MỞ RỘNG ĐƠN CỰC DIRAC VÀ YANG CHO KHÔNG GIAN 9 CHIỀU

LÊ VĂN HOÀNG*, NGUYỄN THÀNH SƠN**

TÓM TẮT

Sử dụng phép biến đổi Hurwitz mở rộng chúng tôi tìm ra mối liên hệ tương đương giữa dao động tử điều hòa 16 chiều và nguyên tử đồng dạng hydro 9 chiều trong trường định chuẩn SO(8). Dựa trên phát hiện này, chúng tôi có cách đơn giản để xây dựng một đơn cực trong không gian 9 chiều, chính là mở rộng của đơn cực Dirac (1931) cho không gian 3 chiều cũng như của đơn cực Yang (1978) cho không gian 5 chiều.

ABSTRACT

Generalization of Dirac and Yang monopoles for 9-dimension space

Using the generalized Hurwitz transformation, we find an equivalent correlation between a 16-dimension harmonic oscillator and a 9-dimension hydrogen-like atom in the SO (8) gauge field. Based on this finding, we propose a simple method to establish a monopole in a 9-dimension space which is really a generalization of Dirac monopole (1931) for 3-dimension space as well as of Yang monopole (1978) for 5-dimension space.

1. Mở đầu

Năm 1978, Yang Chen Ning đã mở rộng đơn cực từ Dirac cho không gian 5 chiều qua mô hình tương tác giữa trường định chuẩn SU(2) với hạt có isospin [10]. Tính chất cơ bản của trường đơn cực SU(2) là (i) thông lượng qua một mặt kín trong không gian 5 chiều chứa đơn cực là khác không; (ii) trường có đối xứng cầu O(5). Một hạt đơn cực như vậy đồng thời có điện tích người ta gọi là đơn cực Yang-Coulomb, được nghiên cứu tương đối nhiều [6-8].

Từ kết quả của Yang, việc xây dựng đơn cực từ cho không gian nhiều chiều khác là một nhu cầu tự nhiên và đã được tiến hành trong một số công trình [9-10]. Tuy nhiên, cho đến nay chưa có kết quả nào thảo luận về việc mở rộng đơn cực từ theo lô-gic của Yang khi phát triển từ đơn cực từ Dirac 3 chiều lên không gian 5 chiều. Ở đây, một tính chất rất quan trọng của đơn cực Dirac cũng như Yang là khi kết hợp với điện tích nó không phá vỡ các tính chất đối xứng của bài toán Coulomb. Cụ thể như sự có mặt của đơn cực Dirac không làm thay đổi đối xứng O(4) và vẫn tồn tại một bất biến là véc-tơ Runge-Lenz cũng như đối xứng động lực SO(4,2) [2]. Tương tự như vậy với đơn cực Yang thì bài toán Coulomb 5 chiều vẫn bảo toàn đối xứng O(6) [6], đối xứng động lực SO(6,2) [8]. Chúng ta sẽ gọi một đơn cực là mở rộng trực tiếp của đơn cực Dirac và đơn cực Yang nếu như nó có những tính chất tương tự như vậy.

Trong công trình [3], chúng tôi đã mở rộng phép biến đổi Hurwitz và dựa vào đó để xây dựng mối liên hệ giữa bài

* PGS TSKH, Khoa Vật lý Trường Đại học Sư phạm TP HCM

** ThS, Khoa Khoa học Cơ bản Trường Đại học Kiến trúc TP HCM

toán dao động tử 16 chiều với bài toán Coulomb 9 chiều với sự có mặt một trường định chuẩn tương tác với hạt có các tính chất được đặc trưng bằng một đại số kín bao gồm 28 vi tử. Điều này gợi ý cho một cách khái quát hóa đơn cực Yang lên không gian 9 chiều từ một hướng tiếp cận hoàn toàn mới liên quan đến mối liên hệ giữa dao động tử điều hòa n chiều và bài toán Coulomb N chiều. Cho đến nay mối liên hệ này được xây dựng cho các trường hợp số chiều $n \to N$ như sau: $2 \to 2$, $3 \to 4$, $5 \to 8$ và $9 \to 16$ [4]. Một tính chất rất quan trọng của mối liên hệ này là khi bài toán Coulomb được thêm đơn cực từ thì mối liên hệ với dao động tử điều hòa vẫn tồn tại. Trong trường hợp $3 \to 4$ ta có đơn cực từ Dirac [5], còn trong trường hợp $5 \to 8$ đó là đơn cực Yang [6-8]. Câu hỏi đặt ra là đơn cực nào cho trường hợp $9 \to 16$ khi thêm vào bài toán Coulomb 9 chiều mà vẫn không phá vỡ mối liên hệ với dao động tử điều hòa 16 chiều?

