BỔ ĐỀ FARKAS VÀ ỨNG DỤNG TRONG THỊ TRƯỜNG TÀI CHÍNH

NGUYỄN CHÍ LONG*

TÓM TẮT

Bổ đề Farkas đã hơn 100 tuổi. Đây là kết quả căn bản đối với hệ bất phương trình tuyến tính và là công cụ quan trọng trong lý thuyết tối ưu. Trên cơ sở ý tưởng của A. Dax và K. Svanberg [5], [10], chúng tôi giới thiệu cách chứng minh Bổ đề Farkas chỉ sử dụng công cụ của đại số tuyến tính sơ cấp mà không dùng tính chất của lý thuyết tập hợp hay tính chất của số thực và số hữu tỉ. Mục đích của bài báo này là giới thiệu áp dụng của Bổ đề Farkas để chứng minh một nguyên lý quan trọng trong thị trường tài chính: ***Thị trường tài chính là đầy đủ khi và chỉ khi tồn tại đúng một độ đo xác suất rủi ro trung tính.***

ABSTRACT

Farkas lemma and its applications in financial market

Farkas lemma has existed over a hundred years old. It is a fundamental result for the system of linear inequalities and an important tool in optimization theory. Based on A. Dax and K.Svanberg's ideas [5], [10], we present the proof of the Farkas lemma by only uses the tools of elementary linear algebra, but neither any properties of the set theory nor any of the real and rational numbers. The article is about presenting the applications of Farkas lemma to prove an important principle in financial market: "The financial market is complete if and only if there exists exactly one neutral risk probability measure."

Bổ đề Farkas

Cho ma trận m hàng, n cột A và b là véctơ m chiều, thì chỉ có đúng một trong 2 hệ (1) và (2) sau có nghiệm:

$$Ax = b \quad ; \quad x \geq 0 \tag{1}$$

$$b^T y < 0 \quad ; \quad A^T y \geq 0 \tag{2}$$

Việc chứng minh Bổ đề Farkas có liên quan đến kết quả về nghiệm của các bài toán tối ưu sau:

Xét hàm *f* xác định trên R^n :

$$f(x) = \frac{1}{2} || Ax - b ||^2 = \frac{1}{2} (Ax - b)^T (Ax - b)$$

Bài toán: *(P)* min $f(x)$, $x \in R^n$

(P^+) min $f(x)$, với ràng buộc $x \geq 0$.

* TS Khoa Toán – Tin học Trường Đại học Sư phạm TP HCM

Ta sẽ sử dụng kết quả của mệnh đề sau để chứng minh Bổ đề Farkas.

Mệnh đề I

1) $\hat{x}$ *là nghiệm của (P)* $\Leftrightarrow A^T A\,\hat{x} = A^T b$. (3)

2) (P) có nghiệm duy nhất $\hat{x}$ $\Leftrightarrow$ *các vécto cột của A là độc lập tuyến tính.*

3) $\hat{x}$ *là nghiệm của* (P^+) $\Leftrightarrow$ *3 điều (a), (b), (c) sau đúng*

(a) $\hat{x} \geq 0$

(b) $A^T(A\hat{x} - b) \geq 0$

(c) $\hat{x}\,A^T(A\hat{x} - b) = 0$.

4) (P^+) *luôn luôn có nghiệm.*

Chứng minh Bổ đề Farkas:

Giả sử $\hat{x}$ là nghiệm của (*1*), ta cần chứng minh (*2*) vô nghiệm.

Vì $\hat{x}$ là nghiệm của (*1*) nên $A\hat{x} = b$, do đó

$b^T y = (A\,\hat{x})^T y = \hat{x}^T(A^T y)$ mà nó sẽ ≥ 0 khi $A^T y \geq 0$

Vậy hệ (*2*) không thể có nghiệm.

Bây giờ ta giả sử hệ (*1*) vô nghiệm, ta cần chứng minh (*2*) có nghiệm.

Do Mệnh đề I.4), bài toán (P^+) có nghiệm. Gọi $\hat{x}$ là nghiệm của (P^+) và đặt $\hat{y} := A\hat{x} - b$ thì $\hat{y} \neq 0$ (do $\hat{x}$ không phải là nghiệm của (1)).

Do Mệnh đề I.3) thì $\hat{x} \geq 0$; $A^T\hat{y} \geq 0$ và $\hat{x}^T A^T \hat{y} = 0$

Suy ra $b^T\hat{y} = (A\hat{x} - \hat{y})^T\hat{y} = \hat{x}^T A^T\hat{y} - \hat{y}^T\hat{y} = 0 - \|\hat{y}\|^2 < 0$

Vậy $\hat{y}$ là một nghiệm của *(2)*.

Việc còn lại là chứng minh mệnh đề I.

