NGUYÊN LÝ CĂN BẢN ĐỊNH GIÁ TÀI SẢN TRONG THỊ TRƯỜNG TÀI CHÍNH

NGUYỄN CHÍ LONG [*]

TÓM TẮT

Lý thuyết định giá tài sản trong thị trường tài chính là nền tảng về mặt nghiên cứu lý thuyết cũng như thực nghiệm trong nền kinh tế tài chính hiện nay. Mục đích của bài báo này là giới thiệu và chứng minh một nguyên lý toán tài chính quan trọng: Nguyên lý căn bản định giá tài sản trong thị trường tài chính.

ABSTRACT

The basic principle of asset pricing in financial market

Theory of asset pricing in financial market is the foundation of current theoretical and empirical research in financial economy. The aim of this article is to present and prove the important economic and mathematical principle in financial Mathematics: The basic principle of asset pricing in financial market.

1. Giới thiệu

Toán tài chính được các nhà khoa học thừa nhận là khai sinh từ năm 1900, năm mà Loui Bachelier (1870-1946) bảo vệ thành công luận án Tiến sĩ có tên *"Lý thuyết đầu cơ tài chính (Theory de speculation)"* tại Đại học Sorbonne (Paris); dưới sự hướng dẫn của nhà toán học lừng danh Henri Poincaré. Tuy nhiên, cho đến hơn nửa thế kỷ sau (năm 1967), các nhà toán học nghiên cứu ứng dụng trong tài chính mới biết đến công trình này. Cũng hơn nửa thế kỷ sau (khoảng năm 1953), Harry Markowitz và James Tobin đã đưa ra lý thuyết *"Lựa chọn danh mục đầu tư"* qua việc phân tích trung bình – phương sai trong lý thuyết xác suất. Nhưng cột mốc quan trọng, đánh dấu thời kỳ phát triển mạnh mẽ của toán tài chính là sự ra đời của mô hình Black – Scholes năm 1973 về tính hợp lý giá của các quyền chọn *(Pricing of Option and Corporate Liabilities)*. Sự kiện này có tính cách mạng vì nó làm thay đổi đồng loạt phương thức tính toán vốn đầu tư vào thị trường tài chính, đặc biệt là thị trường các quyền chọn. Ngày giao dịch đầu tiên (26/4/1973) của thị trường chứng khoán Chicago đã có 911 hợp đồng quyền chọn trên 16 loại cổ phiếu, năm tiếp theo đã có 20 000 hợp đồng giao dịch hàng ngày. Năm 1987, mỗi ngày có 700 000 hợp đồng trên mỗi loại cổ phiếu và như thế hàng ngày có 700 triệu hợp đồng quyền chọn trên 100 loại cổ phiếu. Điều này cho thấy quy mô áp dụng và tầm quan trọng của toán tài chính. Cũng chính vì thế giải Nobel kinh tế năm 1990 dành cho Harry Markovitz, William Sharpe và Merton Miller; giải Nobel kinh tế năm

[*] TS, Khoa Toán - Tin học, Trường Đại học Sư phạm TP HCM

1997 dành cho M.Scholes (lúc đó Black mất) và Rober Merton; giải Nobel kinh tế 2003 dành cho Clive Granger về phương pháp chuỗi thời gian và Rorbert Engle về mô hình dao động ngẫu nhiên.

Tại Việt Nam, toán tài chính được quan tâm nghiên cứu chỉ khoảng 10 năm gần đây, nhưng số người nghiên cứu, quy mô, tài liệu còn quá nhỏ, chưa đáp ứng được yêu cầu hội nhập của Việt Nam vào nền kinh tế thế giới. Đặc biệt là công tác đào tạo chưa đáp ứng được nhu cầu về nhân sự của các công ty tài chính và chứng khoán thành lập ở Việt Nam. Do đó các thuật ngữ, khái niệm, các nguyên lý căn bản của toán tài chính cần được làm sáng tỏ và trình bày chặt chẽ, có tính sư phạm để giúp học viên cao học, các nghiên cứu sinh ngành toán tài chính, dễ tiếp cận và nghiên cứu lĩnh vực mới và đặc biệt quan trọng này.

Hai định lý căn bản của toán tài chính được đề cập gần đây trong [4], đây là nguyên lý căn bản định giá tài sản trong thị trường tài chính. Mặt khác, mô hình tài chính thời gian rời rạc một chu kỳ có thể coi như tế bào của các mô hình tài chính tổng quát, chính vì lẽ đó, trong bài báo này chúng tôi trình bày chứng minh *nguyên lý định giá tài sản trong mô hình tài chính* thời gian rời rạc.