Trong công trình này, trả lời cho câu hỏi trên một cách trọn vẹn, chúng tôi xây dựng đơn cực trong không gian 9 chiều theo mô hình đại số SO(8) sao cho bài toán Coulomb với sự có mặt của đơn cực này trở thành dao động tử điều hòa 16 chiều qua phép biến đổi Hurwirz mở rộng [3]. Ở đây từ 9 chiều sang bài toán 16 chiều có xuất hiện 7 chiều không gian mới trong các biểu thức tường minh của 28 vi tử của đại số SO(8). Các biến số mới này được đưa vào thông qua phép biến đổi Hurwitz mở rộng. Như vậy đơn cực được xây dựng tường minh này có thể xem là một dạng mở rộng của đơn cực từ Dirac cũng như đơn cực Yang:

$$\begin{aligned} \textit{Dimension}: 3 &= 2^1 + 1 \to \textit{Dirac monopole} \\ : 5 &= 2^2 + 1 \to SU(2)\ \textit{Yang monopole} \\ : 9 &= 2^3 + 1 \to SO(8)\ \textit{monopole} \end{aligned}$$

2. Phép biến đổi Hurwitz mở rộng

Trong phần này chúng tôi sẽ viết lại phép biến đổi Hurwitz mở rộng, được công bố trong công trình [3], đồng thời đưa ra một số công thức mới, tường minh, thuận lợi cho việc sử dụng trong các tính toán tiếp theo trong công trình này.

Phép biến đổi bình phương cho trường hợp biến đổi giữa không gian 9 chiều $(x_1, x_2, ..., x_9)$ và không gian 16 chiều $(u_1, u_2, ..., u_8, v_1, v_2, ..., v_8)$ xây dựng đầu tiên trong công trình [4] sao cho điều kiện Euler:

$$r = \sqrt{x_\lambda x_\lambda} = u_s u_s + v_s v_s \qquad (1)$$

được thỏa mãn. Mới đây trong công trình [3] phép biến đổi này được đưa ra dưới dạng tường minh như sau:

$$\begin{aligned} x_j &= 2(\Gamma_j)_{st} u_s v_t \\ x_9 &= u_s u_s - v_s v_s. \end{aligned} \qquad (2)$$

Ở đây, các ma trận Γ_j có dạng:

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix}, \ \Gamma_2 = \begin{bmatrix} \beta\alpha_1\alpha_3 & 0 \\ 0 & \beta\alpha_1\alpha_3 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_3 = \begin{bmatrix} \alpha_3 & 0 \\ 0 & \alpha_3 \end{bmatrix}, \ \Gamma_4 = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & -\alpha_1 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_5 = \begin{bmatrix} 0 & -i\alpha_1\alpha_2 \\ i\alpha_1\alpha_2 & 0 \end{bmatrix}, \ \Gamma_6 = \begin{bmatrix} 0 & -i\beta\alpha_2\alpha_3 \\ i\beta\alpha_2\alpha_3 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Gamma_7 = \begin{bmatrix} 0 & -\beta\alpha_3 \\ \beta\alpha_3 & 0 \end{bmatrix}, \ \Gamma_8 = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad (3)$$

trong đó $\beta = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix}$, $\alpha_k = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_k \\ \sigma_k & 0 \end{bmatrix}$ là các ma trận Dirac; σ_k là các ma trận Pauli. Trong biểu thức (2) và tiếp theo trong suốt công trình này, sự lập lại các chỉ số có nghĩa là lấy tổng theo toàn miền thay đổi của nó: $s,t = 1,2,...,8$. Ở đây, các chỉ số của biến số x_λ được ký hiệu theo mẫu tự Hy Lạp sẽ có giá trị: $\lambda = 1,2,...,9$. Tuy nhiên, trong một số trường hợp ta sẽ cần tách riêng biến số x_9, khi đó các biến số còn lại có chỉ số ký hiệu theo chữ La-tin x_j, $j = 1,2,...,8$.

