CÁC BIỂU DIỄN CỦA NHÓM HEISENBERG TỔNG QUÁT $\mathrm{H}_{\mathbb{R}}^{(\mathrm{m,n})}$

Nguyễn Việt Hải [1]

1. Mở đầu

Năm 1960, A.A. Kirillov [7] đã đưa ra phương pháp quĩ đạo đối với nhóm Lie luỹ linh thực. Công trình đó của ông được tổng quát hoá sang các nhóm giải được kiểu I bởi L. Auslander và B. Kostant [1] vào năm 1970 với cách làm độc đáo. Phép chứng minh của hai nhà toán học này dựa trên sự tồn tại của *phân cực phức* thoả mãn các điều kiện nào đó.

Cách làm của Kirillov đối với nhóm Lie luỹ linh thực cũng đã được mở rộng sang các nhóm giải được exponential đặc trưng bởi ánh xạ exp từ đại số $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie(G)}$ sang nhóm Lie G ứng với nó, là một vi phôi. Đối với loại nhóm này ta có song ánh giữa các K-quĩ đạo và các biểu diễn, đồng thời có thể sử dụng biểu diễn cảm sinh bằng cách xây dựng tường minh một phân cực như đối với nhóm Lie luỹ linh thực. Trong các bài [3], [4], [5], [6] chúng tôi đã thu được các kết quả đầy đủ và tường minh đối với loại nhóm này. Mặc dù lí thuyết của Kirillov là như vậy nhưng trong nhiều trường hợp cụ thể, nhất là các trường hợp số chiều lớn, việc tính các K-quĩ đạo và các biểu diễn tương ứng còn rất khó khăn. Trong bài báo này chúng tôi nghiên cứu phương pháp quĩ đạo đối với nhóm Heisenberg tổng quát $\mathrm{H}_{\mathbb{R}}^{(\mathrm{m,n})}$ (trường hợp 3 chiều đã được trình bày trong [5]) theo cách chỉ ra các phân cực của nhóm để xây dựng các biểu diễn unita bất khả qui.

Bài báo được sắp xếp như sau: ở $1 chúng tôi giới thiệu các khái niệm *phân cực và tương ứng Kirillov* ; $2 dành cho việc tính các K-quĩ đạo của nhóm Heisenberg $\mathrm{H}_{\mathbb{R}}^{(\mathrm{m,n})}$. Cuối cùng, trong $3, chúng tôi tìm các phân cực, mô tả các biểu diễn unita, bất khả qui của nhóm ứng với các K-quĩ đạo qua tương ứng Kirillov.

Kí hiệu. Như thông thường, $\mathrm{Sp(n,\mathbb{R})}$ kí hiệu nhóm symplectic thực bậc n. Chúng tôi gọi $R^{(m,n)}$ là tập tất cả các ma trận cỡ $m \times n$ với các phần tử thuộc vành giao hoán R. Với mỗi $A \in R^{(m,m)}$, $\mathbf{Tr}(A)$ kí hiệu vết của A. Ma trận đồng nhất cấp m được kí hiệu bởi E_m.

[1] TS, Khoa Toán Trường ĐH Hải Phòng.

2. Phân cực và tương ứng Kirillov

Chúng tôi nhắc lại các kết quả của Kirillov về biểu diễn unita của nhóm Lie luỹ linh thực (xem [8],[2]). Gọi G là nhóm Lie liên thông, đơn liên và đại số Lie của nó, $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie(G)}$, là không gian tiếp xúc tại đơn vị e. Dễ thấy mỗi phần tử $g \in \mathrm{G}$ có thể xác định một ánh xạ $A(g) : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}, x \mapsto gxg^{-1}$ cố định phần tử $e \in \mathrm{G}$. Từ đó tồn tại một ánh xạ tiếp xúc tương ứng

$$A(g)_* : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

$$X \in \mathfrak{g} \mapsto \frac{d}{dt} g \exp(tX) g^{-1}|_{t=0} \in \mathfrak{g}.$$