2. Nguyên lý căn bản định giá tài sản

2.1. Mô hình tài chính một chu kỳ đơn giản nhất

Xét mô hình tài chính gồm các yếu tố sau:

- Một tập hợp thời gian giao dịch $\mathrm{T} = \{0,1\}$. Thời điểm *t=0* là thời điểm hiện tại, bắt đầu giao dịch và thời điểm *t=1* là thời điểm đáo hạn, kết thúc giao dịch.
- Không gian tài chính (hay không gian mẫu) gồm hai trạng thái (hay kịch bản): $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$. Ta ký hiệu hai trạng thái này là $\omega_1 = H$, và $\omega_2 = T$. Ta có thể xem trạng thái ở thời điểm *t=1* xuất hiện một cách ngẫu nhiên như việc tung đồng xu gồm hai mặt (một mặt có hình quốc Huy (viết tắt là *H),* mặt kia chỉ giá Trị đồng xu, (ta ghi là *T)),* nó có thể xuất hiện mặt *H* hay *T,*

  $\Omega = \{H, T\}$
- Sự xuất hiện trạng thái nào tại thời điểm *t=1* có tính ngẫu nhiên mà ta không thể biết tại thời điểm t=0. Theo tính chất độ đo xác suất P(.) và không đòi hỏi đồng xu cân đối, ta có thể giả sử có hằng số *0<p<1* với

  $P(H) = p; P(T) = 1 - p$
- Trước tiên, ta chỉ xét hai tài sản cơ bản (tài sản cơ bản trong thị trường tài chính gồm có: cổ phiếu, trái phiếu, chứng chỉ ghi nợ, tài khoản ngân hàng, các đơn vị tiền tệ…) để đầu tư, đó là loại trái phiếu không rủi ro hay tài khoản ngân hàng, về sau ta gọi chung là **tài khoản tín dụng**, $B_t; t = 0,1$ và một chứng khoán $S_t; t = 0,1: B_0$

chỉ tài khoản tín dụng tại thời điểm *t=0*, với lãi xuất không rủi ro cho một chu kỳ là hằng số dương *r*, nghĩa là (n.l.) nếu $B_0 = 1$ đơn vị tiền tệ thì đến thời điểm *t=1*, $B_1 = 1 + r$ đơn vị tiền tệ. Đối với chứng khoán, giá chứng khoán tại thời điểm *t=0* đã biết và ta ký hiệu là S_0. Tại thời điểm *t=1*, giá chứng khoán phụ thuộc vào trạng thái xảy ra của thế giới tài chính, n.l. nó có thể lấy giá trị $S_1(H)$ hay $S_1(T)$ tùy thuộc vào trạng thái *H* hay *T* xuất hiện khi tung đồng xu, mà tại thời điểm *t=0* ta không thể biết trước. Vậy S_1 là biến ngẫu nhiên lấy giá trị $S_1(H)$ với xác suất *p* và lấy giá trị $S_1(T)$ với xác suất *1-p*. Ta định nghĩa:

$$u := \frac{S_1(H)}{S_0}, d := \frac{S_1(T)}{S_0}$$

Ta giả sử rằng $0 < d < 1 < u$, điều này có nghĩa giá chứng khoán có thể tăng hay giảm nhưng vẫn đảm bảo các hằng số *u* và *d* là số dương.

- Xét một phương án đầu tư (x, ϕ), trong đó *x* là toàn bộ số tiền mà nhà đầu tư (NĐT) kinh doanh tại thời điểm *t=0*, còn ϕ là số đơn vị cổ phiếu của chứng khoán mà NĐT mua tại thời điểm *t=0*. Vậy số tiền còn lại sau khi mua cổ phiếu $x - \phi S_0$, NĐT gửi trong tài khoản tiết kiệm ở ngân hàng (hoặc mua trái phiếu không rủi ro). Vì thị trường cho phép mua bán khống, nên có thể giả sử rằng $\phi \in \mathbb{R}$.

Giá của phương án đầu tư (x, ϕ) tại thời điểm *t=0* là tổng số tiền đầu tư *x*. Trong khoảng giữa thời gian từ *t=0* đến *t=1*, NĐT không làm gì khác hơn ngoài việc chờ cho đến thời điểm *t=1*. Giá của phương án $V(x, \phi)$ tại thời điểm *t=1* được cho bởi thu hoạch (payoff) của NĐT. Thu hoạch này mang tính ngẫu nhiên. Tại thời điểm *t=1* có thể có hai giá trị khác nhau đối với $V(x, \phi)$:

$$V(x, \phi)(H) = (x - \phi S_0)(1 + r) + \phi S_1(H)$$

nếu tung đồng xu mà mặt *H* xảy ra và

$$V(x, \phi)(T) = (x - \phi S_0)(1 + r) + \phi S_1(T)$$

nếu mặt *T* xảy ra. Từ hai phương trình trên ta có định nghĩa sau:

***Định nghĩa 1*:**

Quá trình giá của phương án đầu tư (x, ϕ) *trong thị trường tài chính đơn giản một chu kỳ, hai tài sản nền tảng là véc tơ hai thành phần* $(V_0(x, \phi), V_1(x, \phi))$, *trong đó* $V_0(x, \phi) = x$ *và* V_1 *là một biến ngẫu nhiên*

$$V_1(x, \phi) = (x - \phi S_0)(1 + r) + \phi S_1$$

Định nghĩa 2:

Một phương án đầu tư chênh lệch thị giá (arbitrage) là một phương án đầu tư mà lúc bắt đầu kinh doanh không có tiền, xác suất để mất tiền thì bằng không và xác suất để kiếm lời được là dương. Nói chính xác hơn về mặt toán học, một phương án đầu tư (x,ϕ) trong thị trường tài chính đang xét là một phương án đầu tư chênh lệch thị giá nếu

(1) $x = V_0(x,\phi) = 0,$ *n.l.* phương án đầu tư không cần bỏ vốn ban đầu.

