_2 - z, (u_1-u_2)^+ \right\rangle + \int g_2(x,u_2)(u_1-u_2)^+ dx \ge 0.$$

Do đó

$$\left\langle Au_1 - Au_2, (u_1-u_2)^+ \right\rangle + \int_{\Omega_1} \left[g_1(x,u_1) - g_2(x,u_2)\right](u_1-u_2)dx \le 0,$$

với $\Omega_1 = \{u_1 \ge u_2\}$. Trên Ω_1 ta có $g_1(x,u_1) \ge g_1(x,u_2) \ge g_2(x,u_2)$ nên ta suy ra $\left\langle Au_1 - Au_2, (u_1-u_2)^+ \right\rangle \le 0$ và do đó $u_1 \le u_2$ hkn.

Bổ đề 3.

Gọi P là ánh xạ đặt tương ứng $z \in W^{-1,p'}(\Omega)$ với nghiệm u của (3). Thế thì P là ánh xạ từ $L^{(p^*)'}(\Omega)$ vào $W_0^{1,p}(\Omega)$ và có các tính chất sau:

1) P là ánh xạ tăng, nghĩa là nếu $z_1 \le z_2$ thì $P(z_1) \le P(z_2)$

2) Nếu M là tập bị chặn thì $P(M)$ là tập bị chặn.

3) P là ánh xạ liên tục nếu $p \ge 2$ hoặc g thỏa mãn thêm điều kiện

$$g(x,u) \le a(x) + b.u^{\beta}, \quad (8)$$

với $a(x) \in L^{(p^*)'}(\Omega)$ và $\beta < p^* - 1$.

Chứng minh:

Ta có $W_0^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ nên $L^{(p^*)'}(\Omega) \subset W^{-1,p'}(\Omega)$.

1) Suy ra từ bổ đề 2.

2) Đặt $u = P(z)$. Do $ug(x,u) \ge 0$ nên từ (4) và bất đẳng thức Holder ta có:

$$\| u \|_{1,p}^p = \left\langle Au, u \right\rangle \le \| u \|_{p^*} . \| z \|_{(p^*)'} \le C . \| u \|_{1,p} . \| z \|_{(p^*)'} .$$

Từ đây ta có điều khẳng định.

3) Khi $p \geq 2$ ta có

$C.\| P(z_1) - P(z_2) \|^p \leq \langle A(P(z_1)) - A(P(z_2)), P(z_1) - P(z_2) \rangle$.

Sử dụng (5) và chú ý $g(x,u)$ là hàm tăng theo biến u, ta có

$\| P(z_1) - P(z_2) \|^p \leq C.\| P(z_1) - P(z_2) \| . \| z_1 - z_2 \|_{(p^*)'}$,

điều này chứng minh tính liên tục của P.

Bây giờ ta xét trường hợp hàm g thỏa mãn (8). Để chứng minh P liên tục tại điểm z ta chỉ cần chứng minh nếu $\lim z_n = z$ trong $L^{(p^*)'}(\Omega)$ thì dãy $u_n = P(z_n)$ có dãy con hội tụ về $u = P(z)$ trong $W_0^{1,p}(\Omega)$. Thật vậy, dãy $\{u_n\}$ bị chặn trong $W_0^{1,p}(\Omega)$ nên có dãy con mà ta vẫn kí hiệu là $\{u_n\}$ sao cho:

$u_n \to u$ yếu trong $W_0^{1,p}(\Omega)$ và hkn,

$u_n \to u$ trong L^γ với $\gamma < p^*$.

Chọn $\gamma = \beta.(p^*)'$ thì do $\beta < p^* - 1$ ta có $\gamma < p^*$. Từ (8) và định lí Krasnoselskii về tính liên tục của ánh xạ Nemyskii $u \mapsto g(x,u)$ ta có

$\lim\limits_{n\to\infty} g(x,u_n) = g(x,u)$ trong $L^{(p^*)'}$ và $W^{-1,p'}$. (9)

Ta có

$$\left(\| u_n \|^{p-1} - \| u \|^{p-1}\right)\left(\| u_n \| - \| u \|\right) \leq \langle Au_n - Au, u_n - u \rangle$$
$$= \langle Au_n - z_n, u_n - u \rangle + \langle z_n, u_n - u \rangle - \langle Au, u_n - u \rangle$$
$$\leq -\int g(x,u_n)(u_n - u)dx + \langle z_n, u_n - u \rangle - \langle Au, u_n - u \rangle. \quad (10)$$

