DUNG LƯỢNG TRONG KHÔNG GIAN TÔPÔ

Đậu Thế Cấp[1], **Bùi Đình Thắng**[2]

1. Mở đầu

Lí thuyết dung lượng được đưa ra bởi G.Choquet [1] và được tiếp tục phát triển bởi nhiều tác giả (xem tài liệu tham khảo).

Dung lượng đã được xét trong không gian đo được bất kì như là một khái quát của độ đo và gần đây là trong $\mathbb{R}^n$ với σ-đại số Borel. Trong bài này chúng tôi đưa ra khái niệm dung lượng trong không gian tôpô Hausdorff tổng quát. Sau đó chúng tôi đã khảo sát khá triệt để trường hợp dung lượng có giá là tập rời rạc. Trong $\mathbb{R}^n$ cũng mới xét trường hợp dung lượng có giá hữu hạn (xem [9]), do đó kết quả của chúng tôi là mới cả trong trường hợp không gian là $\mathbb{R}^n$.

2. Dung lượng trong không gian tôpô

Trong suốt bài này ta kí hiệu X là một không gian tôpô Hausdorff. $\mathcal{K}(X)$, $\mathcal{F}(X)$, $\mathcal{G}(X)$, $\mathcal{B}(X)$ theo thứ tự là họ các tập con compact, tập con đóng, tập con mở và tập con Borel của X. Ta có

$$\mathcal{K}(X) \subset \mathcal{F}(X) \subset \mathcal{F}(X) \cup \mathcal{G}(X) \subset \mathcal{B}(X)$$

Định nghĩa 2.1. *Hàm tập $T : \mathcal{B}(X) \mapsto [0; +\infty)$ gọi là một dung lượng trên X nếu thỏa mãn các điều kiện sau*

(C_1) $T(\emptyset) = 0$.

(C_2) *T đan dấu cấp hữu hạn, tức là với các tập $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(X)$, $n \geq 2$, đều có*

$$T\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \leq \sum_{I \in \mathcal{I}(n)} (-1)^{\#I+1} T\Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) \tag{2.1}$$

trong đó $\mathcal{I}(n) = \{I : \ I \subset \{1, \ldots, n\}, \ I \neq \emptyset\}$, $\#I$ là số phần tử của tập I.

(C_3) $T(A) = \sup\{T(C) : \ C \in \mathcal{K}(X), \ C \subset A\}$ *với mọi $A \in \mathcal{B}(X)$.*

[1]PGS.TS, Khoa Toán - Tin học, Trường ĐHSP Tp. Hồ Chí Minh.

[2]ThS, Khoa Toán, Trường ĐH Sài Gòn.

(C_4) $T(A) = \inf\{T(G) : \ G \in \mathcal{G}(X),\ G \supset C\}$ *với mọi* $C \in \mathcal{K}(X)$.

Ký hiệu $\mathcal{M}$ là một σ-đại số trên X.

Bổ đề 2.1. *Cho* $\mu : \mathcal{M} \mapsto [0; +\infty)$ *là một hàm tập thỏa mãn điều kiện sau đây: Với mọi* $A, B \in \mathcal{M}$

$$\mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cup B). \tag{2.2}$$

Khi đó với mọi họ các tập $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{M}$, $n \geq 2$ *ta đều có*

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{I \in \mathcal{I}(n)} (-1)^{\# I+1} \mu(\bigcup_{i \in I} A_i). \tag{2.3}$$

Chứng minh. Ta chứng minh bằng qui nạp theo n. Theo giả thiết (2.2) ta có (2.3) đúng với $n = 2$. Giả sử (2.3) đúng với $n \geq 2$, ta sẽ chứng minh nó đúng với $n + 1$. Kí hiệu

$$\mathcal{I}(n+1) = \mathcal{I}(n) \cup \{n+1\} \cup (\mathcal{I}_n, n+1),$$

ở đây $(\mathcal{I}_n, n+1) = \{I \cup \{n+1\} : I \in \mathcal{I}(n)\}$. Đặt $A = \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$. Theo giả thiết qui nạp ta có