(2) $V_1(x,\phi) \geq 0,$ *n.l.* không có rủi ro mất tiền.

(3) $E[V_1(x,\phi)]{=}pV_1(x,\phi)(H) + (1-p)V_1(x,\phi)(T) > 0,$ *n.l* *giá trị trung bình của thu nhập là dương.*

Ta nói mô hình tài chính *không có cơ hội chênh lệch thị giá* nếu không tồn tại một phương án đầu tư chênh lệch thị giá nào, lúc đó điều kiện cần có là $d < 1+r < u$. Ngược lại điều kiện này, mô hình có cơ hội chênh lệch thị giá.

▹ Nếu $d > 1+r$ thì phương án đầu tư như sau sẽ là phương án chênh lệch thị giá:

- Bắt đầu kinh doanh với tài sản là zero, tại thời điểm bắt đầu *t=0*, NĐT vay S_0 tiền trong thị trường tiền tệ để mua một cổ phiếu chứng khoán.

Tại thời điểm *t=1*, ngay cả trường hợp xấu xảy ra là xuất hiện trạng thái *T* khi tung đồng xu, thì giá chứng khoán là $S_1 = S_0 d$ vẫn cao hơn tiền phải trả khi vay: $S_1 = S_0 d \geq S_0(1+r)$; còn khi trường hợp may mắn xảy ra là xuất hiện mặt *H* (với xác suất p>0) khi tung đồng xu, thì từ điều kiện $u > d > 1+r$ sẽ dẫn đến $S_1 = S_0 u > S_0(1+r),$ *n.l.* phương án đạt được lợi nhuận với xác suất dương.

▹ Nếu $u \leq 1+r$ thì phương án đầu tư sau sẽ là phương án chênh lệch thị giá:

- Bắt đầu kinh doanh với tài sản là zero, tại thời điểm *t=0*, NĐT bán khống một cổ phiếu chứng khoán, thu được S_0, tiền này NĐT sẽ đầu tư trong thị trường tiền tệ (như đầu tư vào tài khoản tín dụng với lãi xuất *r*)

Tại thời điểm *t=1,* ngay cả trường hợp tốt xảy ra trong thị trường tài chính là xuất hiện trạng thái *H* khi tung đồng xu, thì giá chứng khoán là $S_1 = S_0 u$ vẫn ít hơn hoặc bằng số tiền của NĐT nhận được lúc này là $S_0(1+r)$; còn khi trường hợp xấu xảy ra trong thị trường tài chính là xuất hiện mặt *T* với (xác suất *1-p>0)* khi tung đồng xu, thì từ điều kiện $d < u < 1+r$ sẽ dẫn đến $S_1 = S_0 d < S_0(1+r),$ *n.l.* phương án đạt được lợi nhuận với xác suất dương.

Vậy ta đã chứng minh khẳng định sau:

Không có cơ hội chênh lệch thị giá $\Rightarrow d < 1+r < u$

Ta có thể kiểm chứng dễ dàng rằng điều ngược lại cũng đúng:

$d < 1 + r < u \Rightarrow$ ***Không có cơ hội chênh lệch thị giá.***

Vậy ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề 1

Thị trường tài chính đơn giản một chu kỳ đang xét là thị trường không có cơ hội chênh lệch thị giá nếu và chỉ nếu $d < 1 + r < u$.

Bây giờ ta xét thêm một yếu tố khác trong thị trường tài chính đơn giản của chúng ta, đó là *sản phẩm phái sinh* như *quyền chọn mua kiểu châu Âu* (viết tắt QMKCA)

Định nghĩa 3:

Một QMKCA là một hợp đồng ký kết giữa bên viết hợp đồng (để bán) và bên mua hợp đồng (giữ nó) trên cơ sở tài sản cơ bản (như chứng khoán, trái phiếu, các đơn vị tiền tệ v.v…), quy định người giữ hợp đồng có quyền, nhưng không bắt buộc mua tài sản tại thời điểm đáo hạn trong tương lai T với một giá thực thi quy định trước là K. Tài sản, thời điểm đáo hạn T và giá thực thi K là các yếu tố quan trọng của hợp đồng này.

Trong mô hình tài chính đơn giản đang xem xét, chúng ta không có nhiều chọn lựa. Giả sử rằng, tài sản nền tảng của quyền mua kiểu châu Âu là chứng khoán, thời điểm đáo hạn hợp đồng là *T=1*. Người giữ hợp đồng sẽ làm như sau ở thời điểm đáo hạn:

- Nếu giá chứng khoán S_1, tại thời điểm *T=1* cao hơn *K* thì người giữ hợp đồng sẽ mua của người viết hợp đồng với giá *K* và đem bán ngay lại cho thị trường tài chính giá S_1 và thu được món lợi là $S_1 - K$.
- Nếu giá chứng khoán S_1, tại thời điểm *T=1* thấp hơn *K* thì người giữ hợp đồng sẽ không thực thi vì đơn giản là giá chứng khoán ở thị trường bên ngoài rẻ hơn giá của người viết hợp đồng. Trong trường hợp này, người giữ hợp đồng không thu được món lợi nào.