Các ma trận Γ_j hoặc là đối xứng hoặc phản đối xứng, cụ thể ta có $\Gamma_k^T = \Gamma_k$ với $k = 1,3,4,7,8$ trong khi $\Gamma_k^T = -\Gamma_k$ với $k = 2,5,6$ (ký hiệu mũ T để chỉ phép chuyển vị ma trận). Ngoài ra nó còn thỏa mãn tính chất sau :

$$\Gamma_s^T\Gamma_t + \Gamma_t^T\Gamma_s = 2\delta_{st} I, \qquad (4)$$

với δ_{st} là các ký hiệu delta Kroneker. Điều này có nghĩa là tích bất kỳ hai ma trận (3) nào khác nhau đều là ma trận phản đối xứng.

Trong công trình [3], lần đầu tiên phép biến đổi Hurwitz mở rộng được xây dựng dưới dạng (2) và ngoài ra còn định nghĩa thêm 7 biến số phụ ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. Từ đây phép biến đổi ngược đã được xây dựng dưới dạng tường minh như sau :

$$u_s = \sqrt{\frac{r + x_9}{2}}\, b_s(\phi\alpha),$$

$$v_s = \frac{x_j}{\sqrt{2(r + x_9)}} \tilde{H}_{sj}(\phi\alpha). \qquad (5)$$

Ở đây các hàm số $b_s(\phi\alpha)$ chỉ phụ thuộc vào các biến số góc:

$$b_1 = \cos(\phi_1/2)\cos(\phi_2/2)\cos\alpha_1,$$
$$b_2 = \cos(\phi_1/2)\cos(\phi_2/2)\sin\alpha_1,$$
$$b_3 = \cos(\phi_1/2)\sin(\phi_2/2)\cos\alpha_2,$$
$$b_4 = \cos(\phi_1/2)\sin(\phi_2/2)\sin\alpha_2,$$
$$b_5 = \sin(\phi_1/2)\cos(\phi_3/2)\cos\alpha_3,$$
$$b_6 = \sin(\phi_1/2)\cos(\phi_3/2)\sin\alpha_3,$$
$$b_7 = \sin(\phi_1/2)\sin(\phi_3/2)\cos\alpha_4,$$
$$b_8 = \sin(\phi_1/2)\sin(\phi_3/2)\sin\alpha_4.$$

Các yếu tố ma trận $\tilde{H}_{js}(\phi\alpha)$ cũng chỉ phụ thuộc vào biến số góc như vậy và có thể biểu diễn qua $b_s(\phi\alpha)$. Dạng tường minh của ma trận $\tilde{H}(\phi\alpha)$ được đưa ra trong [3] có dạng của ma trận Hurwitz, với các tính chất: $\det \tilde{H}(\phi\alpha) = 1$, $\tilde{H}^T = \tilde{H}^{-1}$. Tính chất này cùng với công thức biến đổi ngược (5) cho phép ta tính toán thuận lợi trong các phần sau.

3. Thế đơn cực trong không gian 9 chiều

Sử dụng phép biến đổi (5) ta có thể chứng minh công thức sau:

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2} i (\Gamma_j)_{st} \left(v_t \frac{\partial}{\partial u_s} + u_s \frac{\partial}{\partial v_t} \right) \\ &= r \left(-i \frac{\partial}{\partial x_j} - \tilde{A}_k(\mathbf{r}) \hat{Q}_{kj}(\phi\alpha) \right) \end{aligned}, \qquad (6)$$

$$-\frac{1}{2} i \left(u_s \frac{\partial}{\partial u_s} - v_s \frac{\partial}{\partial v_s} \right) = -ir \frac{\partial}{\partial x_9},$$

trong đó: $\tilde{A}_k = \dfrac{x_k}{2r(r + x_9)}$. $\qquad (7)$

Các toán tử $\hat{Q}_{kj}$ chỉ phụ thuộc vào biến số góc $(\varphi\phi)$, dạng tường minh có thể dễ dàng thu nhận được trong công trình [3].