$$\begin{aligned}
\mu(\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i) &= \mu(A \bigcap A_{n+1}) \\
&= \mu(A) + \mu(A_{n+1}) - \mu(A \bigcup A_{n+1}) \\
&= \mu(A) + \mu(A_{n+1}) - \mu\left((\bigcap_{i=1}^{n} A_i) \bigcup A_{n+1} \right) \\
&= \mu(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) + \mu(A_{n+1}) - \mu(\bigcap_{i=1}^{n} (A_i \cup A_{n+1})) \\
&= \sum_{I \in \mathcal{I}(n)} (-1)^{\# I+1} \mu(\bigcup_{i \in I} A_i) + \mu(A_{n+1}) - \sum_{I \in \mathcal{I}(n)} (-1)^{\# I+1} \mu(\bigcup_{i \in I'} A_i) \\
&= \sum_{I \in \mathcal{I}(n)} (-1)^{\# I+1} \mu(\bigcup_{i \in I} A_i) + \mu(A_{n+1}) \\
&\quad + \sum_{I' \in (\mathcal{I}(n), n+1)} (-1)^{\# I'+1} \mu(\bigcup_{i \in I'} A_i) \\
&= \sum_{I \in \mathcal{I}(n+1)} (-1)^{\# I+1} \mu(\bigcup_{i \in I} A_i),
\end{aligned}$$

trong đó $I' = I \cup \{n+1\}$, $I \in \mathcal{I}(n)$. Vậy (2.3) đúng với $n+1$. □

Định nghĩa 2.2. *Một độ đo μ trên $\mathcal{B}(X)$ gọi là độ đo Borel chính qui nếu với mọi $E \in \mathcal{B}(X)$ đều có*

1. $\mu(E) = \inf\{\mu(U) : U \in \mathcal{G}(X),\ U \supset E\}$;

2. $\mu(E) = \sup\{\mu(C) : C \in \mathcal{K}(X),\ C \subset E\}$.

Từ bổ đề 2.1 và tính chính qui của độ đo Lebesgue trên $\mathbb{R}^n$ ta có

Định lí 2.1.

a) *Hàm tập $\mu : \mathcal{B}(X) \mapsto [0, +\infty)$ thoả mãn (C_1), (C_3), (C_4) và (2.2) là một dung lượng trên X.*

b) *Mọi độ đo chính qui trên $\mathcal{B}(X)$ đều là dung lượng trên X. Đặc biệt độ đo Lebesgue m trên $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ là dung lượng trên $\mathbb{R}^n$.*

Định nghĩa 2.3. *Hàm tập $T : \mathcal{B}(X) \mapsto [0, +\infty)$ gọi là cực đại nếu*

$$T(A \cup B) = \max\{T(A),\ T(B)\}$$

với mọi $A, B \in \mathcal{M}$.

Bổ đề 2.2. *Nếu T là hàm tập cực đại thì mọi họ $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{M}$ ta đều có*

$$\sum_{I \in \mathcal{I}(n)} (-1)^{\#I+1} T(\bigcup_{i \in I} A_i) = \min\{T(A_i) : 1 \le i \le n\}$$

Chứng minh. Ta chứng minh bằng qui nạp theo n. Với mọi $A_1, A_2 \in \mathcal{M}$ ta có

$$\begin{aligned} T(A_1) + T(A_2) - T(A_1 \cup A_2) &= T(A_1) + T(A_2) - \max\{T(A_1), T(A_2)\} \\ &= \min\{T(A_1), T(A_2)\}, \end{aligned}$$

tức là khẳng định đúng với $n = 2$. Giả sử khẳng định đúng với $n \ge 2$. Với mọi họ $A_1, \ldots, A_{n+1} \in \mathcal{M}$, không mất tổng quát ta có thể giả thiết

$$T(A_1) = \min\{T(A_i) : 1 \le i \le n+1\}$$

$$T(A_{n+1}) = \max\{T(A_i) : 1 \le i \le n+1\}.$$

Bởi giả thiết qui nạp ta có

$$\begin{aligned}
\sum_{I\in\mathcal{I}(n+1)} (-1)^{\#I+1}T(\bigcup_{i\in I}A_i) &= \sum_{I\in\mathcal{I}(n)} (-1)^{\#I+1}T(\bigcup_{i\in I}A_i) + T(A_{n+1}) \\
&\quad + \sum_{I'\in(\mathcal{I}_n,n+1)} (-1)^{\#I'+1}T(\bigcup_{i\in I'}A_i) \\
&= T(A_1) + T(A_{n+1}) \\
&\quad +(-C_n^1 + C_n^2 - \cdots + (-1)^n C_n^n)T(A_{n+1}) \\
&= T(A_1) + (1-1)^n T(A_{n+1}) \\
&= T(A_1).
\end{aligned}$$

Vậy khẳng định đúng với $n+1$. □

Định nghĩa 2.4. *Hàm tập $T : \mathcal{B}(X) \mapsto [0,+\infty)$ gọi là độ đo cực đại nếu nó là hàm tập cực đại và thỏa mãn các điều kiện (C_1), (C_3), (C_4).*