Vì lí do trên, nên ta có thể xem QMKCA là một tài sản mà lợi nhuận của nó tại thời điểm *T=1* là

$$\max(S_1 - K, 0)$$

Câu hỏi tự nhiên là

Giá của một QMKCA tại thời điểm t=0 phải là bao nhiêu?

Trước khi trả lời câu hỏi vừa nêu, ta giới thiệu một nguyên lý quan trọng trong thị trường tài chính đó là nguyên lý *đáp ứng để bảo hộ (Replication principle)*. Giả sử ta có một sản phẩm phái sinh hay *quyền tài chính* tổng quát hơn một QMKCA vừa xét, tức là sản phẩm có dạng $h(S_1)$ trong đó $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là một hàm số sao cho $h(S_1)$ cũng là một biến ngẫu nhiên. QMKCA ở trên có thể chọn một hàm riêng cho *h* như: $h(x) := \max(x - K, 0)$. Có rất nhiều khả năng khác nhau khi chọn hàm *h* để có nhiều quyền tài chính khác nhau. Nguyên lý đáp ứng để bảo hộ là

Nguyên lý đáp ứng để bảo hộ

Nếu có thể tìm được phương án đầu tư mà nó đáp ứng để bảo hộ hoàn toàn sản phẩm phái sinh theo nghĩa là phương án đầu tư này đảm bảo lợi nhuận chính xác như lợi nhuận của sản phẩm phái sinh tại thời điểm đáo hạn, thì giá của phương án đầu tư này phải trùng với giá của sản phẩm phái sinh.

Về mặt toán học, nguyên lý đáp ứng để bảo hộ có thể phát biểu như sau:

Định nghĩa 4

Một phương án đầu tư đáp ứng (a replicating strategy) hay một bảo hộ (hedge) đối với quyền tài chính $h(S_1)$ là một phương án đầu tư (x,ϕ) mà nó thỏa mãn $V_1(x,\phi) = h(S_1)$ hay thỏa mãn hai điều kiện tương đương sau:

$$(x - \phi S_0)(1+r) + \phi S_1(H) = h(S_1(H)) \tag{1}$$

$$(x - \phi S_0)(1+r) + \phi S_1(T) = h(S_1(T)) \tag{2}$$

Mệnh đề 2

Trong mô hình tài chính một chu kỳ đơn giản và không có cơ hội chênh lệch thị giá, giả sử $h(S_1)$ là một quyền tài chính và (x,ϕ) là phương án đầu tư bảo hộ cho $h(S_1)$ thì x là giá của quyền tài chính $h(S_1)$ tại thời điểm t=0.

Một cách tìm giá cho quyền tài chính là xét phương án đầu tư đáp ứng và xem số tiền đầu tư ban đầu cho phương án đáp ứng này là giá của quyền tài chính đó. Làm thế nào xác định phương án đầu tư đáp ứng? Có phải phương án đầu tư đáp ứng luôn hiện hữu hay không? Từ hệ gồm hai phương trình (1) và (2), ta có thể giải và tìm được hai ẩn *x* và ϕ; trừ vế đối vế của (1) cho (2), ta tìm được

$$\phi = \frac{h(S_1(H)) - h(S_1(T))}{S_1(H) - S_1(T)} \tag{3}$$

Thay (3) vào (1) hoặc (2) ta tìm được *x*. Vì tính sư phạm, ta có thể viết hệ (1) và (2) dưới dạng

$$x + \phi\left(\frac{1}{1+r} S_1(H) - S_o\right) = \frac{1}{1+r} h(S_1(H)) \tag{4}$$

$$x + \phi\left(\frac{1}{1+r} S_1(T) - S_o\right) = \frac{1}{1+r} h(S_1(T)) \tag{5}$$

Bây giờ ta định nghĩa

$$\tilde{p} := \frac{1+r-d}{u-d} \tag{6}$$

Từ giả thiết $d < 1+r < u$ suy ra $0 < \tilde{p} < 1$. Ta có

$$1-\tilde{p} = 1-\frac{1+r-d}{u-d}$$
$$= \frac{u-1-r}{u-d}$$

Với $\tilde{p}$ trong (6), ta có

$$\frac{1}{1+r}\left(\tilde{p}S_1(H)\right)+(1-\tilde{p}S_1(T))) = \frac{1}{1+r}\left(\frac{1+r-d}{u-d}S_0u - \frac{u-1-r}{u-d}S_0d\right)$$
$$= S_0\frac{(1+r-d)u+(u-(1+r))d}{(u-d)(1+r)}$$
$$= S_0$$

Nhân (4) cho $\tilde{p}$ và nhân (5) cho *1-* $\tilde{p}$ rồi cộng vế đối vế ta được

$$x+\phi\left(\frac{1}{1+r}[\tilde{p}S_1(H)+(1\text{-}\tilde{p})S_1(T)]\text{-}S_0\right)=$$
$$\frac{1}{1+r}[\tilde{p}h(S_1(H))+(1-\tilde{p})h(S_1(T))]$$

Hay tương đương với

$$x = \frac{1}{1+r}[\tilde{p}h(S_1(H))+(1-\tilde{p})h(S_1(T))] \quad (7)$$

Vì $u-d \neq 0$ nên ta luôn tìm được phương án đầu tư đáp ứng trong mô hình tài chính đơn giản một chu kỳ. Mô hình tài chính có tính chất này được gọi là mô hình *đầy đủ (complete)* và ngược lại ta gọi là mô hình tài chính không đầy đủ. Trong mô hình tài chính không đầy đủ ta không thể dùng kỹ thuật định giá phái sinh theo nguyên lý đáp ứng để bảo hộ. Công thức (3) thường được gọi là công thức *bảo hộ delta*.