Hệ các toán tử $\hat{Q}_{kj}$ là phản đối xứng theo chỉ số (jk), và có tất cả 28 toán tử. Chúng tạo thành một đại số kín SO(8) theo các hệ thức giao hoán sau:

$$\left[\hat{Q}_{jk},\hat{Q}_{lm}\right]=i\delta_{jm}\hat{Q}_{lk}-i\delta_{km}\hat{Q}_{lj}+i\delta_{jl}\hat{Q}_{km}-i\delta_{kl}\hat{Q}_{jm} \quad (8)$$

Bây giờ chúng ta quay lại với các toán tử (6). Nếu không tính thừa số r thì vế phải chính là các toán tử xung lượng trong không gian thực 9 chiều:

$$\hat{\pi}_j=-i\frac{\partial}{\partial x_j}-\tilde{A}_k(\mathbf{r})\hat{Q}_{kj}(\phi\alpha),$$
$$\hat{\pi}_9=-i\frac{\partial}{\partial x_9}. \quad (9)$$

Xét thành phần tương tác $\tilde{A}_k(\mathbf{r})\hat{Q}_{kj}(\phi\alpha)$ trong biểu thức xung lượng (9) ta thấy có tất cả 7 toán tử SO(8). Điều này gợi ý cho ta định nghĩa một bộ bảy các thế véc-tơ như sau:

$$A_{1\lambda}=\left(-\tilde{A}_2,+\tilde{A}_1,+\tilde{A}_4,-\tilde{A}_3,+\tilde{A}_6,-\tilde{A}_5,+\tilde{A}_8,-\tilde{A}_7,0\right),$$
$$A_{2\lambda}=\left(+\tilde{A}_3,+\tilde{A}_4,-\tilde{A}_1,-\tilde{A}_2,+\tilde{A}_7,-\tilde{A}_8,-\tilde{A}_5,+\tilde{A}_6,0\right),$$
$$A_{3\lambda}=\left(+\tilde{A}_4,-\tilde{A}_3,+\tilde{A}_2,-\tilde{A}_1,+\tilde{A}_8,+\tilde{A}_7,-\tilde{A}_6,-\tilde{A}_5,0\right),$$
$$A_{4\lambda}=\left(-\tilde{A}_5,-\tilde{A}_6,-\tilde{A}_7,+\tilde{A}_8,+\tilde{A}_1,+\tilde{A}_2,+\tilde{A}_3,-\tilde{A}_4,0\right),$$
$$A_{5\lambda}=\left(+\tilde{A}_6,-\tilde{A}_5,+\tilde{A}_8,+\tilde{A}_7,+\tilde{A}_2,-\tilde{A}_1,-\tilde{A}_4,-\tilde{A}_3,0\right),$$
$$A_{6\lambda}=\left(+\tilde{A}_7,-\tilde{A}_8,-\tilde{A}_5,-\tilde{A}_6,+\tilde{A}_3,+\tilde{A}_4,-\tilde{A}_1,+\tilde{A}_2,0\right),$$
$$A_{7\lambda}=\left(-\tilde{A}_8,-\tilde{A}_7,+\tilde{A}_6,+\tilde{A}_5,-\tilde{A}_4,-\tilde{A}_3,+\tilde{A}_2,+\tilde{A}_1,0\right).$$
(10)

Khi đó toán tử xung lượng trong không gian 9 chiều có thể viết lại dưới dạng:

$$\hat{\pi}_j=-i\frac{\partial}{\partial x_j}-\hat{I}_{\tilde{j}a}(\phi\alpha)A_{aj}(\mathbf{r}). \quad (11)$$

Trong biểu thức (11), chúng ta có dấu ~ trên chỉ số j để chỉ rằng không có lấy tổng theo chỉ số này, còn các toán tử $\hat{I}_{ja}(\phi\alpha)$ với chỉ số $a=1,2,...,7$ và $j=1,2,...,8$ vẫn chính là các các toán tử $\hat{Q}_{kj}$ với các dấu $\pm$ khác nhau. Dạng cụ thể của $\hat{I}_{ja}(\phi\alpha)$ có thể tìm thấy trong công trình trước đây của chúng tôi [3].