Ánh xạ này xác định một tác động, thường kí hiệu bởi $\mathrm{Ad_G}$, của nhóm G trong đại số Lie(G). Đặt $K = \mathrm{Ad}^*_{\mathrm{G}} : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{g}^*)$ xác định bởi $\langle K(g)F, X\rangle := \langle F, \mathrm{Ad_G}(g^{-1})X\rangle$, với mọi $F \in \mathfrak{g}^*,\ X \in \mathfrak{g},\ g \in \mathrm{G}$. K được gọi là *biểu diễn đối phụ hợp* hay *K-biểu diễn* của nhóm G. Ta kí hiệu *quĩ đạo đối phụ hợp* hay *K-quĩ đạo* của G trong $\mathfrak{g}^*$, đi qua F bởi

$$\Omega_F = K(\mathrm{G})F := \{K(g)F | g \in \mathrm{G}\}.$$

Dễ thấy, không gian đối ngẫu $\mathfrak{g}^*$ được phân tích thành hợp rời rạc các K-quĩ đạo. Với mỗi $F \in \mathfrak{g}^*$, ta xác định dạng song tuyến tính B_F trên $\mathfrak{g}$ bởi

$$B_F(X, Y) =< [X, Y], F >, \quad X, Y \in \mathfrak{g}. \tag{1}$$

Định nghĩa 2.1.

(1) Đại số Lie con $\mathfrak{h}$ của $\mathfrak{g}$ được gọi là phụ thuộc $F \in \mathfrak{g}^*$ nếu $B_F|_{\mathfrak{h}\times\mathfrak{h}} = 0$.

(2) Đại số Lie con $\mathfrak{h}$ của $\mathfrak{g}$ phụ thuộc $F \in \mathfrak{g}^*$ được gọi là một phân cực của $\mathfrak{g}$ đối với F nếu $\mathfrak{h}$ có tính chất: nếu P là không gian véc-tơ con của $\mathfrak{g}$ chứa $\mathfrak{h}$ và $B_F|_{P\times P} = 0$ thì $\mathfrak{h} = P$.

(3) Cho $F \in \mathfrak{g}^*$ và $\mathfrak{h}$ là phân cực của $\mathfrak{g}$ đối với F. Gọi H *là nhóm con đóng liên thông, đơn liên của* G *mà* Lie(H) $= \mathfrak{h}$ *. Hàm $\chi_{F,\mathfrak{h}}$ xác định như sau gọi là đặc trưng unita của* H*:*

$$\chi_{F,\mathfrak{h}}(\exp_{\mathrm{H}}(\mathrm{X})) = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}<\mathrm{X},\mathrm{F}>}, \mathrm{X} \in \mathfrak{h} \tag{2}$$

trong đó, $\exp_{\mathrm{H}} : \mathfrak{h} \longrightarrow \mathrm{H}$ *kí hiệu ánh xạ exponential từ $\mathfrak{h}$ sang H, (*$\exp_{\mathrm{H}}$ *là một toàn ánh).*

Trong [7], Kirillov đã chứng minh được các định lí quan trọng sau:

Định lí 2.2. G *là nhóm Lie luỹ linh thực, đơn liên và* $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie(G)}$*. Nếu đã có biểu diễn unita bất khả qui* π *của* G *thì tồn tại* $\ell \in \mathfrak{g}^*$ *và một phân cực* $\mathfrak{h}$ *của* $\mathfrak{g}$ *đối với* F *sao cho* $\pi \cong \mathrm{Ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}\chi_{\mathrm{F},\mathfrak{h}}$ *với* $\chi_{F,\mathfrak{h}}$ *là đặc trưng unita của* H *xác định bởi (2).*