Từ bổ đề 2.2 ta có định lí sau

Định lí 2.2. *Mọi độ đo cực đại trên X là dung lượng trên X.*

Định lí 2.3. *Cho T là một dung lượng trên X. Khi đó*

a) *T là hàm tập không giảm, tức là mọi A, $B \in \mathcal{B}(X)$, $A \subset B$ thì $T(A) \le T(B)$.*

b) *Với mọi A, $B \in \mathcal{B}(X)$, $A \cap B = \emptyset$ đều có*

$$T(A) + T(B) \ge T(A\cup B).$$

Chứng minh.

a) Theo (C_3)

$$\begin{aligned}
T(A) &= \sup\{T(C):\ C\subset A,\ C\in\mathcal{K}(X)\} \\
&\le \sup\{T(C):\ C\subset B,\ C\in\mathcal{K}(X)\} \\
&= T(B).
\end{aligned}$$

b) $0 = T(A\cap B) \le T(A) + T(B) - T(A\cup B)$.
Do đó $T(A) + T(B) \ge T(A\cup B)$.

□

Hệ quả 2.1. *Nếu* A, $B \in \mathcal{B}(X)$ *và* $T(A) = 0$ *thì* $T(A \cup B) = T(B)$.

Định nghĩa 2.5. *Ta gọi giá của dung lượng* T, *kí hiệu* supp T *là tập đóng* S *nhỏ nhất của* X *sao cho*

$$T(X \setminus S) = 0.$$

Hệ quả 2.2. *Với mọi dung lượng* T *trên* X *ta có*

a) $T(\text{supp } T) \geq T(B) \quad \forall B \in \mathcal{B}(X)$

b) $T(\text{supp } T) = T(X)$.

Chứng minh.

a) Đặt $A = B \setminus \text{supp } T$, ta có $A \subset X \setminus \text{supp } T$ nên $T(A) = 0$. Vì $B = A \cup (B \cap \text{supp } T)$ nên theo hệ quả 2.1

$$T(B) = T(B \cap \text{supp } T) \leq T(\text{supp } T).$$

b) Theo a) ta có $T(\text{supp } T) \geq T(X)$ và do tính không giảm nên $T(\text{supp } T) \leq T(X)$. Vậy $T(\text{supp } T) = T(X)$.

□

Định nghĩa 2.6. *Một dung lượng* T *trên* X *gọi là dung lượng xác suất nếu* $T(\text{supp } T) = T(X) = 1$.

3. Dung lượng có giá rời rạc

Định nghĩa 3.1. *Tập con* D *của* X *gọi là rời rạc nếu mọi* $x \in D$, *tồn tại lân cận mở* U_x *của* x *trong* X *sao cho* $D \cap U_x = \{x\}$.

Bổ đề 3.1. *Cho* D *là tập con đóng, rời rạc của* X. *Khi đó*

a) *Mọi tập con của* D *đóng trong* X.

b) *Tập con của* D *là compact nếu và chỉ nếu nó là tập con hữu hạn.*

Chứng minh.

a) $A \subset D$ thì A đóng trong D. Vì D đóng trong X nên A đóng trong X.

b) Nếu C là tập con vô hạn của D thì C không compact trong D do đó cũng không compact trong X.

$\square$

Định nghĩa 3.2. *Họ số thực không âm $\{t_i\}$, $i \in I$ gọi là khả tổng và có tổng bằng s nếu*

$$\sum_{i\in I} t_i = \sup\left\{\sum_{i\in J} t_i,\ J \subset I, \#J < +\infty\right\} = s < +\infty.$$

Bổ đề 3.2. *Nếu $\sum_{i\in I} t_i < +\infty$ thì tập $I_0 = \{i \in I : t_i > 0\}$ là đếm được.*

Chứng minh. Đặt $A_n = \{i \in I_0 :\ t_i > \dfrac{1}{n}\}$. Ta có

$$I_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

Nếu I_0 không đếm được thì tồn tại n_0 sao cho A_{n_0} vô hạn. Khi đó

$$\sum_{i\in I} t_i = \sum_{i\in I} t_i \geq \sum_{i\in A_{n_0}} t_i = +\infty.$$

$\square$

Bổ đề 3.3. *Nếu $\mu : \mathcal{B}(X) \mapsto [0, +\infty)$ là dung lượng độ đo, có giá là tập rời rạc D thì D là tập đếm được.*