Quay lại với bộ bảy các thế véc tơ (10) ta dễ dàng kiểm tra các tính chất sau:

$$x_\lambda A_{\lambda k}=0\ ,\ A_{j\lambda}A_{k\lambda}=\delta_{jk}\frac{r-x_9}{4r^2(r+x_9)}$$
(12)

hoàn toàn tương tự tính chất của thế véc-tơ đơn cực từ Dirac trong không gian 3 chiều:

$$A_\lambda=\frac{1}{2r(r+x_3)}(-x_2,x_1,0),\ x_\lambda A_\lambda=0\ ,$$
$$A_\lambda A_\lambda=\frac{r-x_3}{4r^2(r+x_3)}\ . \quad (13)$$

cũng như tính chất của bộ ba thế véc-tơ đơn cực Yang SU(2):

$$A_{1,\lambda}=\frac{1}{2r(r-x_5)}(-x_2,x_1,x_4,-x_3,0)\ ,$$
$$A_{2,\lambda}=\frac{1}{2r(r-x_5)}(x_3,x_4,-x_1,-x_2,0),$$
$$A_{3,\lambda}=\frac{1}{2r(r-x_5)}(x_4,-x_3,x_2,-x_1,0), \quad (14)$$

cho không gian 5 chiều:

$$x_\lambda A_{\lambda k}=0\ ,\ A_{j\lambda}A_{k\lambda}=\delta_{jk}\frac{r-x_5}{4r^2(r+x_5)}\ .$$
(15)

Như vậy, ta vừa xây dựng một dạng thế véc-tơ theo mô hình SO(8) cho không gian 9 chiều là mở rộng trực tiếp của thế đơn cực Dirac cho không gian 3 chiều và thế đơn cực Yang theo mô hình SU(2) cho không gian 5 chiều. Trong phần tiếp theo sau ta sẽ xây dựng mối liên hệ giữa bài toán dao động tử điều hòa 16 chiều với nguyên tử hydro 9 chiều với sự có mặt của đơn cực SO(8). Sự tồn tại của mối liên hệ này cũng là một biểu hiện của sự khái quát hóa từ đơn cực Dirac, đơn cực Yang lên đơn cực SO(8).

4. Mối liên hệ giữa dao động tử điều hòa và nguyên tử hydro 9 chiều với sự có mặt của đơn cực SO(8)

Xét dao động tử điều hòa trong không gian 16 chiều thực (uv), phương trình Schrodinger của nó được viết như sau:

$$\left\{-\frac{1}{8}\left(\frac{\partial^2}{\partial u_s \partial u_s}+\frac{\partial^2}{\partial v_s \partial v_s}\right)-\frac{1}{2}\omega^2(u_s u_s+v_s v_s)\right\}\Psi(u,v) = Z\Psi(u,v) \quad (16)$$

Trong đó ω, Z là các số thực dương, có ý nghĩa lần lượt là tần số góc và năng lượng của dao động tử điều hòa. Bây giờ chúng ta sẽ chuyển phương trình trên về không gian 9 chiều $x_1, x_2, ..., x_9$ bằng phép biến đổi Hurwitz mở rộng (2), trong đó 7 chiều dư ra sẽ biểu diễn bằng các góc $\phi_1, \phi_2, \phi_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. Phương trình thu được như sau:

$$\left\{\frac{1}{2}\hat{\pi}_\lambda \hat{\pi}_\lambda + \frac{1}{2r}\hat{I}^2(\phi\varphi) - \frac{Z}{r}\right\}\psi(\mathbf{r}, \phi\alpha) = E\psi(\mathbf{r}, \phi\alpha), \quad (17)$$

trong đó $\hat{\pi}_\lambda$ với các chỉ số chạy từ 1 đến 9 chính là toán tử xung lượng có dạng như công thức (9) và (11); toán tử $\hat{I}^2(\phi\varphi) = \hat{I}_{j\bar{a}}\hat{I}_{ja}$ giao hoán với tất cả các toán tử $\hat{I}_{ja}$; $E = -\frac{1}{2}\omega^2$.