Điều đáng lưu ý là giá *x* của quyền tài chính được tính theo công thức trên thì không phụ thuộc vào xác suất *p* và *1-p* của sự xuất hiện trạng thái *H* và *T*. Đặc biệt nó không trùng với kỳ vọng lợi nhuận đã khấu hao của quyền tài chính được tính theo độ đo xác suất *P*. n.l. tổng quát

$$x \neq Ep\left[\frac{1}{1+r}h(S_1)\right] = \frac{1}{1+r}[ph(S_1(H))+(1\text{-}p)h(S_1(T))]$$

Phương trình sau chỉ đúng khi $p = \tilde{p}$ hay $1\text{-}p = 1\text{-}\tilde{p}$ hay tương đương với $h(S_1(H)) = h(S_1(T))$, đây là trường hợp mà lợi nhuận của quyền chọn là tất định, n.l. không có tính ngẫu nhiên. Trường hợp này rất khó xảy ra trong hiện thực. Mặt khác, nếu ta định nghĩa một độ đo xác suất mới trên không gian tài chính mẫu hai trạng thái của chúng ta $\Omega = \{H,T\}$ bởi

$\tilde{P}(H) = \tilde{p}, \tilde{P}(T) = 1 - \tilde{p}$

Thì x chính là giá trị kỳ vọng lợi nhuận đã khấu hao lấy theo độ đo xác suất mới $\tilde{P}$:

$$x = E_{\tilde{p}}\left[\frac{1}{1+\mathrm{r}} h(S_1)\right] \qquad (8)$$

Về sau ta thường viết $Q \equiv \tilde{P}$ và gọi là *độ đo xác suất rủi ro trung tính*, vì dưới độ đo này, giá quyền tài chính chỉ phụ thuộc vào kỳ vọng của lợi nhuận mà không bị chi phối bởi rủi ro nào. Như chúng ta sẽ thấy trong phần tiếp theo, độ đo xác suất rủi ro trung tính hay tương đương với độ đo martingale có vai trò quan trọng trong việc định giá của sản phẩm phái sinh trong thị trường tài chính không đầy đủ, thị trường mà ta không thể áp dụng cách tính giá phái sinh như trên.

2.2. Mô hình tài chính một chu kỳ tổng quát

Bây giờ ta xét mô hình tài chính một chu kỳ tổng quát hơn. Trong thị trường này, NĐT có thể đầu tư trong thị trường tiền tệ như gửi tiết kiệm ở ngân hàng (hoặc mua trái phiếu không rủi ro của chính phủ) với lãi suất $r > 0$, có thể đầu tư vào thị trường chứng khoán, với giả thiết trong thị trường có một số hữu hạn chứng khoán $S^1, S^2, \ldots, S^N$ và giá của mỗi cổ phiếu chứng khoán thứ *i* tại thời điểm *t=0* và *t=1* lần lượt là $S^i{}_0$ và $S^i{}_1$.Giá của chứng khoán tại thời điểm hiện tại t=0 thì được biết, nhưng giá chứng khoán tại thời điểm *t=1* lại có tính ngẫu nhiên phụ thuộc vào sự xuất hiện của một trong *k* trạng thái tài chính (hay kịch bản) $\omega_i, i = 1, 2, \ldots, k$ thuộc

$\Omega := \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k\}$

Giả sử rằng có độ đo xác suất P xác định trên Ω, với $P(\{\omega_i\}) \equiv P(\omega_i) > 0,\ i = 1, 2, \ldots, k$, chỉ xác suất để xuất hiện trạng thái ω_i.Do đó giá chứng khoán $S^1{}_i$ là một biến ngẫu nhiên xác định trên Ω:

$S^i{}_1 : \Omega \to \mathbb{R}$

$S^i{}_1(\omega)$ là giá của chứng khoán thứ *i* tại thời điểm *t=1* khi trạng thái $\omega \in \Omega$ xuất hiện.

Định nghĩa 5:

Trong mô hình tài chính một chu kỳ tổng quát đang xét, một phương án đầu tư là một cặp thứ tự (x, ϕ) trong đó x là tổng số tiền đầu tư ban đầu và ϕ là danh mục chứng khoán đầu tư, nó là một véc tơ gồm N thành phần $\phi := (\phi^1, \phi^2, \ldots, \phi^N) \in \mathbb{R}^N$ với ϕ^i là số đơn vị cổ phiếu của chứng khoán thứ i được mua tại thời điểm t=0.

Cho trước một phương án đầu tư (x, ϕ), thì số tiền còn lại sau khi mua chứng khoán

$$x-\sum_{i=1}^{N}\phi^{i}S^{i}{}_{0}$$

sẽ được gửi trong tài khoản tín dụng.

