

**PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN TRUNG TÂM BẬC THẤP
CHO BÀI TOÁN ĐÀN HỒI TUYẾN TÍNH
TẠI TRẠNG THÁI GẦN NHƯ KHÔNG NÉN ĐƯỢC**

HOÀNG THỊ THẢO PHƯƠNG^{*}, VÕ ĐỨC CẨM HẢI^{**}, ÔNG THANH HẢI^{***}

TÓM TẮT

Chúng tôi giới thiệu một phương pháp số mới cho bài toán đàn hồi tại trạng thái gần như không nén, gọi là phương pháp phần tử hữu hạn trung tâm bậc thấp (PTHHBT). Công thức hỗn hợp được sử dụng, với hai biến là độ dịch chuyển và hàm áp suất lần lượt được xấp xỉ bởi các hàm tuyến tính từng phần và hàm hằng từng phần trên các lưới khác nhau. Sự tồn tại và duy nhất nghiệm, sự ổn định và hội tụ của phương pháp được chứng minh. Các mô phỏng số được tiến hành để kiểm định sự hiệu quả của phương pháp mới đề xuất trên các bài toán thử khác nhau.

Từ khóa: đàn hồi tuyến tính, phần tử hữu hạn bậc thấp, điều kiện macroelement.

ABSTRACT

***A low-order cell-centered finite element method
for the nearly incompressible linear elasticity problem***

We propose a new numerical method for the nearly incompressible linear elasticity problem, called the low-order cell-centered finite element method. A mixed formulation is used in which the displacement and the pressure are respectively approximated by piecewise linear and piecewise constant functions on different meshes. The well-posedness, stability and convergence are proved. Numerical simulations are carried out to investigate the performance of the method on different test cases.

Keywords: linear elasticity, low-order finite elements, macroelement condition.

1. Giới thiệu

Các vật liệu cao su hoặc có tính đàn hồi giống cao su được sử dụng rất phổ biến trong công nghiệp do chúng có khả năng chịu được những sức căng lớn mà vẫn phục hồi lại được hình dạng cũ hoặc chỉ thay đổi rất ít. Khi những vật liệu này chịu lực tác động và đạt gần đến trạng thái cân bằng (hay còn gọi là trạng thái không nén được), nếu chúng ta sử dụng các phương pháp số thông thường như phương pháp phần tử hữu hạn, sai phân hữu hạn... để xấp xỉ sự dịch chuyển, sự biến dạng của những vật liệu này, thì nghiệm xấp xỉ sẽ không chính xác và không ổn định, hiện tượng này được gọi là “locking effect”. Đã có nhiều phương pháp số được đề xuất để khắc phục tình trạng này như phương pháp phần tử hữu hạn loại h [3], phương pháp B-bar [7], sử dụng công

^{*} TS, Trường Đại học Sư phạm TPHCM; Email: phuonghtt@hcmup.edu.vn

^{**} ThS, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG TPHCM

^{***} TS, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG TPHCM

thức hỗn hợp [2], [5]... Ngoài ra, có một số bài báo khảo sát công thức trung bình áp suất tại các nút (trong đó trường áp suất là hằng số trên một tập các tam giác hoặc tứ diện). Cụ thể trong [8] tác giả sử dụng hàm áp suất gián đoạn trên lưới kép và hàm bubble trên lưới ban đầu để làm giàu không gian xấp xỉ của độ dịch chuyển. Trong [10], các tác giả đề xuất các phương pháp dựa trên nguyên lý Hu-Washizu. Gần đây, có hai phương pháp mới ra đời dựa trên cơ sở toán học đầy đủ để xấp xỉ nghiệm của bài toán đàn hồi tại trạng thái gần như không nén. Ở phương pháp thứ nhất [9], ta xấp xỉ độ dịch chuyển bằng phương pháp phần tử hữu hạn bậc thấp và xấp xỉ áp suất bằng rời rạc Petrov-Galerkin. Ở phương pháp thứ hai [12], độ dịch chuyển và hàm áp suất được xấp xỉ như [8], trong khi độ biến dạng và toán tử divergence rời rạc được trung bình hóa trên lưới kép.