Định lí 2.3. G *là nhóm Lie luỹ linh thực, đơn liên và* $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie(G)}$*. Nếu* $F \in \mathfrak{g}^*$ *thì tồn tại một phân cực* $\mathfrak{h}$ *của* $\mathfrak{g}$ *đối với* F *sao cho biểu diễn đơn thức* $\mathrm{Ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}\chi_{\mathrm{F},\mathfrak{h}}$ *là biểu diễn bất khả qui. Nếu* F' *là một phần tử của* $\mathfrak{g}^*$ *mà thuộc* K*-quĩ đạo* $K(\mathrm{G}) := Ad_G^*(\mathrm{G})F$ *và* $\mathfrak{h}'$ *là một phân cực của* $\mathfrak{g}$ *đối với* F' *thì các biểu diễn đơn thức* $\mathrm{Ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}\chi_{\mathrm{F},\mathfrak{h}}$ *và* $\mathrm{Ind}_{\mathrm{H}'}^{\mathrm{G}}\chi_{\mathrm{F}',\mathfrak{h}'}$ *sẽ tương đương unita, trong đó kí hiệu* H *và* H' *là các nhóm con đóng đơn liên,* $\mathfrak{h} = \mathrm{Lie(H)}, \mathfrak{h}' = \mathrm{Lie(H')}$*. Ngược lại, nếu* $\mathfrak{h}$ *và* $\mathfrak{h}'$ *là các phân cực của* $\mathfrak{g}$ *đối với* $F \in \mathfrak{g}^*$ *và* $F' \in \mathfrak{g}^*$ *tương ứng sao cho các biểu diễn đơn thức* $\mathrm{Ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}\chi_{\mathrm{F},\mathfrak{h}}$ *và* $\mathrm{Ind}_{\mathrm{H}'}^{\mathrm{G}}\chi_{\mathrm{F}',\mathfrak{h}'}$ *của* G *là tương đương unita thì* F *và* F' *thuộc cùng một* K*-quĩ đạo của* G *trong* $\mathfrak{g}^*$*.*

Cuối cùng, với mỗi biểu diễn unita bất khả qui τ *của* G *đều tồn tại duy nhất một* K*-quĩ đạo* Ω *của* G *trong* $\mathfrak{g}^*$ *sao cho với mỗi dạng tuyến tính* $\ell \in \Omega$ *và mỗi phân cực* $\mathfrak{h}$ *của* $\mathfrak{g}$ *đối với* F*, các biểu diễn* τ *và* $\mathrm{Ind}_{\mathrm{H}}^{\mathrm{G}}\chi_{\ell,\mathfrak{h}}$ *đều tương đương unita.*

Định nghĩa 2.4. *Song ánh từ không gian* $\mathfrak{g}^*/\mathrm{G}$*, các* K*-quĩ đạo của* G *trong* $\mathfrak{g}^*$*, lên đối ngẫu unita* $\widehat{\mathrm{G}}$ *của* G *cho bởi Định lí 2.3 được gọi là tương ứng Kirillov của* G*.*

3. Nhóm Heisenberg tổng quát $\mathrm{H}_{\mathbb{R}}^{(\mathrm{m,n})}$

Với hai số nguyên dương bất kì m và n, ta xét nhóm Heisenberg (xem [9])

$$\mathrm{H}_{\mathbb{R}}^{(m,n)} = \left\{ (A, B, C) \mid A, B \in \mathbb{R}^{(n,m)},\ C \in \mathbb{R}^{(n,n)},\ C + BA^t \text{ đối xứng} \right\}$$

với qui tắc nhân

$$(A, B, C) \circ (A', B', C') = (A + A', B + B', C + C' + AB'^t - BA'^t).$$

Nhóm này được nhúng vào nhóm symplectic $\mathrm{Sp(m + n, \mathbb{R})}$ nhờ ánh xạ

$$\mathrm{H}_{\mathbb{R}}^{(m,n)} \ni (A, B, C) \longmapsto \begin{pmatrix} E_m & 0 & 0 & B^t \\ A & E_n & B & C \\ 0 & 0 & E_m & -A^t \\ 0 & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp(m + n, \mathbb{R})}.$$

Ta đi tìm các K-quĩ đạo của nhóm Heisenberg $\mathrm{H}_{\mathbb{R}}^{(\mathrm{m,n})}$ và mô tả mối liên hệ giữa các K-quĩ đạo và đối ngẫu unita của $\mathrm{H}_{\mathbb{R}}^{(\mathrm{m,n})}$ một cách tường minh.

Để cho gọn ta kí hiệu $\mathrm{G} := \mathrm{H}_{\mathbb{R}}^{(\mathrm{m,n})}$, $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie(G)}$ và $\mathfrak{g}^*$ là không gian đối ngẫu của $\mathfrak{g}$. Chú ý rằng có thể xem $\mathfrak{g}$ là đại số con gồm tất cả các ma trận thực cỡ $(m+n)\times(m+n)$ có dạng

$$X(\alpha,\beta,\gamma) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \beta^t \\ \alpha & 0 & \beta & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha^t \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}^{(n,m)},\ \gamma=\gamma^t\in\mathbb{R}^{(n,n)}$$

của đại số Li $\mathfrak{sp}(m+n,\mathbb{R}) = \mathrm{Lie(Sp(m+n,\mathbb{R}))}$. Với các tính toán đơn giản ta có:

$$[X(\alpha,\beta,\gamma),\ X(\delta,\epsilon,\xi)] = X(\alpha,\beta,\gamma)X(\delta,\epsilon,\xi) - X(\delta,\epsilon,\xi)X(\alpha,\beta,\gamma) =$$

$$= X(0,0,\alpha^t\epsilon+\epsilon^t\alpha-\beta^t\delta-\delta^t\beta). \tag{3}$$