Định nghĩa 6:

Quá trình giá của phương án đầu tư (x,ϕ) trong mô hình tài chính một chu kỳ tổng quát được cho bởi $(V_0(x,\phi),V_1(x,\phi))$, trong đó $V_0(x,\phi)=x$ và $V_1(x,\phi)$ là biến ngẫu nhiên.

$$V_1(x,\phi)=(x-\sum_{i=1}^{N}\phi^{i}S^{i}{}_{0})(1+r)+\sum_{i=1}^{N}\phi^{i}S^{i}{}_{0} \qquad (9)$$

Quá trình lời (hay lỗ, được xem như lời âm) $G(x,\phi)$ của phương án đầu tư (x,ϕ) là biến ngẫu nhiên xác định bởi

$$G(x,\phi):=(x-\sum_{i=1}^{N}\phi^{i}S^{i}{}_{0})r+\sum_{i=1}^{N}\phi^{i}\Delta S^{i}{}_{1} \qquad (10)$$

trong đó $\Delta S^{i}{}_{1}$ là độ thay đổi hay số gia của giá chứng khoán thứ i,

$$\Delta S^{i}{}_{1}:=S^{i}{}_{1}-S^{i}{}_{0} \qquad (11)$$

Qua sự tính toán đơn giản, ta có hệ thức liên hệ sau

$$V_1(x,\phi)=V_0(x,\phi)+G(x,\phi) \qquad (12)$$

Lưu ý rằng phương trình trên chỉ mối liên hệ giữa các biến ngẫu nhiên và nó đúng với mọi trạng thái $\omega\in\Omega$ xảy ra tại thời điểm *t=1*. Trong trường hợp mọi hàng hóa trong thị trường tài chính đều phải chiết khấu thì *quá trình giá chứng khoán đã chiết khấu $\hat{S}_t^i$ (discounted stock price process)* được định nghĩa với $i=1,2,\ldots,N$

$$\hat{S}_0^i:=S^{i}{}_{0}$$

$$\hat{S}_1^i:=\frac{1}{1+r}.S^{i}{}_{1}$$

Ta cũng định nghĩa *quá trình giá đã chiết khấu* tương ứng với phương án đầu tư (x,ϕ) là

$$\hat{V}_0(x,\phi):=x$$

$$\hat{V}_1(x,\phi):=(x-\sum_{i=1}^{N}\phi^{i}S^{i}{}_{0})+\sum_{i=1}^{N}\phi^{i}\hat{S}_1^i$$

và quá trình đã lời chiết khấu là

$$\hat{G}(x,\phi):=\sum_{i=1}^{N}\phi^{i}\Delta\hat{S}^{i} \qquad (13)$$

trong đó $\Delta\hat{S}^i := \hat{S}^i_1 - \hat{S}^i_0$. Từ các định nghĩa trên suy ra, đối với $t \in \{0,1\}, B_0 = 1; B_1 = 1 + r$ thì

$$\hat{V}_t = \frac{V_t}{B_t} \tag{14}$$

Và

$$\hat{V}_1(x,\phi) = \hat{V}_0(x,\phi) + \hat{G}(x,\phi) \tag{15}$$

Định nghĩa 7:

Trong mô hình tài chính đang xét, một phương án đầu tư (x,ϕ) (trong đó x tổng số tiền đầu tư ban đầu và $\phi := (\phi^1, \phi^2, \ldots, \phi^N)$ là danh mục đầu tư, với ϕ^i chỉ số đơn vị cổ phiếu của chứng khoán S^i) là phương án chênh lệch thị giá nếu:

1. $x = V_0(x,\phi) = 0$
2. $V_1(x,\phi) \geq 0$
3. $E[V_1(x,\phi)] = \sum_{i=1}^{k} P(\omega_i) V_1(x,\phi)(\omega_i) > 0$

Ghi chú sau rất tiện dụng để kiểm tra tính chất chênh lệch thị giá.

Ghi chú: *Điều kiện 3 trong định nghĩa 7 thì tương đương với*

3'. có $\omega \in \Omega$ sao cho $V_1(x,\phi)(\omega) > 0$.

Ta có thể kiểm tra tính chất chênh lệch thị giá có hay không ở thị trường tài chính thông qua quá trình giá đã chiết khấu hay quá trình lời đã chiết khấu của phương án, được phát biểu qua các mệnh đề sau, việc kiểm chứng thì đơn giản.

Mệnh đề 3

Trong mô hình tài chính đang xét, một phương án đầu tư (x,ϕ) là chênh lệch thị giá nếu và chỉ nếu các điều kiện sau thỏa:

1. $x = \hat{V}_0(x,\phi) = 0$
2. $\hat{V}_1(x,\phi) \geq 0$
3. $\mathrm{E}\left[\hat{V}_1(x,\phi)\right] = \sum_{i=1}^{k} P(\omega_i)\hat{V}_1(x,\phi)(\omega_i) > 0 \Leftrightarrow \exists \omega \in \Omega : \hat{V}_1(x,\phi)(\omega) > 0$

hay điều kiện tương đương sau đây thỏa:

1. $x = \hat{V}_0(x,\phi) = 0$
2. $\hat{G}(x,\phi) \geq 0$
3. $\mathrm{E}[\hat{G}(x,\phi)] = \sum_{i=1}^{k} P(\omega_i)\hat{G}(x,\phi)(\omega_i) > 0 \Leftrightarrow \exists \omega \in \Omega : \hat{G}(x,\phi)(\omega) > 0$