Các phương pháp kể trên đều có những mặt hạn chế nhất định như: i) cho sự xấp xỉ của ma trận độ cứng không chính xác; ii) không áp dụng được trên lưới tổng quát; iii) để xấp xỉ độ dịch chuyển, ta phải sử dụng hoặc là hàm xấp xỉ bậc cao, hoặc là hàm bậc thấp và bổ sung thêm các ẩn trên cạnh/mặt hoặc đỉnh bên cạnh các ẩn tại trung tâm phần tử; điều này khiến thuật toán trở nên khá tốn kém về mặt tính toán.

Trong bài báo này, chúng tôi trình bày một phương pháp số mới để xấp xỉ nghiệm của bài toán đàn hồi tuyến tính tại trạng thái gần như không nén, gọi là phương pháp phần tử hữu hạn trung tâm bậc thấp (PTHHBT), phát triển từ phương pháp trung tâm cho bài toán khuếch tán [11]. Trong phương pháp PTHHBT, hàm dịch chuyển và hàm áp suất lần lượt được xấp xỉ bởi các hàm tuyến tính từng phần và hàm hằng từng phần trên các lưới khác nhau. Phương pháp này có các ưu điểm như sau: i) có cơ sở toán học với các chứng minh về sự ổn định và hội tụ sử dụng kỹ thuật macroelement [13]; ii) có thể áp dụng được trên lưới tổng quát; iii) sử dụng hàm bậc thấp để xấp xỉ nhưng đem lại độ chính xác cao do cách xây dựng lưới, hơn nữa vì đây là phương pháp trung tâm nên ít tốn kém về mặt tính toán; iv) có thể tiến hành mô phỏng số dễ dàng dựa trên phần lập trình của phương pháp phần tử hữu hạn trên lưới tam giác.

Bố cục của bài báo như sau: ở mục 2, ta giới thiệu mô hình bài toán và phương pháp PTHHBT (bao gồm sự xây dựng các lưới, định nghĩa không gian xấp xỉ và viết bài toán rời rạc tương ứng); sự tồn tại duy nhất nghiệm của bài toán rời rạc, sự ổn định và hội tụ của phương pháp được chứng minh. Ở mục 3, các kết quả số so sánh phương pháp PTHHBT với phương pháp MINI [1] được trình bày.

2. Bài toán đàn hồi tuyến tính tại trạng thái gần như không nén rời rạc hóa bằng PTHHBT

Chúng ta giới thiệu mô hình bài toán ở dạng hỗn hợp và trình bày sự rời rạc hóa bằng cách sử dụng PTHHBT. Cụ thể ta sẽ xây dựng các lưới sử dụng trong phương pháp, định nghĩa các không gian xấp xỉ, viết bài toán rời rạc tương ứng và chỉ ra sự tồn tại nghiệm duy nhất của bài toán. Cuối cùng ta nêu hệ phương trình đại số tuyến tính liên kết với bài toán rời rạc trong đó các ẩn được đặt tại trung tâm của các phần tử của lưới ban đầu (đối với độ dịch chuyển) và lưới kép (đối với áp suất).

2.1. Mô hình bài toán

Cho miền Ω bị chặn trong \square^d ($d = 2,3$) với biên $\partial\Omega$ Lipschitz. Xét bài toán đàn hồi tuyến tính dừng ở dạng hỗn hợp như sau:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(\sigma(\mathbf{u})) &= \mathbf{f} \quad \text{trong } \Omega, \\ \operatorname{div}\mathbf{u} - \frac{1}{\lambda} p &= 0 \quad \text{trong } \Omega, \\ \mathbf{u} &= 0 \quad \text{trên } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{1}$$

trong đó: \mathbf{u} là độ dịch chuyển của một vật liệu đàn hồi, p là áp suất, σ là ứng suất và \mathbf{f} là lực tác dụng, $\mathbf{f} \in (L^2(\Omega))^d$. Để đơn giản, ta chỉ xét trường hợp biên Dirichlet thuần nhất.