Không gian đối ngẫu $\mathfrak{g}^*$ của $\mathfrak{g}$ có thể đồng nhất với không gian véc-tơ gồm các ma trận thực cỡ $(m+n)\times(m+n)$ có dạng

$$F(a,b,c) = \begin{pmatrix} 0 & a^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b^t & 0 & 0 \\ b & c & -a & 0 \end{pmatrix},\ a,b\in\mathbb{R}^{(n,m)},\ c=c^t\in\mathbb{R}^{(n,n)},\quad \text{sao cho}$$

$$< F(a,b,c), X(\alpha,\beta,\gamma) >= \mathbf{Tr}(F(a,b,c)\,X(\alpha,\beta,\gamma)) = 2\mathbf{Tr}(\alpha^t a + b^t\beta) + \mathbf{Tr}(c\gamma). \tag{4}$$

Biểu diễn phụ hợp Ad của G được cho bởi $\mathrm{Ad_G}(g)X = gXg^{-1}$ với $g\in\mathrm{G}$ và $X\in\mathfrak{g}$. Đối với $g\in\mathrm{G}$ và $F\in\mathfrak{g}^*$, gFg^{-1} không có dạng $F(a,b,c)$. Ta kí hiệu $(gFg^{-1})_*$ là bộ phận

$$\begin{pmatrix} 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 \end{pmatrix}$$

của ma trận gFg^{-1}. Khi đó dễ thấy rằng K-biểu diễn $K := \mathrm{Ad}_{\mathrm{G}}^* : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{g}^*)$ xác định bởi $K(g)F = (gFg^{-1})_*$ với $g\in\mathrm{G}$ và $F\in\mathfrak{g}^*$. Cụ thể hơn,

$$K(g)F(a,b,c) = F(a+cB, b-cA, c), \tag{5}$$

với $g = (A, B, C) \in \mathrm{G}$. Như vậy, K-quĩ đạo $\Omega_{a,b}$ của G tại $F(a, b, 0) \in \mathfrak{g}^*$ là *điểm đơn độc*

$$\Omega_{a,b} = K(F(a, b, 0)) = \{F(a, b, 0)\} \tag{6}$$

và K-quĩ đạo Ω_c của G tại $F(0, 0, c) \in \mathfrak{g}^*$ với $c \neq 0$ là

$$\Omega_c = K(F(0, 0, c)) = \{F(a, b, c) | a, b \in \mathbb{R}^{(n,m)}\} \cong \mathbb{R}^{(n,m)} \times \mathbb{R}^{(n,m)}. \tag{7}$$

Như thế, các K-quĩ đạo của G trong $\mathfrak{g}^*$ được phân thành hai lớp:

i. Điểm đơn độc $\{\Omega_{a,b} | a, b \in \mathbb{R}^{(n,m)}\} = \{F(a, b, 0)\}$ trong phẳng $c = 0$.

ii. Phẳng afin $\{\Omega_c | c = c^t \in \mathbb{R}^{(n,n)},\ c \neq 0\}$ song song với phẳng thuần nhất $c = 0$.

Vì G là nhóm Li luỹ linh liên thông và đơn liên nên theo A. Kirillov (xem [7] hoặc [8] trang 249), đối ngẫu unita $\widehat{\mathrm{G}}$ của G được cho bởi

$$\widehat{\mathrm{G}} = \left(\mathbb{R}^{(n,m)} \times \mathbb{R}^{(n,m)}\right) \coprod \left\{z \in \mathbb{R}^{(n,n)} \mid z = z^t,\ z \neq 0\right\}, \tag{8}$$

trong đó, $\coprod$ kí hiệu hợp rời rạc.