Định nghĩa 8:

Trong mô hình tài chính đang xét, một độ đo xác suất Q xác định trên Ω được gọi là độ đo xác suất rủi ro trung tính nếu nó thỏa mãn hai điều kiện sau đây:

1. $Q(\omega) > 0, \forall \omega \in \Omega$

2. $E_Q[\Delta \hat{S}^i] = 0$ hay tương đương $E\left[\frac{1}{1+r} S^i{}_1\right] = S^i{}_0$ khi $i = 1, 2, \dots, N$

Bây giờ ta phát biểu và chứng minh định lý chính của bài báo này, *định lý căn bản về việc định giá tài sản,* đây là một trong những nguyên lý nền tảng của toán tài chính:

Định lý

(*Nguyên lý căn bản định giá tài sản*) *Thị trường tài chính không có cơ hội chênh lệch thị giá nếu và chỉ nếu tồn tại một độ đo xác suất rủi ro trung tính.*

Để chứng minh định lý này, ta cần một số kiến thức chuẩn bị. Trước tiên, ta có thể xem biến ngẫu nhiên xác định trên không gian mẫu có *k* phần tử Ω là những véc tơ trong không gian Euclide *k*–chiều $\mathbb{R}^k$, điều này có thể đồng nhất biến ngẫu nhiên X:

$$X \Leftrightarrow (X(\omega_1), X(\omega_2), \dots, X(\omega_k)) \in \mathbb{R}^k$$

Sự đồng nhất này được hiểu như là một biến ngẫu nhiên xác định trên Ω, được xem như là một véc tơ trong $\mathbb{R}^k$ và mỗi véc tơ trong $\mathbb{R}^k$ được xem như là một biến ngẫu nhiên xác định trên Ω. Do đó, ta có thể đồng nhất tập hợp các biến ngẫu nhiên xác định trên Ω với tập $\mathbb{R}^k$. Một độ đo xác suất *Q* trên Ω được đồng nhất với một véc tơ trong đơn hình chuẩn của $\mathbb{R}^k$:

$$Q \Leftrightarrow (X_1, X_2, \dots, X_k) \in \mathbb{R}^k; X_i \geq 0; \sum_{i=1}^{N} X_i = 1$$

Từ đây về sau ta sử dụng sự đồng nhất này và viết *X* cho véc tơ biểu diễn biến ngẫu nhiên *X* và *Q* cho véc tơ biểu diễn độ đo xác suất *Q*. Do đó, chẳng hạn kỳ vọng của *X* tính theo độ đo xác suất *Q* trên Ω được viết

$$E_Q[X] = \sum_{i=1}^{k} X(\omega_i) Q(\omega_i) \equiv \langle X, Q \rangle.$$

trong đó <.,.> là tích vô hướng trong $\mathbb{R}^k$.

Bây giờ ta xét các tập hợp

$W := \{X \in \mathbb{R}^k : X = \hat{G}(x, f)$ với một phương án (x, f) nào đó$\}$.

Như vậy ta có thể xem một phần tử thuộc W, không gian con của $\mathbb{R}^k$ như là giá đã chiết khấu của một phương án đầu tư tại thời điểm *t=1* với vốn ban đầu là *x=0*.

Từ khái niệm *có lời, hay lời dương*, ta định nghĩa:

$$A := \{X \in \mathbb{R}^k : X \geq 0; X \neq 0\}$$

Với các định nghĩa trên ta có:

Không có cơ hội chênh lệch thị giá $\Leftrightarrow W \cap A = \emptyset$

Những phần tử thuộc $W \cap A$ đúng là giá đã chiết khấu của phương án đầu tư chênh lệch thị giá tại thời điểm *t=1*.

Phần bù trực giao của W được định nghĩa:

$$W^{\perp} := \{Y \in \mathbb{R}^k : \langle Y, X \rangle = 0, \forall X \in W\}$$

Từ tính chất của độ đo xác suất ta định nghĩa:

$$P^{+} := \left\{ X \in \mathbb{R}^k : X_i > 0; \sum_{i=1}^{k} X_i = 1 \right\}$$

Tập hợp này có thể đồng nhất với tập hợp độ đo xác suất trên W. Ta có bổ đề sau:

Bổ đề

Một độ đo Q là độ đo xác suất rủi ro trung tính trên W nếu và chỉ nếu $Q \in P^{+} \cap W^{\perp}$.

Chứng minh:

$(\Rightarrow)$: Giả sử Q là độ đo xác suất rủi ro trung tính trên W, thì theo tính chất 1 của định nghĩa 8 $Q \in P^{+}$. Mặt khác theo tính chất 2 của định nghĩa 8 và định nghĩa của quá trình lời $\hat{G}(x,\phi)$ ta có $X = \hat{G}(x,\phi) \in W$

$$\langle X, Q \rangle = E_Q[\hat{G}(x,\phi)] = E_Q\left[\sum_{i=1}^{k} \phi^i \Delta \hat{S}^i\right] = \sum_{i=1}^{k} \phi^i E_Q[\Delta \hat{S}^i] = 0$$

(vì $E_Q[\Delta \hat{S}^i] = 0$). Do đó, $Q \in W^{\perp}$. Vậy $Q \in P^{+} \cap W^{\perp}$.