Chứng minh. Mọi $x \in D$ đều có $\mu(\{x\}) > 0$ vì nếu tồn tại $x \in D$, $\mu(\{x\}) = 0$ thì $D' = D \setminus \{x\}$ là tập đóng (bổ đề 3.1) và $\mu(X \setminus D') = 0$, mâu thuẫn với D là tập đóng nhỏ nhất có tính chất này. Mọi tập hữu hạn $A \subset D$

$$\mu(A) = \sum_{x\in A} \mu(\{x\}) \leq \mu(D) < +\infty$$

nên $\sum_{x\in D} \mu(\{x\}) < +\infty$. Từ đó theo bổ đề 3.2, D đếm được. $\square$

Định nghĩa 3.3. *Cho T là một dung lượng trên X có giá là tập rời rạc D. Đặt $t_x = T(\{x\})$ với mọi $x \in D$, ta gọi T_∞ và T_1 là các hàm trên $\mathcal{B}(X)$ xác định bởi*

$$T_\infty(A) = \begin{cases} \sup\{t_x :\ x \in A \cap D\} & \textit{nếu} \quad A \cap D \neq \emptyset \\ 0 & \textit{nếu} \quad A \cap D = \emptyset, \end{cases}$$

$$T_1(A) = \begin{cases} \sum\limits_{x \in A\cap D} t_x & \textit{nếu} \quad A \cap D \neq \emptyset \\ 0 & \textit{nếu} \quad A\cap D = \emptyset. \end{cases}$$

Định lí 3.1. *Cho T là một dung lượng trên X có giá là tập rời rạc D. Khi đó T_∞ là dung lượng trên X và*

$$T_\infty(A) \leq T(A) \quad \textit{với mọi} \quad A \in \mathcal{B}(X)$$

Chứng minh. Hiển nhiên T_∞ thỏa mãn (C_1), (C_3).

Với mọi $C \in \mathcal{K}(X)$, $G = \left(\bigcup\limits_{x \in C\cap D} U_x \right) \bigcup (X \setminus D)$ là tập mở chứa C, $T_\infty(C) = T_\infty(C \cap D) = T_\infty(G \cap D) = T_\infty(G)$ nên có (C_4). Để chứng minh T_∞ thỏa mãn (C_2), theo bổ đề 2.2 ta sẽ chứng minh T_∞ là hàm cực đại. Thật vậy, mọi A, $B \in \mathcal{B}(X)$ đều có

$$\begin{aligned} T_\infty(A\cup B) &= \sup\{t_x: \ x \in (A \cup B)\cap D\} \\ &= \max\{\sup\{t_x: \ x\in A\cap D\}, \ \sup\{t_x: \ x \in B\cap D\}\} \\ &= \max\{T_\infty(A), \ T_\infty(B)\} \end{aligned}$$

Cuối cùng, mọi $A \in \mathcal{B}(X)$

$$\begin{aligned} T_\infty(A) &= \sup\{t_x: \ x \in A \cap D\} \\ &= \sup\{T(\{x\}): \ x \in A\cap D\} \\ &\leq T(A) \end{aligned}$$

□

Hệ quả 3.1. *Cho D là một tập rời rạc trong X, mỗi $x \in D$ chọn một giá trị $d_x > 0$. Với mọi $A \in \mathcal{B}(X)$ đặt*

$$T(A) = \begin{cases} \sup\{d_x: \ x \in A\cap D\} & \textit{nếu} \quad A\cap D \neq \emptyset \\ 0 & \textit{nếu} \quad A \cap D \neq \emptyset. \end{cases}$$

Khi đó T là dung lượng nếu và chỉ nếu $\sup\{d_x: \ x \in D\} < \infty$. Với dung lượng này ta có $T = T_\infty$.

Định lí 3.2. *Cho T là một dung lượng có giá là tập rời rạc D. Khi đó T_1 là dung lượng nếu và chỉ nếu D đếm được và $\sum\limits_{x\in D} t_x < \infty$. Với mọi $A \in \mathcal{B}(X)$ ta có*

$$T(A) \leq T_1(A).$$

Chứng minh. Nếu T_1 là dung lượng thì $T_1(D) = \sum_{x\in D} t_x < \infty$ và theo bổ đề 3.2, D đếm được. Ngược lại hiển nhiên T_1 thỏa mãn (C_1), (C_3). Với mọi $C \in \mathcal{K}(X)$, do

$$G = \left(\bigcup_{x\in C\cap D} U_x\right)\bigcup(X \setminus D)$$

là mở chứa C và

$$T_1(C) = T_1(C \cap D) = T_1(G \cap D) = T_1(G)$$

nên T thỏa mãn (C_4).