A. Kirillov khẳng định rằng mỗi K-quĩ đạo là một đa tạp symplectic nhưng ông không đưa ra phép chứng minh. Chúng tôi sẽ chứng minh sự kiện này đối với nhóm Heisenberg tổng quát $\mathrm{H}_{\mathbb{R}}^{(\mathrm{m,n})}$ một cách chi tiết. Cố định một phần tử F của $\mathfrak{g}^*$, ta xét dạng $\mathbb{R}$-song tuyến tính B_F trên $\mathfrak{g}$ xác đinh bởi

$$B_F(X, Y) = < F, [X, Y] > = < ad_{\mathfrak{g}}^*(Y)F, X >,\ X, Y \in \mathfrak{g}, \tag{9}$$

với $ad_{\mathfrak{g}}^* : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathrm{End}(\mathfrak{g}^*)$ kí hiệu vi phân của K-biểu diễn $K : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{g}^*)$. Cụ thể hơn, nếu $F = F(a, b, c),\ X = X(\alpha, \beta, \gamma),\ Y = X(\delta, \epsilon, \xi)$, thì

$$B_F(X, Y) = \mathbf{Tr}(F.[X, Y]) = \mathbf{Tr}\{c(\alpha^t\epsilon + \epsilon^t\alpha - \beta^t\delta - \delta^t\beta)\}. \tag{10}$$

Cố định $F \in \mathfrak{g}^*$, ta đặt

$$\mathrm{G}_F = \{g \subset \mathrm{G} | K(g)F = F\}$$

là nhóm con ổn định của tác động $K = \mathrm{Ad}^*$ của G lên $\mathfrak{g}^*$ tại F. Vì G_F là nhóm con đóng của G nên G_F là nhóm Li con của G. Gọi $\mathfrak{g}_F = \mathrm{Lie}(\mathrm{G}_F)$, khi đó dễ chứng minh được

$$\mathfrak{g}_F = \mathrm{rad}(B_F) = \{X \in \mathfrak{g} | \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}^*(X)F = 0\}. \tag{11}$$

Trong đó, $\mathrm{rad}(B_F)$ kí hiệu căn của B_F trong $\mathfrak{g}$. Ta gọi $\dot{B_F}$ là dạng $\mathbb{R}$-song tuyến tính không suy biến trên không gian véc-tơ thương $\mathfrak{g}/\mathrm{rad}(B_F)$ cảm sinh từ dạng B_F. Vì có thể đồng nhất không gian tiếp xúc của $\Omega_F \cong \mathrm{G}/\mathrm{G}_F$ với $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_F = \mathfrak{g}/\mathrm{rad}(B_F)$ nên ta thấy không gian tiếp xúc của Ω_F tại F là một không gian véc-tơ symplectic với dạng symplectic $\dot{B_F}$.

Ký hiệu $\widetilde{X}$ là trường véc-tơ nhẵn trên $\mathfrak{g}^*$ kết hợp với $X \in \mathfrak{g}$. Điều đó nghĩa là với mỗi $\ell \in \mathfrak{g}^*$, ta có:

$$\widetilde{X}(\ell) = ad^*_{\mathfrak{g}}(X)\, \ell. \tag{12}$$

Chúng ta xác định 2-dạng B_{Ω_F} trên Ω_F bởi

$$B_{\Omega_F}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) = B_{\Omega_F}(ad^*_{\mathfrak{g}}(X)F, ad^*_{\mathfrak{g}}(Y)F) := B_F(X, Y), \tag{13}$$

với $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Bổ đề 3.1. *Dạng B_{Ω_F} không suy biến.*

Chứng minh. Giả sử $\widetilde{X}$ là trường véc-tơ nhẵn $\mathfrak{g}^*$ kết hợp với $X \in \mathfrak{g}$ sao cho $B_{\Omega_F}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) = 0$ với mọi $\widetilde{Y}$ ứng với $Y \in \mathfrak{g}$. Vì $B_{\Omega_F}(\widetilde{X}, \widetilde{Y}) = B_F(X, Y) = 0$ với mọi $Y \in \mathfrak{g}$, $X \in \mathfrak{g}_F$ nên $\widetilde{X} = 0$. Do đó B_{Ω_F} không suy biến.