Chứng minh mệnh đề I:

1) Giả sử $\hat{x}$ thỏa (*3*), ta cần chứng minh $\hat{x}$ là nghiệm của (*P*) nghĩa là $f(x) - f(\hat{x}) \geq 0,\ \forall x \in R^n$.

Ta có :

$$f(\hat{x} + d) = \frac{1}{2}\|A(\hat{x} + d) - b\|^2 = \frac{1}{2}\|A\hat{x} - b + Ad\|^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\|A\hat{x} - b\|^2 + (A\hat{x} - b)^T Ad + (Ad)^T(A\hat{x} - b) + \|Ad\|^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\|(A\hat{x} - b)\|^2 + \frac{1}{2}(A\hat{x} - b)^T Ad + \frac{1}{2}(Ad)^T(A\hat{x} - b) + \frac{1}{2}\|Ad\|^2$$

Lấy $d = x - \hat{x}$, thì khai triển trên trở thành

$$f(x) = f(\hat{x}) + (x - \hat{x})^T A^T (A\hat{x} - b) + \frac{1}{2}\,||A(x - \hat{x})||^2$$

hay

$$f(x) - f(\hat{x}) = (x - \hat{x})^T A^T (A\hat{x} - b) + \frac{1}{2}\,||A(x - \hat{x})||^2$$

$$= (x - \hat{x})^T\ \hat{g}\ + \frac{1}{2}\,||A(x - \hat{x})||^2 \qquad (4)$$

với $\hat{g} := A^T(A\hat{x} - b)$ (5)

Từ (3) ta có $\hat{g} = 0$ và từ (4) ta có $f(x) - f(\hat{x}) \geq 0$, $\forall x \in R^n$.

Để chứng minh chiều ngược lại, bây giờ giả sử $\hat{x}$ không thỏa (3) và cần chứng minh $\hat{x}$ không thể là nghiệm của (*P*).

Vì $\hat{x}$ không thỏa (3), suy ra $A^TA\hat{x} \neq A^Tb$ hay $\hat{g} \neq 0$, do đó $||\hat{g}||^2 > 0$. Vì ta có thể tìm được số thực khá bé t > 0 sao cho $\frac{1}{2}t\,||A\hat{g}||^2$ nhỏ tùy ý, nên có $t > 0$

sao cho $\frac{1}{2}t\,||A\hat{g}||^2 < ||\hat{g}||^2$

trong (4), lấy x = $\hat{x} - t\hat{g}$ thì $f(\hat{x} - t\hat{g}) - f(\hat{x}) = t(-\,||\hat{g}||^2 + \frac{1}{2}t\,||A\hat{g}||^2) < 0$.

Do đó, $\hat{x}$ không thể là nghiệm của *(P)*.

2) Nếu các vectơ cột của *A* là độc lập tuyến tính thì phương trình $Ax = b$ có nghiệm duy nhất $\hat{x}$ và ngược lại; do đó theo Mệnh đề I.1. thì 2) đúng.

3) Giả sử $\hat{x}$ thỏa cả 3 điều kiện *a, b, c*. Với cách đặt $\hat{g}$ như trong (5) thì :

$$\hat{x} \geq 0;\ \hat{g} \geq 0 \text{ và } \hat{x}^T\hat{g} = 0 \qquad (6)$$

Từ (4) ta có:

$$f(x) - f(\hat{x}) = x^T\ \hat{g}\ - \hat{x}^T\hat{g} + \frac{1}{2}\,||A(x - \hat{x})||^2$$

$$= x^T\ \hat{g}\ + \frac{1}{2}\,||A(x - \hat{x})||^2 \geq x^T\hat{g} \geq 0 \text{ với mọi } x \geq 0.$$

Vậy $\hat{x}$ là nghiệm của (P^+).

Bây giờ ta chỉ cần chứng minh một trong 3 điều kiện *(a), (b), (c)* khiếm khuyết thì $\hat{x}$ không thể là nghiệm của (P^+).

i) Nếu điều kiện *(a)* khiếm khuyết thì $\hat{x}$ không nằm trong miền chấp nhận của (P^+) nên không thể là nghiệm của (P^+).

ii) Giả sử $\hat{x} \geq 0$ nhưng $\hat{g}$ không thỏa mãn điều kiện $\hat{g} \geq 0$, nghĩa là chỉ số κ nào đó sao cho $\hat{g}_\kappa < 0$, thì có $t > 0$ với $\frac{1}{2} t \,\|Ae_\kappa\|^2 < - \hat{g}_\kappa$

trong đó $e_\kappa = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ với số *1* ở vị trí thứ *κ*.