Với mọi A, $B \in \mathcal{B}(X)$ ta có

$$\begin{aligned} T_1(A \cup B) &= \sum_{x\in(A\cup B)\cap D} t_x \\ &= \sum_{x\in A\cap D} t_x + \sum_{x\in B\cap D} t_x - \sum_{x\in A\cap B\cap D} t_x \\ &= T_1(A) + T_1(B) - T_1(A \cap B). \end{aligned}$$

Vậy T_1 thỏa mãn (2.1) và do đó là một dung lượng theo định lí 2.1.

Với mọi a, $b \in D$, $a \neq b$ theo định lí 2.3 b)

$$T(\{a, b\}) \le T(\{a\}) + T(\{b\})$$

từ đó tiếp tục sử dụng định lí 2.3 b và qui nạp theo số phần tử của C ta có

$$T(C) \le \sum_{x\in C} T(\{x\}) = T_1(C)$$

với mọi $C \subset D$, $\#C < \infty$. Bây giờ với mọi $A \in \mathcal{B}(X)$ ta có

$$\begin{aligned} T(A) &= T(A \cap D) \\ &= \sup\{T(C) : \ C \subset A \cap D,\ C \text{ compact}\} \quad (\text{do } C_4) \\ &= \sup\{T(C) : \ C \subset A \cap D,\ \#C < \infty\} \quad (\text{do bổ đề 3.1 b}) \\ &\le \sup\{T_1(C) : \ C \subset A \cap D,\ \#C < \infty\} \\ &= T_1(A \cap D) \\ &= T_1(A). \end{aligned}$$

□

Hệ quả 3.2. *Nếu T là dung lượng có giá D là tập rời rạc và $\sum_{x\in D} T(\{x\}) < \infty$ thì T_∞ và T_1 là các dung lượng và*

$$T_\infty(A) \le T(A) \le T_1(A)$$

với mọi $A \in \mathcal{B}(X)$.

Hệ quả 3.3. *Cho D là tập rời rạc và đóng trong X, với mỗi $x \in D$, chọn $d_x > 0$. Với mọi $A \in \mathcal{B}(X)$ đặt*

$$T(A) = \begin{cases} \sum\limits_{x\in A\cap D} d_x & \text{nếu} \quad A\cap D \neq \emptyset \\ 0 & \text{nếu} \quad A\cap D = \emptyset. \end{cases}$$

Khi đó T là dung lượng có giá D nếu và chỉ nếu D đếm được và $\sum_{x\in D} d_x < \infty$. Với dung lượng này ta có $T = T_1$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] G.Choquet (1953-1954), *Theory of capacities*, Ann.Inst.Fourier 5, 131-295.

[2] S.Graf (1980), *A Radon-Nikodym theorem for capacities*, J.Reine und Angewandte Mathematik 320, 192-214.

[3] P.J.Huber (1973), *The use of Choquet capacities in statistics*, Bull.Internat.Statist. 45, 181-191.

[4] P.J.Huber, V.Strassen (1973), *Minimax test and Neyman-Pearson lemma for capaciti*, Ann.Statist. 1, 251-263.

[5] N.T.Hung, N.T.Nhu, Tonghui Wang (1997), *On capacities functionals in interval probabilities*, Inter.J.Uncertainty, Fuzziness and Knowleged-Based System 5, 359-377.

[6] N.T.Hung, B.Bouchon-Meunier (2003), *Random sets and large deviations principle as a foundation for possibility measures*, Soft Computing 8, 61-70.

[7] J.B.Kodane, L.Wasserman (1996), *Symmetic coherent, Choquet capacities*, Ann.Statist. 24, 1250-1264.

[8] G.Matheron (1975), *Random sets and integral geometry*, J.Wiley.

[9] N.Nhuy, L.X.Son (2004), *Probability capacities in $\mathbb{R}^d$ and the Choquet integral for capacities*, Acta.Math.Vietnam. 29, 41-56.

[10] N.Nhuy, L.X.Son (2005), *The weak topology on the space of probability capacities in $\mathbb{R}^d$*, Vietnam J.Math. 33, 241-251.

Tóm tắt

Dung lượng trong không gian Tôpô

Trong bài viết này, chúng tôi giới thiệu khái niệm về capacity trong không gian tôpô Hausdorff, khái niệm này tổng quát hoá khái niệm capacity trong $\mathbb{R}^n$. Những capacity có giá rời rạc cũng sẽ được khảo sát.

Abstract

The capacities in topological spaces

In this note we introduce a notion of capacities in Hausdorff topological spaces, that generalizes the notion of capacity in $\mathbb{R}^n$. The capacities for discrete support are investigated.