Trong (10) ta có $\lim\limits_{n\to\infty} \int g(x,u_n)(u_n - u)dx = 0$ do (9) và $u_n \to u$ yếu, $\lim\limits_{n\to\infty} \langle Au, u_n - u \rangle = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \langle z_n, u_n - u \rangle = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\langle z_n - z, u_n - u \rangle + \langle z, u_n - u \rangle \right) = 0$. Do đó từ (10) ta có $\lim\limits_{n\to\infty} \| u_n \| = \| u \|$. Kết hợp với $u_n \to u$ yếu và $W_0^{1,p}$ là không gian lồi đều ta có $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = u$ trong $W_0^{1,p}$. Ta còn phải chứng minh $u = P(z)$. Thật vậy, ta có

$$\langle Au_n - z_n, v - u_n \rangle + \int g(x,u_n)(v - u_n)dx \geq 0 \quad \forall v \in K \cap L^\infty. \quad (11)$$

Do $u_n \to u$ trong $W_0^{1,p}$, $Au_n - z_n \to Au - z$ trong $W^{-1,p'}$ nên

$\lim\limits_{n\to\infty} \langle Au_n - z_n, v - u_n \rangle = \langle Au - z, v - u \rangle \quad \forall v \in K \cap L^\infty$,

còn từ (9) ta được

$\lim\limits_{n\to\infty} \int g(x,u_n)(v - u_n)dx = \int g(x,u)(v - u)dx \quad \forall v \in K \cap L^\infty$.

Do đó qua giới hạn trong (1) ta có (3 hay $u = P(z)$.

3. Kết quả chính

Ta trở lại xét bài toán (1). Ta đặt các giả thiết sau đây lên các hàm $h(\lambda,x,u)$, $g(x,u)$

(H1) Hàm $x \mapsto h(\lambda,x,u)$ đo được $\forall(\lambda,u)\in {}_+\times {}_+$, hàm $(\lambda,u)\mapsto h(\lambda,x,u)$ liên tục với mọi $x\in\Omega$ và tồn tại hàm $m(x)\in L^q(\Omega)$, các số $a,\alpha>0$ sao cho:

$$\lambda m(x)u^\alpha \le h(\lambda,x,u)\le \lambda\left[m(x)u^\alpha + a\right];$$

hơn nữa, tồn tại tập mở $\Omega'\subset\Omega$, số $m_0>0$ sao cho:

$$m(x)\ge m_0 \ \forall x\in\Omega'.$$

(H2) Hàm $g:\Omega\times \ \to \ $ thỏa điều kiện Caratheodory, $g(x,0)=0$, tăng theo biến u và tồn tại các số dương β, b_1, b_2 sao cho:

$$b_1u^\beta \le g(x,u)\le b_2u^\beta \quad \forall(x,u)\in\Omega\times {}_+.$$

(H3) $\alpha<\beta\le p-1, \qquad (p^*)' < \dfrac{q(1+\beta)}{q\alpha+1+\beta}.$

Định lí.

Nếu các giả thiết (H1), (H2) và (H3) được thỏa mãn thì tập nghiệm của (1) là nhánh liên tục, không bị chặn, xuất phát từ θ.

Chứng minh:

Bước 1. Đưa bài toán (1) về phương trình dạng (2).

Cố định $u\in K$, ta xét bài toán tìm hàm w thỏa mãn

$$\left.\begin{aligned}&w\in K, g(x,w)\in L^1, wg(x,w)\in L^1,\\ &\langle Aw-h(\lambda,x,u), v-w\rangle + \int g(x,w)(v-w)dx \ge 0 \ \ \forall v\in K\cap L^\infty.\end{aligned}\right\}(12)$$