Ta có: $\hat{x} + te_\kappa \geq 0$ và từ (4)

$$f(\hat{x} + te_\kappa) - f(\hat{x}) = t\,(\hat{g}_\kappa + \frac{1}{2} t \,\|Ae_\kappa\|^2) < 0.$$

Điều này chứng tỏ $\hat{x}$ không thể là nghiệm của (P^+).

iii) Giả sử $\hat{x} \geq 0$, $\hat{g} \geq 0$ nhưng không có điều kiện $\hat{x}^T \hat{g} = 0$, nghĩa là có chỉ số κ nào đó sao cho $\hat{x}_\kappa > 0$ và $\hat{g}_\kappa > 0$.

Suy ra có t với $0 < t < \hat{x}_\kappa$ và $\frac{1}{2} t \,\|Ae_\kappa\|^2 < \hat{g}_\kappa$.

Ta có: $\hat{x} - te_\kappa \geq 0$ và theo (4).

$$f(\hat{x} - te_\kappa) - f(\hat{x}) = t\,(- \hat{g}_\kappa + \frac{1}{2} t \,\|Ae_\kappa\|^2) < 0.$$

Chứng tỏ $\hat{x}$ không thể là nghiệm của *(P^+).*

4) Xét *J* là tập con của tập hợp chỉ số *{1; 2; …; n}* gọi $|J|$ là số phần tử của *J*; A_J là ma trận m hàng, $|J|$ cột $\{a_j\}_{j\in J}$; trong đó a_j là cột thứ *j* của ma trận *A* và x_j là vectơ $|J|$ chiều có các thành phần $\{x_j\}_{j\in J}$ (cùng thứ tự chỉ số như véctơ cột trong A_J). Ta định nghĩa các miền con của R^n như sau:

$$X_J = \{x \in R^n : x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \text{ với } x_j = 0 \text{ khi } j \notin J\}$$

và $$X_J^+ = \{x \in X_J : \text{với } x_j > 0 \text{ khi } j \in J\}$$

Xét các bài toán tối ưu (P_J) và (P_J^+), thu hẹp của (*P*) trên X_J và X_J^+:

(P_J): min $f(x)$; $f(x) = \frac{1}{2} \|A\hat{x} - b\|^2$ với ràng buộc $x \in X_J$

(P_J^+): min $f(x)$; $f(x) = \frac{1}{2} \|A\hat{x} - b\|^2$ với ràng buộc $x \in X_J^+$.

Nếu $J = \varnothing$ thì $X_J^+ = X_J = \{O\}$ và lúc đó $\hat{x} = 0$ là nghiệm của cả (P_J) và (P_J^+).

Nếu $J \neq \varnothing$ thì (P_J) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi các véctơ cột của A_J là độc lập tuyến tính (do kết quả Mệnh đề. I.2).

Định nghĩa:

*1) Tập chỉ số con J của {1, 2, …, n} được gọi là **tập được chọn** nếu (P_J) có nghiệm duy nhất $\hat{x}$ và $\hat{x} \in X_J^+$.*

*Trong trường hợp này $\hat{x}$ được gọi là **điểm chọn** tương ứng với J.*

*2) Trong trường hợp (P_J) không có nghiệm duy nhất hay (P_J) có nghiệm duy nhất $\hat{x}$ nhưng $\hat{x} \notin X_J^+$, thì J được gọi là tập hợp chỉ số **không đáng quan tâm,** trong trường hợp này không có điểm chọn nào tương ứng với J.*

*3) Điểm chọn $\hat{x}$ được gọi là **điểm chọn tốt nhất** (đối với bài bản tối ưu (P^+)) nếu $f(\hat{x}) < f(x)$ với mọi điểm chọn x.*

Trước tiên ta chứng minh bổ đề phụ sau:

Bổ đề phụ

*1) Giả sử rằng J là tập chỉ số con **được chọn** và $\hat{x}$ là **điểm chọn** tương ứng với J thì $\hat{x}$ là nghiệm của (P_J^+).*

*2) Giả sử rằng J là tập chỉ số con **không đáng quan tâm**, thì với một điểm cho trước nào đó $x \in X_J^+$, luôn có một tập chỉ số con thực sự của J, ghi là $\tilde{J}$, với $\tilde{J} \subset J$ (và $\tilde{J} \neq J$), và một điểm $\tilde{x} \in X_{\tilde{J}}^+$ sao cho $f(\tilde{x}) \le f(x)$.*

*3) Nếu $\hat{x}$ là **điểm chọn tốt nhất** và J là tập hợp chỉ số con có thể là **tập được chọn** hay tập **không đáng quan tâm**, thì ta luôn có :*

$$f(\hat{x}) \le f(x), \ \forall x \in X_J^+.$$

Chứng minh bổ đề phụ:

1) Nếu *J* là tập chỉ số được chọn và $\hat{x}$ là điểm chọn tương ứng với *J* thì

$$f(\hat{x}) \le f(x), \ \forall x \in X_J.$$

Suy ra $f(\hat{x}) \le f(x), \ \forall x \in X_J^+$ (vì $X_J^+ \subset X_J$)

Do đó $\hat{x}$ là nghiệm của (P_J^+).