Khi vật liệu đàn hồi là đẳng hướng, ứng suất được định nghĩa bởi:

$$\sigma(\mathbf{u}) = 2\mu\varepsilon(\mathbf{u}) + \lambda(\operatorname{div}\mathbf{u})\mathbf{Id}, \tag{2}$$

với \mathbf{Id} là ma trận đơn vị trong \square^{d^2} , $\varepsilon(\mathbf{u})$ là độ biến dạng cho bởi công thức:

$$\varepsilon(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T), \tag{3}$$

(ở đây \mathbf{A}^T kí hiệu ma trận chuyển vị của \mathbf{A}), λ và μ là các hệ số Lamé:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \tag{4}$$

với ν là tỉ số Poisson và E là môđun Young.

Từ các định nghĩa trên ta viết lại bài toán (1) dưới dạng:

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(2\mu\varepsilon(\mathbf{u}) + p\mathbf{Id}) &= \mathbf{f} \quad \text{trong } \Omega, \\ \operatorname{div}\mathbf{u} - \frac{1}{\lambda} p &= 0 \quad \text{trong } \Omega, \\ \mathbf{u} &= 0 \quad \text{trên } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{5}$$

Để xây dựng bài toán biên phân tương ứng với (5), ta giới thiệu các không gian sau:

$$L_0^2(\Omega) := \left\{ q \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} q d\Omega = 0 \right\}, \quad \mathbf{V}_0 := (H_0^1(\Omega))^d,$$

và kí hiệu $\|\bullet\|_0$ và $\|\bullet\|_1$ lần lượt là các chuẩn trên $L^2(\Omega)$ và \mathbf{V}_0 . Ta định nghĩa các dạng song tuyến tính và tuyến tính sau:

$$\begin{aligned}
 a: \quad \mathbf{V}_0 \times \mathbf{V}_0 &\rightarrow \mathbb{R} \\
 (\mathbf{u}, \mathbf{v}) &\mapsto a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2\mu \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) d\mathbf{x}, \\
 b: \quad \mathbf{V}_0 \times L_0^2(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\
 (\mathbf{u}, q) &\mapsto b(\mathbf{u}, q) = \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} d\mathbf{x}, \\
 c: \quad L_0^2(\Omega) \times L_0^2(\Omega) &\rightarrow \mathbb{R} \\
 (p, q) &\mapsto c(p, q) = \int_{\Omega} pq d\mathbf{x}, \\
 L_f: \quad \mathbf{V}_0 &\rightarrow \mathbb{R} \\
 \mathbf{v} &\mapsto L_f(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{x}.
 \end{aligned}$$

Với các kí hiệu như trên, ta viết bài toán biến phân của (5) như sau:

Tìm $\mathbf{u} \in \mathbf{V}_0$ và $p \in L_0^2(\Omega)$ thỏa mãn:

$$\begin{aligned}
 a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) &= L_f(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_0, \\
 b(\mathbf{u}, q) - \frac{1}{\lambda} c(p, q) &= 0, \quad \forall q \in L_0^2(\Omega).
 \end{aligned} \tag{6}$$

2.2. Sự xây dựng các lưới và các không gian xấp xỉ

Để đơn giản, ta xét trường hợp bài toán trong không gian hai chiều. Ta sẽ lần lượt xây dựng các lưới sau: lưới ban đầu \mathcal{T}_h , lưới kép \mathcal{T}_h^* và lưới kép phụ \mathcal{T}_h^{**} . Sau đó, ta định nghĩa các không gian xấp xỉ gồm các hàm tuyến tính từng phần trên các phần tử của lưới kép phụ \mathcal{T}_h^{**} (đối với độ dịch chuyển) và các hàm hằng từng phần trên các phần tử của lưới kép \mathcal{T}_h^* (đối với áp suất).