Vì $u\in L^{p^*}\subset L^{1+\beta}$ nên $m(x)u^\alpha\in L^t$ với $t=\dfrac{q(1+\beta)}{q\alpha+1+\beta}$. Do đó từ các điều kiện (H1), (H3) ta có $h(\lambda,x,u)\in L^{(p^*)'}\subset W^{-1,p'}$. Từ giả thiết (H2) ta thấy hàm g thỏa mãn các điều kiện của định lí C, do đó (12) có duy nhất nghiệm $w=PoN(\lambda,u)$, trong đó P là ánh xạ nói trong bổ đề 3 và $N(\lambda,u)$ là ánh xạ Nemyskii tương ứng với hàm $h(\lambda,x,u)$ nghĩa là $N(\lambda,u)(x)=h(\lambda,x,u(x))$. Dễ thấy rằng, u là nghiệm của (1) khi và chỉ khi ta có

$$u=PoN(\lambda,u). \qquad (13)$$

Như đã chỉ ra ở trên, ánh xạ Nemyskii N tác động từ ${}_+\times L^{1+\beta}$ vào $L^{(p^*)'}$ nên theo định lí Krasnoselskii nó liên tục. Vì $1+\beta<p^*$ nên phép nhúng $W_0^{1,p}\to L^{1+\beta}$ là compắc. Từ đây và bổ đề 3 ta suy ra ánh xạ $PoN: W_0^{1,p}\to W_0^{1,p}$ là hoàn toàn liên tục.

Bước 2. Chứng minh tập nghiệm của (13) là nhánh liên tục nhờ định lí A.

Gọi $u=P_1(z)$ là là nghiệm của bài toán

$$u \in K, u^{1+\beta} \in L^1,$$
$$\langle Au - z, v - u \rangle + \int b_2 u^\beta (v - u)dx \geq 0 \quad \forall v \in K \cap L^\infty$$

thì do điều kiện (H2) và bổ đề 2 ta có $P(z) \geq P_1(z)$. Đặt $N_1(u) = b_1.m(x).u^\alpha$, $G(u) = P_1 o N_1(u)$ ta có G là ánh xạ tăng và

$$PoN(\lambda, u) \geq Po(\lambda N_1(u)) \geq P_1 o N_1(\lambda^{1/\alpha} u) = G(\lambda^{1/\alpha} u).$$

Gọi u_1 là vectơ riêng tương ứng với giá trị riêng đầu của bài toán $-\Delta_p u = \lambda u^{p-1}$ trong Ω', $u = 0$ trên $\partial\Omega'$ và $u_0 = cu_1$ trên Ω', $u_0 = 0$ trên $\Omega \setminus \Omega'$. Thế thì khi $c > 0$ đủ nhỏ ta có theo [3]

$$\langle Au_0, \varphi \rangle \leq \int m(x) u_0^\alpha \varphi \, dx \quad \forall \varphi \geq 0, \varphi \in W_0^{1,p}. \quad (14)$$

Ta sẽ chứng minh $G(tu_0) \geq tu_0$ khi $t > 0$ đủ nhỏ. Thật vậy, theo định nghĩa của $G(tu_0)$ và bổ đề 1 ta có

$$\left\langle A(G(tu_0)) - b_1 m(x).(tu_0)^\alpha, (tu_0 - G(tu_0))^+ \right\rangle > \int b_2 (G(tu_0))^\beta (tu_0 - G(tu_0))^+ dx \geq 0. \quad (15)$$

Từ (14) và (15) ta được

$$\left\langle A(tu_0) - A(G(tu_0)), (tu_0 - G(tu_0))^+ \right\rangle +$$
$$\int_{\Omega_1} \left[b_1 m(x)(tu_0)^\alpha - t^{p-1} m(x) u_0^\alpha - b_2 (G(tu_0))^\beta \right] (tu_0 - G(tu_0)) dx \leq 0, \quad (16)$$

trong đó $\Omega_1 = \{tu_0 \geq G(tu_0)\}$. Gọi f là hàm trong dấu tích phân của bất đẳng thức trên. Trong $\Omega_1 \setminus \Omega_0$ ta có $f = b_2 (G(tu_0))^{1+\beta} \geq 0$, còn trên $\Omega_1 \cap \Omega_0$ ta có

$$f \geq \left[b_1 m(x)(tu_0)^\alpha - t^{p-1} m(x) u_0^\alpha - b_2 (tu_0)^\beta \right] (tu_0 - G(tu_0))$$
$$= (tu_0)^\alpha \left[m(x)(b_1 - t^{p-1-\alpha}) - b_2 (tu_0)^{\beta-\alpha} \right] (tu_0 - G(tu_0))$$
$$= (tu_0)^\alpha \left[m_0 (b_1 - t^{p-1-\alpha}) - b_2 (tu_0)^{\beta-\alpha} \right] (tu_0 - G(tu_0))$$