2) Giả sử rằng *J* là tập hợp ***không đáng quan tâm***, ta xét hai trường hợp khác nhau của ma trận A_J, đó là trường hợp các véctơ cột của A_J là phụ thuộc tuyến tính và các véctơ cột của A_J là độc lập tuyến tính.

i) Khi các véctơ cột của A_J là phụ thuộc tuyến tính: có $d \in X_J$ với ít nhất một thành phần là âm, sao cho $Ad = 0$.

Với $x \in X_J^+$ cho trước, đặt

$\alpha := \min_j \{x_j/(-d_j) : d_j < 0\}$ thì $\alpha > 0$;

Ta có: $x + td \in X_J^+$ khi $t \in [0, \alpha)$.

và $x + \alpha d \in X_{\tilde{J}}^+$ với $\tilde{J} \subset J$ (do $x_j + \alpha d_j = 0$ với ít nhất một chỉ số j).

Mặt khác, $f(x + td) = \frac{1}{2} \| Ax - b + tAd \|^2 = \frac{1}{2} \| Ax - b \|^2 = f(x), \ \forall t$

Do đó, nếu lấy $\tilde{x} = x + \alpha d$ thì $f(\tilde{x}) = f(x)$ và $\tilde{x} \in X^+_{\tilde{J}}$ với $\tilde{J} \subset J$.

ii) Khi các véctơ cột của A_J là độc lập tuyến tính: Theo định nghĩa của tập chỉ số không đáng quan tâm và Mệnh đề I.2, tồn tại nghiệm $\hat{x}$ của (P_J) và có ít nhất một chỉ số j sao cho thành phần thứ j, $\hat{x}_j$ của $\hat{x}$ là ≤ 0.

Với $x \in X^+_J$ cho trước, đặt :

$\alpha := \min_j \{x_j / (x_j - \hat{x}_j) : x_j > \hat{x}_j\}$ thì $\alpha \in (0, 1]$.

Ta có:

$x + t(\hat{x} - x) \in X^+_J,\ \forall t \in [0, \alpha)$

và $x + \alpha(\hat{x} - x) \in X^+_{\tilde{J}}$ với $\tilde{J} \subset J$ (do $x_j + \alpha(\hat{x}_j - x_j) = 0$ với ít nhất một chỉ số j)

Mặt khác, cố định x và $\hat{x}$ thì hàm theo một biến t.

$f(x + t(\hat{x} - x))$ đạt cực tiểu duy nhất tại $t = 1$.

Do đó, $f(x + t(\hat{x} - x)) < f(x),\ \forall t \in (0,1]$.

Đặc biệt $f(x + \alpha(\hat{x} - x)) < f(x)$.

Vậy nếu lấy $\tilde{x} = x + \alpha(\hat{x} - x)$ thì $f(\tilde{x}) < f(x)$ và $\tilde{x} \in X^+_{\tilde{J}}$, với $\tilde{J} \subset J$.

3)

i) Gọi J là tập chỉ số được chọn và $x \in X^+_J$, thì theo bổ đề phụ 1, có điểm chọn $\hat{x} \in X^+_J$ tương ứng với J và $f(\hat{x}) \leq f(x),\ \forall x \in X^+_J$

ii) Gọi J là tập hợp chỉ số không đáng quan tâm và $x \in X^+_J$:

Theo bổ đề phụ 2, có $\tilde{x} \in X^+_{\tilde{J}}$ ($\tilde{J} \subset J$) sao cho $f(\tilde{x}) \leq f(x)$

Chú ý rằng $|\tilde{J}| \leq |J| - 1$, nên số thành phần dương của $\tilde{x}$ ít hơn số thành phần dương của x.

Nếu $\tilde{J}$ là tập được chọn, thì như đã biết ở trên

$f(\hat{x}) \leq f(\tilde{x}) \leq f(x)$

Nếu $\tilde{J}$ là tập không đáng quan tâm thì ta lặp lại lý luận như trên, thay vì khởi đầu với $x \in X^+_J$, ta khởi đầu với $\tilde{x} \in X^+_{\tilde{J}}$. Vì số thành phần dương trong véctơ biến tối đa là n, nên có nhiều lắm là n bước lặp để có được tập hợp chỉ số được chọn (chú ý là $J = \emptyset$ cũng là tập hợp chỉ số được chọn) và khi có được tập hợp chỉ số được chọn, sử dụng kết quả của Bổ đề phụ 3i) trên ta được kết quả cần chứng minh.

Chứng minh mệnh đề I4: *Bài toán tối ưu (P^+) luôn có nghiệm.*

Lấy $\hat{x}$ là điểm chọn tốt nhất và $x \geq 0$; thì có duy nhất một tập chỉ số con J sao cho $\hat{x} \in X_J^+$. Cả hai trường hợp J là tập được chọn hay là tập không đáng quan tâm thì theo Bổ đề phụ 3: $f(\hat{x}) \leq f(x)$

Do đó, $\hat{x}$ là nghiệm của (P^+).