Giả sử Ω là một miền đa giác và \mathcal{T}_h là một lưới tổng quát của Ω bao gồm các tập con không giao nhau, đóng, liên thông và khác rỗng của Ω :

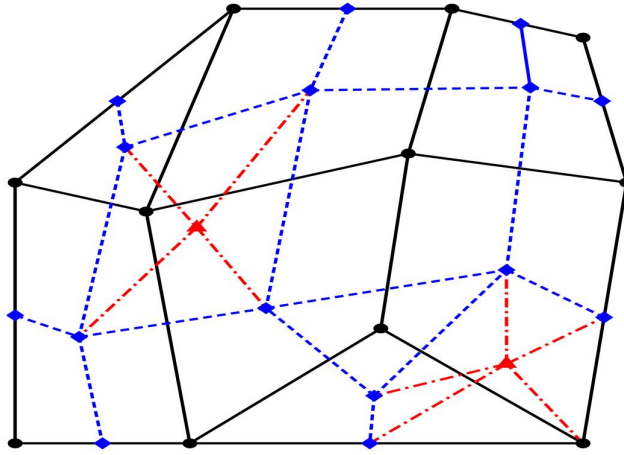
$$\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K.$$

Đối với mỗi phần tử K , ta chọn một điểm C_K bất kì thuộc phần trong của K và gọi đó là điểm lưới của K ; ta giả sử rằng đoạn thẳng nối hai điểm lưới của hai phần tử liền kề bất kì của lưới ban đầu chứa hoàn toàn trong Ω . Lưới kép \mathcal{T}_h^* thu được bằng cách nối các điểm lưới của các phần tử lưới ban đầu với nhau và với trung điểm của các cạnh nằm trên biên $\partial\Omega$ (xem Hình 1):

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{M \in \mathcal{T}_h^*} M,$$

trong đó M là các phần tử của lưới kép và ta kí hiệu C_M là điểm lưới của M (nhắc lại rằng C_M là một điểm trong của M). Cuối cùng ta xây dựng lưới kép phụ \mathcal{T}_h^{**} là lưới tam giác phụ của \mathcal{T}_h^* như sau: với mỗi $M \in \mathcal{T}_h^*$, ta nối C_M với các đỉnh của M và thu được các phần tử tam giác, kí hiệu T , của lưới kép phụ (xem Hình 1):

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{T \in \mathcal{T}_h^{**}} \bar{T}.$$



Hình 1. Lưới ban đầu \mathcal{T}_h (đường đen liền nét), lưới kép \mathcal{T}_h^* (nét đứt) và ví dụ về một số phần tử tam giác của lưới kép phụ \mathcal{T}_h^{**} (nét chấm gạch)

Không gian xấp xỉ cho độ dịch chuyển và áp suất lần lượt là:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h &:= \left\{ \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_0 : \mathbf{v}_h|_T \in \left(\mathbb{P}^1(T) \right)^2, \forall T \in \mathcal{T}_h^{**} \right\} \subset \mathbf{V}_0, \\ p_h \in Q_h &:= \left\{ q_h \in L^2(\Omega) : q_h|_M \in \mathbb{P}^0(M), \forall M \in \mathcal{T}_h^* \right\} \subset L^2_0(\Omega). \end{aligned} \tag{7}$$

2.3. Bài toán rời rạc hóa - Sự tồn tại và duy nhất nghiệm

Bài toán rời rạc hóa sử dụng PTHHBT được phát biểu như sau:

Tìm $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$ và $p_h \in Q_h$ thỏa mãn

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) &= L_f(\mathbf{v}_h), \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \\ b(\mathbf{u}_h, q_h) - \frac{1}{\lambda} c(p_h, q_h) &= 0, \quad \forall q_h \in Q_h. \end{aligned} \tag{8}$$

Định lí. Tồn tại nghiệm duy nhất $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$ của bài toán rời rạc (8). Hơn nữa, ta có ước lượng sau:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_1 + \|p - p_h\|_0 \leq C \left(\inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_1 + \inf_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\|_0 \right), \quad (9)$$

trong đó $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{V}_0 \times L^2_0(\Omega)$ là nghiệm của bài toán liên tục (6) và C là hằng số độc lập với kích thước lưới.