$(\Leftarrow)$: Lấy $Q \in P^{+} \cap W^{\perp}$, thì Q là một độ đo xác suất thỏa điều kiện 1 của định nghĩa 8. Cho trước $i = 1, 2, \ldots, k$, xét phương án đầu tư (x,ϕ) với $x = S^i{}_0$ và $\phi = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$.

Phương án này chỉ đầu tư ở chứng khoán S^i. Quá trình lợi ích đã chiết khấu $\hat{G}(x,\phi)$ rõ ràng thỏa mãn $\hat{G}(x,\phi) = \Delta \hat{S}^i$. Mặt khác, ta lại có $\hat{G}(x,\phi) \in W$ *và vì* $Q \in W^{\perp}$ nên

$$0 = \langle \hat{G}(x,\phi), Q \rangle = E_Q[\Delta \hat{S}^i]$$

Do đó Q thỏa mãn điều kiện 2 của định nghĩa 8 nên nó là độ đo xác suất rủi ro trung tính.

Định nghĩa 9:

Ta ký hiệu $M = P^{+} \cap W^{\perp}$ *là tập hợp tất cả các độ đo xác suất rủi ro trung tính.*

Chứng minh (Định lý): Với độ đo xác suất gốc *P* trên Ω và tập ở trên , ta định nghĩa:

$A^{+} := \{X \in A :< X, P >= 1\}$

Vì $A^{+} \in A$, nên ta cũng có

Không có cơ hội chênh lệch thị giá $\Rightarrow W \cap A^{+} = \varnothing$

Mặt khác, A^{+} là tập con lồi, đóng và bị giới nội của $\mathbb{R}^{k}$ nên theo định lý siêu phẳng tách của Hahn-Banach, có một véc tơ $Y \in W^{\perp}$ sao cho

$$< X, Y >> 0, \forall X \in A^{+} \tag{16}$$

Với mỗi $i = 1, 2, \ldots, k$, gọi véc tơ X^{i} là véc tơ trong $\mathbb{R}^{k}$ mà thành phần thứ *i* là $\frac{1}{P(\omega_i)}$ còn các thành phần khác thì bằng 0. Như thế

$$< X^{i}, P >= \frac{1}{P(\omega_i)} P(\omega_i) = 1 .$$

Do đó, $X^{i} \in A^{\perp}$. Ký hiệu Y_i là thành phần thứ *i* của véc tơ Y, thì từ (16) suy ra

$$0 << X^{i}, Y >= \frac{1}{P(\omega_i)} Y_i$$

Do đó $Y(\omega_i) = Y_i$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, k$. Bây giờ ta định nghĩa *Q* bởi

$$Q(\omega_i) := \frac{Y(\omega_i)}{Y(\omega_1) + Y(\omega_2) + \ldots + Y(\omega_k)}$$

Thì $Q \in P^{+}$, mặt khác vì Q là tích của một số vô hướng với Y, trong khi đó $W^{\perp}$ là không gian véc tơ con nên suy ra $Q \in W^{+}$. Vậy

$$Q \in P^{+} \cap W^{\perp}$$

và do bổ đề, Q là độ đo xác suất rủi ro trung tính trên Ω.

Để chứng minh chiều ngược, giả sử rằng có một độ đo xác suất rủi ro trung tính Q và gọi (x, ϕ) là phương án đầu tư, theo như chứng minh của bổ đề thì

$$E[\hat{G}(x, \phi)] = 0$$

Nếu chúng ta giả sử rằng $\hat{G}(x, \phi) \geq 0$ thì từ phương trình trên suy ra $\hat{G}(x, \phi)(\omega) = 0$ với mọi $\omega \in \Omega$. Do đó theo mệnh đề 3, không thể tồn tại bất cứ một phương án đầu tư nào thỏa mãn toàn bộ các điều kiện của một phương án có chênh lệch thị giá. Vậy định lý đã được chứng minh.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Văn Hữu, Vương Quân Hoàng (2007), *Các phương pháp toán học trong tài chính*, Nxb Đại học Quốc gia Hà Nội.
2. Nguyễn Chí Long (2008), *Xác suất thống kê và quá trình ngẫu nhiên*, Nxb Đại học Quốc gia TP HCM.
3. Trần Hùng Thao (2004), *Nhập môn toán học Tài chính*, Nxb KHKT Hà Nội.
4. Trần Hùng Thao (2009), "Toán học Tài chính, một ngành khoa học đang phát triển mạnh", *Thông tin Toán học – Hội Toán học Việt Nam*, 13(2), tr. 13-16.
5. Robert J Elliott and P.E.Kopp (2005), *Mathematics of Financial Markets*, Springe Finance, Second Edition.
6. Hans Foellmer and Alexander Schied (2002), *An Introduction in Discrete time*, Walter de Gruyter.
7. B. Guerrien – Nguyễn Đôn Phước (dịch) (2007), *Từ điển phân tích kinh tế*, Nxb Tri thức.
8. G.Pennacchi (2008), *Theory of Asset Pricing*, Pearson Education. Inc.
9. Pliska (1997), *Introduction to Mathematical Finance*, Blackwell Publishing.
10. Steven E.Shreve (2005), *Stochastic Calculus for Finance Volume 1: The Binomial Asset Pricing Model*, Springer.