Ghi chú 1:

Từ Bổ đề Farkas ta có thể kiểm chứng dễ dàng rằng nếu hệ (1) vô nghiệm thì tồn tại $y \in R^m$ sao cho

$$y A = 0 \text{ và } y b > 0 \qquad (7)$$

2. Áp dụng Bổ đề Farkas trong thị trường tài chính

2.1. Một số khái niệm, định nghĩa

Xét mô hình tài chính một chu kỳ với thời gian giao dịch $T = \{0,1\}$. Thời điểm $t = 0$ là thời điểm hiện tại, bắt đầu giao dịch và thời điểm $t = 1$ là thời điểm đáo hạn, kết thúc giao dịch. Thị trường tài chính gồm $N+1$ tài sản nền tảng để đầu tư, đó là tài khoản tín dụng trong ngân hàng (hay trái phiếu không rủi ro) B_t, $t = 0,1$; với lãi suất cố định trong một chu kỳ là r và N chứng khoán

$\{S_t^i\}$, $i = 1, 2, \ldots, N$; $t = 0, 1$.

Đối với tài khoản tín dụng B_t, giả thiết $B_0 = 1$ đơn vị tiền tệ gửi vào ngân hàng tại thời điểm $t = 0$ và sẽ có được $B_1 = 1 + r$ đơn vị tiền tệ khi $t = 1$.

Giá của N chứng khoán tại thời điểm $t = 0$, S_0^1, S_0^2, …, S_0^N thì được xác định, nhưng giá chứng khoán tại thời điểm $t = 1$ lại phụ thuộc vào một trong k trạng thái tài chính (hay kịch bản) ω_i, $i = 1, \ldots, \kappa$ thuộc

$\Omega := \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_\kappa\}$

Giả sử sự xuất hiện của mỗi kịch bản $\omega_i \in \Omega$ có xác suất $P(\omega_i) > 0$, $i = 1, \ldots, \kappa$. Gọi $F = P(\Omega)$ là tập hợp tất cả các tập con của Ω thì F là trường thông tin lớn nhất của thị trường tài chính đang xét. Lúc đó S_1^i, $i = 1, \ldots, N$ là các biến ngẫu nhiên xác định trên (Ω, F, P) và $S_1^i(\omega)$ là giá chứng khoán thứ i tại thời điểm $t = 1$ khi kịch bản $\omega \in \Omega$ xuất hiện.

* Một phương án đầu tư (viết tắt PA) là một cặp (x, ϕ) trong đó x là tổng số tiền đầu tư ban đầu và ϕ là danh mục chứng khoán đầu tư, nó là véctơ gồm N thành phần $\phi := (\phi^1, \ldots, \phi^N)$ với ϕ^i là số đơn vị cổ phiếu của chứng khoán thứ i được mua tại thời điểm $t = 0$. Số tiền còn lại sau khi mua N chứng khoán

$$\phi^0 := x - \sum_{i=1}^{N} \phi^i S_0^i$$

sẽ được gửi vào tài khoản tín dụng.

* Quá trình giá của *PA* (x, ϕ) là cặp $(V_0(x, \phi); V_1(x, \phi))$ trong đó $V_0(x, \phi) = x$ và $V_1(x, \phi)$ là biến ngẫu nhiên

$$V_1(x, \phi) = \phi^0 B_1 + \sum_{i=1}^{N} \phi^i S_1^i$$

* Quá trình lời $G(x, \phi)$ của *PA* (x, ϕ) là biến ngẫu nhiên

$$G(x, \phi) = \phi^0 r + \sum_{i=1}^{N} \phi^i \Delta S^i, \quad \text{với } \Delta S^i := S_1^i - S_0^i$$

* Trong trường hợp mọi hàng hóa trong thị trường phải chiết khấu thì quá trình giá chứng khoán đã chiết khấu là

$\hat{S}_0^i = S_0^i$ và $\hat{S}_1^i = \dfrac{1}{B_1} . S_1^i$; lúc đó quá trình giá đã chiết khấu của PA (x, ϕ)

$\hat{V}_0(x, \phi) = x$ và $\hat{V}_1(x, \phi) = \phi^0 + \sum_{i=1}^{N} \phi^i \hat{S}_1^i$, và quá trình lời đã chiết khấu là

$$\hat{G}(x, \phi) = \sum_{i=1}^{N} \phi^i \Delta \hat{S}^i, \quad \text{với } \Delta \hat{S}^i = \hat{S}_1^i - \hat{S}_0^i$$

* Từ các khái niệm trên ta có:

$V_1(x, \phi) = V_0(x, \phi) + G(x, \phi)$

$\hat{V}_t = \dfrac{1}{B_1} . V_t$; $(t = 0;1)$ và $\hat{V}_1(x, \phi) = \hat{V}_0(x, \phi) + \hat{G}(x, \phi)$

* Thị trường tài chính **không có cơ hội chênh lệch thị giá,** hay nói vắn tắt, thị trường **không có cơ lợi**, hay **thị trường lành mạnh**, nếu trong thị trường không tồn tại PA (x, ϕ) nào thỏa mãn cả 3 điều kiện sau:

(1) $x = V_0(x, \phi) = 0$

(2) $V_1(x, \phi) \geq 0$ (hoặc $\hat{G}(x, \phi) \geq 0$)

(3) $\exists\, \omega \in \Omega : V_1(x, \phi)(\omega) > 0$ (hoặc $\hat{G}(x, \phi)(\omega) > 0$).

* Một độ đo xác suất Q trên Ω được gọi là **độ đo xác suất rủi ro trung tính** (hay **độ đo xác suất trung hòa rủi ro**) nếu

(1) $Q(\omega) > 0, \forall \omega \in \Omega$ (Mỗi kịch bản xảy ra với xác suất dương) và

(2) $E_Q[\Delta \hat{S}^i] = 0$ (Kỳ vọng của số gia chứng khoán đã chiết khấu lấy theo độ đo Q thì bằng 0).

* Một **sản phẩm phái sinh** (hay một **quyền phái sinh**) hay là **quyền tài chính** (a contigent claim) là một sản phẩm có dạng $h(S_1)$, trong đó $h: R \rightarrow R$ là hàm số sao cho $h(S_1)$ cũng là một biến ngẫu nhiên trên (Ω, F, P). Chẳng hạn $h(S_1) :=$

$max(S_1 - K; 0)$; trong đó S_1 là giá chứng khoán tại thời điểm đáo hạn $t = 1$ và K là giá thực thi của hợp đồng quyền chọn mua (hợp đồng mà người mua có quyền, nhưng không bắt buộc, mua chứng khoán với giá thực thi K tại thời điểm $t = 1$ khi giá chứng khoán S_1 cao hơn K, và có thể không thực hiện khi giá chứng khoán S_1 thấp hơn K) là một loại quyền phái sinh, có tên là **quyền mua kiểu Châu Âu.**

Một cách tổng quát, quyền tài chính là một biến ngẫu nhiên X xác định trên không gian xác định (Ω, F, P) biểu diễn **một thu hoạch** tại thời điểm đáo hạn $t = 1$.

* Cho X là một **quyền phái sinh**. Một phương án đầu tư (x, ϕ) được gọi là **phương án đáp ứng** (a replicating strategy) hay **một bảo hộ** (hedge) cho X nếu $V_1(x, \phi) = X$ tại thời điểm $t = 1$.

Ghi chú 2:

Trong mô hình tài chính lành mạnh, nếu X là một quyền tài chính và (x, ϕ) là phương án đáp ứng cho X thì x là giá của quyền tài chính X tại thời điểm hiện tại $t = 0$.

* Một quyền tài chính X được gọi là **đạt được** (attainable) hay **mua bán được** (marketable) nếu có một phương án đầu tư (x, ϕ) bảo hộ cho X.

* Thị trường tài chính là **đầy đủ** nếu mọi quyền tài chính X đều có thể tìm được một phương án (x, ϕ) bảo hộ cho X. Mô hình tài chính không có tính chất này gọi là mô hình tài chính **không đầy đủ.**

2.2. Giá của quyền tài chính đạt được

Mệnh đề II

Cho X là một quyền tài chính đạt được và Q là độ đo xác suất rủi ro trung tính xác định trên Ω thì giá giá x của X được định nghĩa như giá của một phương án đầu tư đáp ứng và có thể xác định từ công thức

$$x = E_Q\left[\frac{1}{B_1}.X\right] \tag{8}$$

Chứng minh:

Gọi (x, ϕ) là PA đầu tư đáp ứng cho X, nghĩa là $V_1(x, \phi) = X$.

Từ định nghĩa của quá trình giá đã chiết khấu, ta có:

$$\frac{1}{B_1}.X = \hat{V}_1(x, \phi)$$

suy ra
$$E_Q\left[\frac{1}{B_1}.X\right] = E_Q[\hat{V}_1(x, \phi)]$$
$$= E_Q[x + \hat{G}(x, \phi)]$$

$$= x + E_Q\left[\sum_{i=1}^{N}\phi^i \Delta\hat{S}^i\right]$$

$$= x + \sum_{i=1}^{N}\phi^i \ E_Q[\Delta\hat{S}^i]$$

$$= x \quad (\text{vì } E_Q[\Delta\hat{S}^i] = 0)$$

Vậy mệnh đề II đã được chứng minh.