Chứng minh.

Ta áp dụng lí thuyết phân tử hữu hạn hỗn hợp [6, Chương 2] để chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm của (8). Cụ thể ta cần kiểm tra 3 điều kiện sau:

1. Dạng song tuyến tính $a(\cdot, \cdot)$ là đối xứng, liên tục và thỏa mãn điều kiện kháng đều (uniform coercivity), nghĩa là tồn tại hằng số $\alpha > 0$ sao cho:

$$a(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) \geq \alpha \|\mathbf{v}_h\|_1, \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h^0 := \left\{ \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h : b(\mathbf{v}_h, q_h) = 0, \forall q_h \in Q_h \right\}. \quad (10)$$

2. Dạng song tuyến tính $b(\cdot, \cdot)$ là liên tục và thỏa mãn điều kiện inf-sup đều, nghĩa là tồn tại hằng số $\beta > 0$ sao cho:

$$\inf_{q_h \in Q_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{b(\mathbf{v}_h, q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_1 \|q_h\|_0} \geq \beta, \quad \|\mathbf{v}_h\|_1 \neq 0, \|q_h\|_0 \neq 0. \quad (11)$$

3. Dạng song tuyến tính $c(\cdot, \cdot)$ là đối xứng, liên tục và nửa xác định dương, nghĩa là:

$$c(q_h, q_h) \geq 0, \quad \forall q_h \in Q_h. \quad (12)$$

Các điều kiện về đối xứng và liên tục dễ dàng kiểm tra từ định nghĩa của các dạng song tuyến tính. Điều kiện nửa xác định dương (12) có thể chứng minh đơn giản. Điều kiện kháng đều (10) thỏa mãn nhờ bất đẳng thức Korn. Còn lại điều kiện inf-sup đều (11) thường là điều kiện khó kiểm tra nhất trong việc chứng minh tính ổn định của phương pháp số giải bài toán đàn hồi tại trạng thái gần như không nén. Ở đây, ta sử dụng kĩ thuật macroelement [13] để chứng minh bất đẳng thức (11). Chú ý rằng với cách xây dựng lưới của PTHHBT thì mỗi phần tử M của lưới kép \mathcal{T}_h^* là một macroelement. Ta cần chỉ ra rằng không gian N_M là một chiều, với

$$N_M = \left\{ q_h \in Q_M : \int_M q_h \operatorname{div}(\mathbf{v}_h) = 0, \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_{0,M} \right\},$$

trong đó

$$Q_M = \{q_h \in Q_h : q_h = 0 \text{ trong } \Omega \setminus M\}, \mathbf{V}_{0,M} = \{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h : \mathbf{v}_h = 0 \text{ trong } \Omega \setminus M\}.$$

Thật vậy, theo định nghĩa không gian xấp xỉ của PTHHBT, với $q_h \in Q_M$ ta có:

$$\int_M q_h \operatorname{div}(\mathbf{v}_h) = q_M \int_M \operatorname{div}(\mathbf{v}_h) = q_M \int_{\partial M} \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n} = 0, \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_{0,M}.$$

Suy ra $N_M \equiv Q_M$ nên N_M là không gian một chiều với mọi macroelement $M \in \mathcal{T}_h^*$. Ta áp dụng Định lí 2.1 trong [13, tr. 5] để có được điều cần chứng minh.