Bổ đề 3.2. *B_{Ω_F} là dạng đóng.*

Chứng minh. Nếu $\widetilde{X_1}, \widetilde{X_2}, \widetilde{X_3} \in \mathfrak{g}^*$ là ba trường véc-tơ nhẵn kết hợp với X_1, X_2, $X_3 \in \mathfrak{g}$ thì

$$\begin{aligned} dB_{\Omega_F}(\widetilde{X_1}, \widetilde{X_2}, \widetilde{X_3}) &= \widetilde{X_1}(B_{\Omega_F}(\widetilde{X_2}, \widetilde{X_3})) - \widetilde{X_2}(B_{\Omega_F}(\widetilde{X_1}, \widetilde{X_3})) + \widetilde{X_3}(B_{\Omega_F}(\widetilde{X_1}, \widetilde{X_2})) \\ &\quad - B_{\Omega_F}([\widetilde{X_1}, \widetilde{X_2}], \widetilde{X_3}) + B_{\Omega_F}([\widetilde{X_1}, \widetilde{X_3}], \widetilde{X_2}) - B_{\Omega_F}([\widetilde{X_2}, \widetilde{X_3}], \widetilde{X_1}) \\ &= - < F, [[X_1, X_2], X_3] + [[X_2, X_3], X_1] + [[X_3, X_1], X_2] >= 0 \end{aligned}$$

(theo đồng nhất thức Jacobi). Do đó B_{Ω_F} là dạng đóng.

Tóm lại, (Ω_F, B_{Ω_F}) là đa tạp symplectic có chiều $2mn$ hoặc 0.

4. Các biểu diễn unita bất khả qui của $\mathrm{H}_{\mathbb{R}}^{(\mathrm{m,n})}$

Để mô tả các biểu diễn unita bất khả qui của G ứng với các K-quĩ đạo qua tương ứng Kirillov chúng ta phải xác định cực của $\mathfrak{g}$ đối với dạng tuyến tính $F \in \mathfrak{g}^*$. Có hai trường hợp sau:

4.1. Trường hợp suy biến

Khi $F = F(a, b, 0)$. Theo (6), $\Omega_F = \{F(a, b, 0)\}$ là một điểm đơn độc. Từ (10) ta suy ra $B_F(X, Y) = 0$ với mọi $X, Y \in \mathfrak{g}$. Như thế $\mathfrak{g}$ là cực duy nhất của $\mathfrak{g}$ đối với F. Tương ứng Kirillov nói rằng biểu diễn unita bất khả qui $\pi_{a,b}$ của G ứng với K-quĩ đạo Ω_F là

$$\pi_{a,b}(\exp \mathrm{X}(\alpha, \beta, \gamma)) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} < \mathrm{F}, \mathrm{X}(\alpha, \beta, \gamma) >} = \mathrm{e}^{4\pi \mathrm{i} \mathbf{Tr}(\mathrm{a}^{\mathrm{t}}\alpha + \mathrm{b}^{\mathrm{t}}\beta)}. \tag{14}$$

Nghĩa là, $\pi_{a,b}$ là biểu diễn suy biến một chiều của G.

4.2. Trường hợp không suy biến

Khi $F = F(0, 0, c)$, $0 \neq c = c^t \in \mathbb{R}^{(n,n)}$. Theo (7), $\Omega_F = \Omega_c = \{F(a, b, c) | a, b \in \mathbb{R}^{(n,m)}\}$. Từ (10) ta thấy

$$\mathfrak{q} = \{\ X(0, \beta, \gamma) | \beta \in \mathbb{R}^{(n,m)},\ \gamma = \gamma^t \in \mathbb{R}^{(n,n)}\} \tag{15}$$

là phân cực của $\mathfrak{g}$ đối với F, tức là $\mathfrak{q}$ là một đại số Li con của $\mathfrak{g}$ phụ thuộc $F \in \mathfrak{g}^*$ thoả mãn ý (2) trong định nghĩa 1.1. Gọi Q là nhóm Li con đơn liên của G mà $\mathrm{Lie}(Q) = \mathfrak{q}$. Giả sử

$$\chi_{c,\mathfrak{q}} : Q \longrightarrow \mathbb{C}_1^{\times}$$

là đặc trưng unita của Q xác định theo công thức

$$\chi_{c,\mathfrak{q}}(\exp \mathrm{X}(0, \beta, \gamma)) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} < \mathrm{F}, \mathrm{X}(0, \beta, \gamma) >} = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} \mathbf{Tr}(\mathrm{c}\gamma)}, \gamma = \gamma^{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^{(\mathrm{n},\mathrm{n})}. \tag{16}$$