Ghi chú 3:

Mệnh đề II cho ta kết quả: đối với mọi độ đo xác suất rủi ro trung tính xác định trên Ω, các giá trị kỳ vọng tính qua công thức (8) là bằng nhau.

2.3. Nguyên lý một giá trong thị trường tài chính đầy đủ

Trong [2], chúng tôi đã giới thiệu và chứng minh một nguyên lý: ***Thị trường tài chính là lành mạnh (nghĩa là không có cơ lợi hay không có PA kinh doanh kiếm lời được mà không bỏ vốn) khi và chỉ khi tồn tại một độ đo xác suất rủi ro trung tính.***

Sau đây chúng ta áp dụng Bổ đề Farkas để chứng minh một nguyên lý quan trọng khác của thị trường tài chính.

Định lý

Giả sử thị trường tài chính đang xét là lành mạnh thì thị trường tài chính là đầy đủ khi và chỉ khi tồn tại duy nhất một độ đo xác suất rủi ro trung tính.

Chứng minh:

(⇒) Giả sử thị trường tài chính là lành mạnh và đầy đủ. Theo nguyên lý căn bản định giá tài sản [2], thì tồn tại một độ đo xác suất rủi ro trung tính. Để chứng minh tính duy nhất, giả sử có 2 độ đo xác suất rủi ro trung tính Q_1, Q_2 xác định trên Ω, ta cần chứng minh $Q_1 = Q_2$.

Với mỗi $i = 1, 2, \ldots, \kappa$ ta xét quyền tài chính có dạng

$$X^i(\omega) = \begin{cases} B_1 \text{ khi } \omega = \omega_i \\ 0 \quad \text{nơi khác} \end{cases}$$

thì X^i là quyền tài chính đạt được, suy ra với mỗi $i = 1, 2, \ldots, \kappa$.

$$Q_1(\omega_i) = E_{Q_1}\left[\frac{1}{B_1}.X^i\right] = E_{Q_2}\left[\frac{1}{B_1}.X^i\right] = Q_2(\omega_i).$$

Vậy $Q_1 = Q_2$.

(⇐) Giả sử thị trường tài chính là lành mạnh và chỉ có duy nhất một độ đo xác suất rủi ro trung tính, ta cần chứng minh thị trường là đầy đủ. Để chứng minh điều này ta cần kết quả của 2 bổ đề sau:

Bổ đề 1

Giả sử thị trường tài chính là lành mạnh thì thị trường này là đầy đủ khi và chỉ khi ma trận κ hàng N+1 cột A xác định giá trị của phương án đầu tư tại thời điểm đáo hạn t = 1.

$$A = \begin{bmatrix} B_1 & S_1^1(\omega_1) & \dots & S_1^N(\omega_1) \\ B_1 & S_1^1(\omega_2) & \dots & S_1^N(\omega_2) \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ B_1 & S_1^1(\omega_K) & \dots & S_1^N(\omega_K) \end{bmatrix} \textit{ phải có hạng là } \kappa.$$

Chứng minh bổ đề 1:

Ma trận A có hạng là κ khi và chỉ khi với mỗi $X \in R^{\kappa}$

Phương trình $A\,H = X$ (9)

có một nghiệm duy nhất $H \in R^{N+1}$, trong đó H có thể xem như một phương án đầu tư $H = (\phi^0, \phi^1, \dots, \phi^N)$ và X là quyền tài chính

$X = (V_1(x, \phi)(\omega_1), \dots, V_1(x, \phi)(\omega_\kappa))^T$.

Điều này chứng tỏ rằng tìm một phương án đáp ứng cho một quyền tài chính X là tương đương với việc giải hệ phương trình (9) và do đó phát biểu của bổ đề 1 là đúng.

Bổ đề 2

Trong thị trường tài chính lành mạnh, quyền tài chính X là đạt được khi và chỉ khi $E_Q\left[\frac{1}{B_1}.X\right]$ *lấy cùng một giá trị đối với mọi độ đo xác suất rủi ro trung tính Q.*

Chứng minh bổ đề 2:

(⇒) Giả sử quyền tài chính X là đạt được thì từ mệnh đề II và ghi chú 3 ta có:

$E_Q\left[\frac{1}{B_1}.X\right]$ = x (hằng số) đối với mọi độ đo xác suất rủi ro trung tính Q.

(⇐) Giả sử quyền tài chính X là không đạt được, ta cần chứng minh có hai độ đo xác suất rủi ro trung tính Q_1 và Q_2 trên Ω mà

$$E_{Q_1}\left[\frac{1}{B_1}.X\right] \neq E_{Q_2}\left[\frac{1}{B_1}.X\right].$$

Khi X là không đạt được thì hệ (9) là không có nghiệm H, theo kết quả của Bổ đề Farkas và ghi chú 1 thì có một véctơ $\Pi = (\Pi_1, \ldots \Pi_K)$ thỏa $\Pi A = 0$ và $\Pi X > 0$.