2.4. Hệ phương trình đại số tuyến tính

Hệ phương trình đại số tuyến tính liên kết với bài toán (8) thu được bằng cách lấy các hàm thử lần lượt là các hàm cơ sở của các không gian xấp xỉ \mathbf{V}_h và Q_h . Hơn nữa, do cách xây dựng các lưới trong PTHHBT, ta có thể đưa về các ẩn tại các điểm lưới của lưới ban đầu và lưới kép - nghĩa là phương pháp PTHHBT là phương pháp trung tâm với các ẩn xấp xỉ giá trị trung bình của độ dịch chuyển và độ biến dạng lần lượt trên các phần tử của lưới ban đầu và lưới kép (các phép biến đổi được tiến hành dựa trên ý tưởng trình bày trong [11]). Hệ phương trình thu được có dạng sau:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}' \\ \mathbf{B} & -\frac{1}{\lambda} \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

trong đó $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ và \mathbf{F} lần lượt là các ma trận liên kết với các dạng song tuyến tính $a(\cdot, \cdot)$, $b(\cdot, \cdot)$, $c(\cdot, \cdot)$ và dạng tuyến tính $L_f(\cdot)$; hơn nữa ta có \mathbf{A} là ma trận đối xứng, xác định dương, \mathbf{C} là ma trận đường chéo; các ẩn $\mathbf{U} = (u_{C_K}^{(1)}, u_{C_K}^{(2)})_{K \in \mathcal{T}_h}$ và $\mathbf{P} = (p_{C_M})_{M \in \mathcal{T}_h^*}$ đặt tại trọng tâm của các phần tử lưới ban đầu (đối với độ dịch chuyển) và tại trọng tâm của các phần tử lưới kép (đối với áp suất).

3. Kết quả số

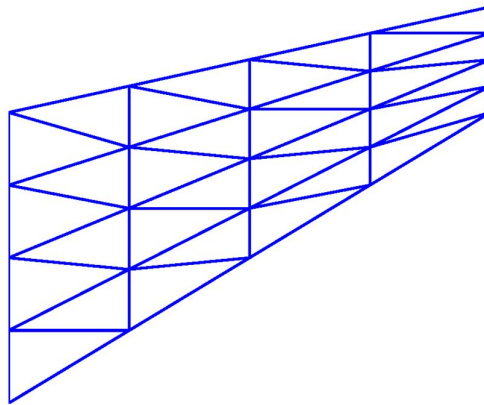
Ta tiến hành mô phỏng số cho thuật toán PTHHBT và so sánh các kết quả với phương pháp MINI [1]. Ta định nghĩa hai loại sai số của phương pháp PTHHBT như sau: *Sai số loại một*, kí hiệu $\operatorname{erl2}_{\text{rel}}^{\text{DIS}}$, là sai số tương đối theo chuẩn trong L^2 của độ dịch chuyển và được định nghĩa trên lưới ban đầu; *Sai số loại hai*, kí hiệu $\widehat{\operatorname{erl2}}_{\text{rel}}^{\text{DIS}}$, là sai số tương đối theo chuẩn trong L^2 của độ dịch chuyển sử dụng phần tử hữu hạn tam giác (FEM-T3) trên lưới kép phụ:

$$\text{erl2}_{\text{rel}}^{\text{DIS}} = \left(\frac{\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| |\mathbf{u}(x_{C_K}) - \mathbf{u}_{C_K}|^2}{\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |K| |\mathbf{u}(x_{C_K})|^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \widehat{\text{erl2}}_{\text{rel}}^{\text{DIS}} = \left(\frac{\sum_{T \in \mathcal{T}_h^{**}} \int_T |\mathbf{u} - \mathbf{u}_{T_h^{**}}|^2 \, dx}{\sum_{T \in \mathcal{T}_h^{**}} \int_T |\mathbf{u}|^2 \, dx} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Sai số loại một dùng để kiểm tra tính trung tâm của PTHHBT vì nó so sánh sự khác biệt của các giá trị tại các điểm lưới của nghiệm xấp xỉ và nghiệm chính xác. Sai số loại hai được đưa ra vì phương pháp PTHHBT tương đương với FEM-T3 trên \mathcal{T}_h^{**} .