Tương ứng Kirillov nói rằng biểu diễn unita bất khả qui $\pi_{c,\mathfrak{q}}$ của G ứng với K-quĩ đạo $\Omega_F = \Omega_c$ được cho là

$$\pi_{c,\mathfrak{q}} = \mathrm{Ind}_Q^{\mathrm{G}}\ \chi_{c,\mathfrak{q}}. \tag{17}$$

Từ kết quả của Kirillov (xem [7]) ta biết rằng biểu diễn cảm sinh $\pi_{c,\mathfrak{q}}$, sai khác một tương đương, không phụ thuộc vào cách chọn cực của $\mathfrak{g}$ đối với F. Như vậy, ta kí hiệu lớp tương đương của $\pi_{c,\mathfrak{q}}$ bởi π_c. Biểu diễn π_c tác động trên không gian biểu diễn $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^{(\mathrm{n},\mathrm{m})}, \mathrm{d}\xi)$ theo cách sau:

$$(\pi_c(g)f)(\xi) = e^{2\pi i \mathbf{Tr}\{c(C + B^t A + 2\xi^t B)\}} f(\xi + A), \tag{18}$$

với $g = (A, B, C) \in \mathrm{G}$ và $\xi \in \mathbb{R}^{(n,m)}$. Cuối cùng, sử dụng đẳng thức

$$\exp \mathrm{X}(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha, \beta, \gamma + \frac{1}{2}(\alpha^{\mathrm{t}}\beta - \beta^{\mathrm{t}}\alpha)),$$

ta thấy π_c chính là biểu diễn Schrodinger $U(\chi_c)$ của G cảm sinh từ biểu diễn unita một chiều χ_c của Q cho bởi $\chi_c((0, B, C)) = e^{2\pi i \mathbf{Tr}(cC)} I$, xem [9].

Tóm lại ta có kết quả sau:

Định lí 4.1. *Danh sách các biểu diễn unita bất khả qui của nhóm Heisenberg tổng quát* $\mathrm{H}_{\mathbb{R}}^{(\mathrm{m,n})}$ *là:*

- *Với* $F = F(a, b, 0) \in \mathfrak{g}^*$, *biểu diễn unita bất khả qui* $\pi_{a,b}$ *của* $\mathrm{H}_{\mathbb{R}}^{(\mathrm{m,n})}$ *ứng với* K*-quĩ đạo* $\Omega_F = \Omega_c$ *qua tương ứng Kirillov là biểu diễn suy biến của* $\mathrm{H}_{\mathbb{R}}^{(\mathrm{m,n})}$ *xác định bởi*

$$\pi_{a,b}(\exp \mathrm{X}(\alpha, \beta, \gamma)) = \mathrm{e}^{4\pi \mathrm{i} \mathbf{Tr}(\mathrm{a}^{\mathrm{t}}\alpha + \mathrm{b}^{\mathrm{t}}\beta)}.$$

- *Với* $F = F(0, 0, c) \in \mathfrak{g}^*$ *mà* $0 \neq c = c^t \in \mathbb{R}^{(n,n)}$, *biểu diễn unita bất khả qui* $(\pi_c, L^2(\mathbb{R}^{(n,m)}, d\xi))$ *của* $\mathrm{H}_{\mathbb{R}}^{(\mathrm{m,n})}$ *ứng với* K*-quĩ đạo* $\Omega_F = \Omega_c$ *qua tương ứng Kirillov tương đương unita với biểu diễn Schrodinger* $U(\chi_c), L^2(\mathbb{R}^{(n,m)}, d\xi))$ *của* $\mathrm{H}_{\mathbb{R}}^{(\mathrm{m,n})}$ *cảm sinh từ biểu diễn unita một chiều* χ_c *của* Q *cho bởi*

$$\chi_c((0, B, C)) = e^{2\pi i \mathbf{Tr}(cC)} I.$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Auslander L. and Kostant B. (1971), *Polarization and unitary representations of solvable Lie groups* , Invent. Math., **14**, Pp. 255-354.