Cho trước một độ đo xác xuất rủi ro trung tính Q_1 trên Ω

Đặt $Q_2(\omega_i) := Q_1(\omega_i) + \lambda \Pi_i B_1$, với $\lambda > 0$ khá bé sao cho:

$Q_2(\omega_i) > 0, \forall \omega_i \in \Omega$.

Từ tính chất $\Pi A = 0$, ta có:

$$\sum_{i=1}^{K} Q_2(\omega_i) = \sum_{i=1}^{K} Q_1(\omega_i) + \lambda \sum_{i=1}^{K} \Pi_i .B_1 = 1$$

Do đó, Q_2 cũng là độ đo xác suất trên Ω.

Mặt khác, $$E_{Q_2}\left[\frac{1}{B_1}.X\right] = \sum_{i=1}^{K} Q_2(\omega_i)[\frac{1}{B_1}.X(\omega_i)]$$

$$= \sum_{i=1}^{K} \frac{1}{B_1} Q_1(\omega_i) X(\omega_i) + \lambda \sum_{i=1}^{K} \Pi_i X(\omega_i)$$

$$= E_{Q_1}\left[\frac{1}{B_1}.X\right] + \lambda \Pi X$$

vì $\lambda \Pi X > 0$, suy ra $E_{Q_2}\left[\frac{1}{B_1}.X\right] \neq E_{Q_1}\left[\frac{1}{B_1}.X\right]$.

Vậy Bổ đề 2 được chứng minh.

Bây giờ ta chứng minh chiều ngược lại của định lý: lấy một quyền tài chính X bất kỳ, ta cần chứng minh là X đạt được.

Thật vậy, vì giả thiết chỉ có duy nhất một độ đo xác suất trung tính Q trong thị trường này nên $E_Q\left[\frac{1}{B_1}.X\right]$ có một giá trị duy nhất, vậy theo kết quả của Bổ đề 2 thì X là đạt được. Vậy thị trường tài chính là đầy đủ. Do đó, định lý đã được chứng minh.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Văn Hữu, Vương Quân Hoàng (2007), *Các phương pháp toán học trong tài chính*, Nxb Đại học Quốc gia Hà Nội.
2. Nguyễn Chí Long (2010), "Nguyên lý căn bản định giá tài sản trong thị trường tài chính", *Tạp chí Khoa học ĐHSP TP HCM*, (55), tr. 38 - 51.

3. Nguyễn Chí Long (2008), *Xác suất thống kê và quá trình ngẫu nhiên*, Nxb Đại học Quốc gia TP HCM.
4. Trần Hùng Thao (2004), *Nhập môn toán học tài chính*, Nxb KHKT Hà Nội.
5. A. Dax (1997), *An elementary proof of Farkas's lemma*, SIAM Rev., 39(3). pp.503-507.
6. Robert J. Elliott and P. E. Kopp (2005), *Mathematics of Financial Markets*, Springe Finance, Second Edition.
7. Hans Foellmer and Alexander Schied (2002), *An Introduction in Discrete time,* Walter de Gruyter.
8. G. Pennacchi (2008), *Theory of Asset Pricing,* Pearson Education, Increase affect.
9. Pliska (1997), *Introduction to Mathematical Finance,* Blackwell Publishing.
10. Krister Svanberg (2008), *Farkas' Lemma derived elementary linear Algebra*, Technical Report TRITA-MAT-2008-0S7.

THE STRUCTURE OF CONNES' C* – ALGEBRAS …

(Continued from page 23)

17. Vu L. A., Shum K. P. (2008), "Classification of 5-dimensional MD-algebra having commutative derived ideals", *Advances in Algebra and Combinatorics*, Singapore: World Scientific co, pp. 353-371.
18. Vu L. A., Hoa D. Q. (2009), "The topology of foliations formed by the generic K-orbits of a subclass of the indecomposable MD_5-groups", *Science in China, series A: Mathematics*, **52** (2) , pp. 351-360.
19. Vu L. A.; Hoa D. Q. (2010), "K-theory of the leaf space of foliations formed by the generic K-orbits of some indecomposable MD_5-groups", *Vietnam Journal of Mathematics,* **38** (2) , pp. 249 – 259.

THUẬT TOÁN TÌM CƠ SỞ CỦA GIAO VÀ TỔNG …

(Tiếp theo trang 29)

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Cartan, H.and Eilenberg,S (1956), *Homological Algebra* – Princeton University Press.
2. Cozzens, J.H (1972), "Simple principal left ideal domains", *J.Alg*.23.

3. Jategaonkar, A.V (1970), *Left Principal Ideal Rings*, Berlin-Heidelberg-New York.
4. Kaplansky, I. (1970), *Commutative Rings*, Allyn and Bacon, Inc. (1970).