Do u_0 là hàm bị chặn và $\alpha < \beta \leq p - 1$ ta suy ra $f \geq 0$ trên $\Omega_1 \cap \Omega_0$ khi t đủ nhỏ. Do vậy từ (16) ta có

$$\left\langle A(tu_0) - A(G(tu_0)), (tu_0 - G(tu_0))^+ \right\rangle \leq 0$$

và do vậy $(tu_0 - G(tu_0))^+ = 0$ hay $G(tu_0) \geq tu_0$ hkn.

Tiếp theo ta chứng minh $\lim_{t \to \infty} \| G(tu_0) \|_{p*} = \infty$. Để có điều này ta sẽ chứng minh

$G(tu_0) \geq t^r G(u_0)$ với $r = \dfrac{\alpha}{p-1}, t \geq 1$.

Thật vậy, do định nghĩa của G và bổ đề 1 ta có

$$\left\langle A(G(tu_0))-b_1m(x)(tu_0)^{\alpha},(t^rG(u_0)-G(tu_0))^+\right\rangle+\int b_2(G(tu_0))^{\beta}(t^rG(u_0)-G(tu_0))^+dx\geq 0, \quad (16)$$

$$\left\langle A(G(u_0))-b_1m(x)(tu_0)^{\alpha},(t^rG(u_0)-G(tu_0))^+\right\rangle+\int b_2(G(tu_0))^{\beta}(t^rG(u_0)-G(tu_0))^+dx\leq 0. \quad (17)$$

Nhân (17) với t^{α} rồi trừ (16) và chú ý rằng $tA(u)=A(t^{\frac{1}{p-1}}.u)$ ta được

$$\left\langle A(t^rG(u_0))-A(G(tu_0)),(t^rG(u_0)-G(tu_0))^+\right\rangle+\int_{\Omega_1} b_2\left[t^{\alpha}(Gu_0)^{\beta}-(G(tu_0))^{\beta}\right](t^rG(u_0)-G(tu_0))^+dx\leq 0,$$

trong đó $\Omega_1=\left\{t^rG(u_0)\geq G(tu_0)\right\}$. Trên Ω_1 ta có

$$t^{\alpha}(Gu_0)^{\beta}-(G(tu_0))^{\beta}\geq t^{\alpha}(Gu_0)^{\beta}-t^{r\beta}(Gu_0)^{\beta}\geq 0$$

vì $r\beta\leq\alpha$. Vậy ta được

$$\left\langle A(t^rG(u_0))-A(G(tu_0)),(t^rG(u_0)-G(tu_0))^+\right\rangle\leq 0,$$

Do vậy, $G(tu_0)\geq t^rG(u_0)$ hkn.

Như vậy các điều kiện của định lí A được nghiệm đúng với $\|.\|_0=\|.\|_{p*}$. Ta suy ra tập nghiệm của (13) và do đó tập nghiệm của (1) là nhánh liên tục không bị chặn, xuất phát từ θ. Định lí được chứng minh đầy đủ.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Boccardo L., Giachetti D., Murat F., (1989). *"*A generalization of a theorem of Brezis - Browder and applications to some unilateral problems*"*, *Publications du laboratoire d' Analyse numerique*, Universite Pierra et Marie Curie, R89014, pp. 1-18.
2. Nguyen Bich Huy (1999). "Global continua of positive solutions for equations with nondifferentiable operators", *J. Math. Anal. Appl*., (239), pp. 449-456.
3. N. B. Huy, N. D. Thanh, T. D. Thanh (2002) *"*Extremal solutions for a class of unilateral problems", *Zeit. Anal. Anwen*., (21), pp. 371-380.
4. V. K. Le, K. Schimitt, (1997). "Global bifurcation in vatiational inequalities: Applications to obstacle and unilateral problems", *Springer, Appl. Math. Sci*., vol 123, New York.
5. A. Szulkin (1985) "Positive solutions of variational inequalities: a degree theoretic approach", *J. Diff. Eq.,* (57), pp. 90-11.