[2] Do Ngoc Diep (1999), *Methods of Noncommutative Geometry for Group C*-Algebras*, Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics Series, Vol.**416**.

[3] Do Ngoc Diep, Nguyen Viet Hai (2001), *Quantum Half-Planes via Deformation Quantization*, Contributions to Algebra and Geometry, **42**, No 2, pp. 407-417.

[4] Do Ngoc Diep, Nguyen Viet Hai (2001), *Quantum Co-Adjoint Orbits of the Group of Affine Transformations of the Complex Straight Line*, Contributions to Algebra and Geometry, **42**, No 2, Pp. 419-430.

[5] Nguyen Viet Hai (2001), *Quantum co-adjoint orbits of* MD_4*-groups*, Vietnam J. Math. Vol **29**, IS. Pp.131-158.

[6] Nguyen Viet Hai (2005), *Quantum Co-adjoint Orbits of the Real Diamond Lie Group,* Journal Of Science, TXXI, N03, Vietnam National University, Hanoi.

[7] Kirillov A.A. (1962) *Unitary representations of nilpotent Lie groups*, Russian Math. Surveys, **17**Pp 57-110.

[8] Kirillov A.A. (1978), *Elements of the theory of representations*, Springer.

[9] Yang, J.-H. (1991), *Harmonic Analysis on the Quotient Spaces of Heisenberg Groups*, Nagoya Math. J., **123**, Pp103-117.

Tóm tắt

Các biểu diễn của nhóm Heisenberg tổng quát $\mathrm{H}_{\mathbb{R}}^{(\mathrm{m,n})}$

Chúng tôi tính các quĩ đạo đối phụ hợp của nhóm Heisenberg $H_{\mathbb{R}}^{(m,n)}$. Từ đó, bằng cách xác định các phân cực của đại số Lie $\mathfrak{g}$, chúng tôi thu được các biểu diễn unita, bất khả qui theo *tương ứng Kirillov*. Đây là phương pháp mới để xây dựng các biểu diễn của nhóm Heisenberg tổng quát.

Abstract

The Representations of Heisenberg Group $\mathrm{H}_{\mathbb{R}}^{(\mathrm{m,n})}$

We calculate the Co-adjoint orbits of the general Heisenberg group $\mathrm{H}_{\mathbb{R}}^{(\mathrm{m,n})}$. From this, by determination the polarizations of Lie algebra $\mathfrak{g}$, we obtain irreducible unitary representations under Kirillov corespondence. This is new method for construct representations of the the general Heisenberg group.

Phần này không in trong Tạp chí - chỉ dùng để tham chiếu chỉ số.
Người ghi chú : Thanh Vinh

Tài liệu

[1] Auslander L. and Kostant B.,1971, *Polarization and unitary representations of solvable Lie groups* , Invent. Math., **14**, Pp. 255-354.

[2] Do Ngoc Diep,1999, *Methods of Noncommutative Geometry for Group C*-Algebras*, Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics Series, Vol.**416**.

[3] Do Ngoc Diep, Nguyen Viet Hai, 2001, *Quantum Half-Planes via Deformation Quantization*, Contributions to Algebra and Geometry, **42**, No 2, pp. 407-417.

[4] Do Ngoc Diep, Nguyen Viet Hai, 2001, *Quantum Co-Adjoint Orbits of the Group of Affine Transformations of the Complex Straight Line*, Contributions to Algebra and Geometry, **42**, No 2, Pp. 419-430.

[5] Nguyen Viet Hai, 2001 *Quantum co-adjoint orbits of* MD_4*-groups*, Vietnam J. Math. Vol **29**, IS. Pp.131-158.

[6] Nguyen Viet Hai, 2005, *Quantum Co-adjoint Orbits of the Real Diamond Lie Group,* Journal Of Science, TXXI, N03, Vietnam National University, Hanoi.

[7] Kirillov A.A., 1962 *Unitary representations of nilpotent Lie groups*, Russian Math. Surveys, **17**Pp 57-110.

[8] Kirillov A.A., 1978, *Elements of the theory of representations*, Springer,

[9] Yang, J.-H., 1991, *Harmonic Analysis on the Quotient Spaces of Heisenberg Groups*, Nagoya Math. J., **123**, Pp103-117.