Hệ vật lý mô tả bởi phương trình (17) chính là nguyên tử đồng dạng hydro trong không gian 9 chiều với sự có mặt của đơn cực SO(8) với biểu thức tường minh (10). Ở đây Z đóng vai trò là điện tích hạt nhân, trong khi E là năng lượng trong vùng liên kết (luôn luôn âm). Trong trường hợp hàm sóng không phụ thuộc vào các biến số góc mà chỉ phụ thuộc vào 9 biến số không gian $x_1, x_2, ..., x_9$ thì (17) là phương trình Schrodinger cho nguyên tử hydro 9 chiều. Trường hợp tổng quát khi hàm sóng còn phụ thuộc vào 7 biến số góc ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ ta có trường hợp xuất hiện tương tác với thế đơn cực SO(8). Ta thấy 7 biến số phụ dùng để mô tả những tính chất nội tại của hạt biểu diễn qua 28 vi tử của đại số SO(8). Bài toán này còn có tên gọi là bài toán MIC-Kepler và là một trong các bài toán cơ bản được nghiên cứu nhiều cho trường hợp không gian 3 chiều và 5 chiều. Bài toán MIC-Kepler 9 chiều với mô hình SO(8) lần đầu tiên đưa ra trong công trình này.

5. Kết luận và hướng phát triển

Như vậy, chúng tôi đã phát triển phép biến đổi Hurwitz mở rộng với một số công thức tường minh thuận lợi trong tính toán giải tích. Trên cơ sở đó, trong công trình này lần đầu tiên đưa ra mối liên hệ giữa dao động tử điều hòa 16 chiều với bài toán nguyên tử hydro 9 chiều với sự có mặt của đơn cực SO(8). Xét đơn cực Dirac và đơn cực Yang trong các mối liên hệ tương tự giữa dao động tử điều hòa với nguyên tử hydro với sự có mặt của các đơn cực này, chúng ta thấy đơn cực SO(8) trong không gian 9 chiều chính là sự mở rộng của đơn cực từ Dirac và đơn cực SU(2) của Yang. Trong công trình tiếp theo, chúng tôi sẽ chứng minh đối xứng động học SO(10,2) cho bài toán đang xét và xây dựng bất biến tương tự véc-tơ Runge-Lenz.

Chúng tôi cám ơn Quỹ Nghiên cứu Khoa học Công nghệ của Bộ Giáo dục và Đào tạo đã tài trợ cho công trình này.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Akihiro Ito (1984), "Generalized Wu-Yang Solution of the Yang-Mills Equation", *Prog. Theor. Phys*, (71), pp. 1443-1446.
2. Barut A., Kleinert H. (1967), "Dynamical Group $O(4,2)$ for Baryons and the Behavior of Form Factors", *Phys. Rev*.,(161), pp. 1464-1466.
3. Le Van Hoang, Nguyen Thanh Son, Phan Ngoc Hung (2009), "A Hidden Non-Abelian Monopole in a 16-Dimensional Isotropic Harmonic Oscillator", *J. Phys. A 42,* pp. 175204-175212.
4. Le Van Hoang, Komarov L. I. (1993), "Theory of the generalized Kustaanheimo-Stiefel transformation", *Phys. Lett. A 177*, pp. 121-124.
5. Kleinert H (1986), "Path integral for Coulomb system with magnetic charges", *Phys. Lett. A 116,* pp. 201-206.
6. Mardoyan L. G., Sissakian A. N., Ter-Antonyan V. M. (1999), "Hidden Symmetry of the Yang–Coulomb System", *Mod. Phys. Lett. A 14,* pp. 1303-1307.
7. Nersessian A., Pogosyan G. (2001), "Relation of the oscillator and Coulomb systems on spheres and pseudo-spheres", *Phys. Rev. A 63,* pp. 20103-20107.
8. Pletyukhov M. V., Tolkachev E. A. (1999), "SO(6,2) dynamical symmetry of the SU(2) MIC-Kepler problem", *J. Phys. A 32,* L249-253.
9. Tchrakian T. (2008), "Dirac-Yang monopoles in all dimensions and their regular counterparts", *Phys. Atom. Nucl.,* (71), pp. 1116-1122.
10. Yang C. N. (1978), "Generalization of Dirac's monopole to SU2 gauge fields", *J. Phys. A 19*, pp. 320-328.