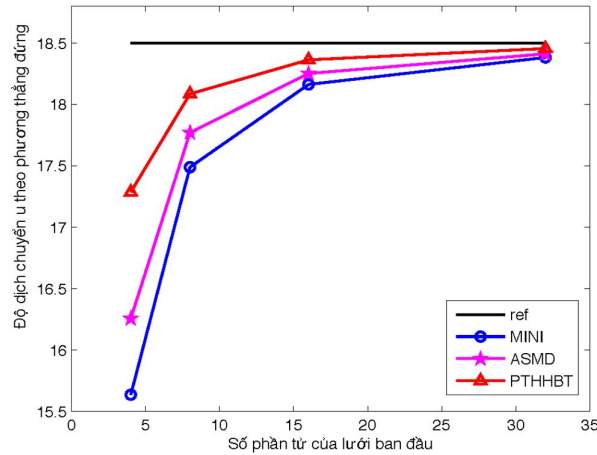
3.1. Bài toán màng Cook

Đây là bài toán thường được sử dụng để kiểm tra tính chính xác của một phương pháp số khi mô hình hóa sự uốn cong của vật liệu đàn hồi và sự nhạy của phương pháp đối với hiện tượng "volumetric locking". Miền tính toán (Hình 2) là một bao lồi cho bởi: $\Omega = \text{conv} \{ (0,0), (48,44), (48,60), (0,44) \}$.



Hình 2. Miền tính toán của bài toán màng Cook, rời rạc bởi các phần tử tam giác

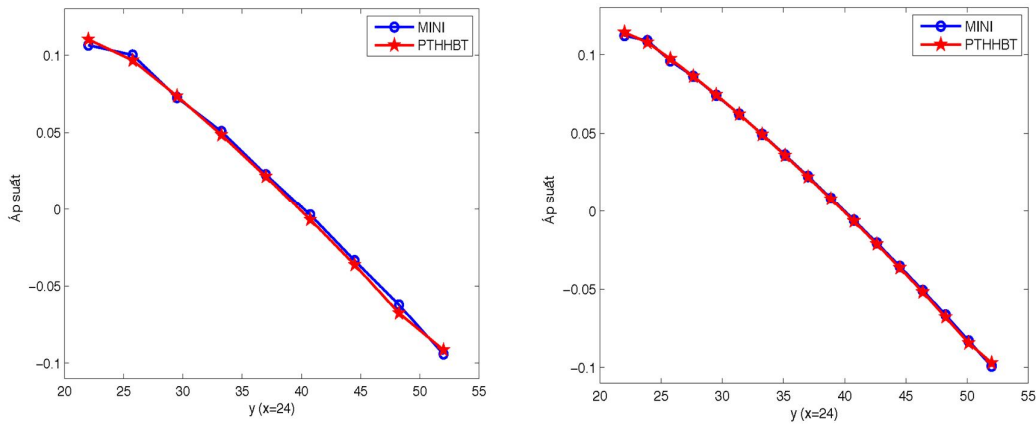
Biên trái của Ω được giữ cố định, biên phải chịu tác động của một tải trọng có độ lớn là 1 theo phương thẳng đứng. Vật liệu được đặc trưng bởi hai thông số: mô đun Young $E = 1$ và tỉ số Poisson $\nu = 0.4999999$. Vì bài toán này không có nghiệm giải tích nên ta sẽ so sánh nghiệm xấp xỉ của độ dịch chuyển theo phương thẳng đứng tại trung điểm của biên phải với nghiệm tham chiếu bằng 18.50002.



Hình 3. Sự hội tụ của độ dịch chuyển tại điểm (48,52), ở đây nghiệm tham chiếu được biểu diễn là đường đen liền nét

Giá trị của độ dịch chuyển theo phương thẳng đứng tại điểm (48,52) xấp xỉ bởi các phương pháp PTHHBT, MINI và ASMD [4]. Chúng ta thấy rằng PTHHBT cho nghiệm xấp xỉ gần với giá trị tham chiếu nhất.

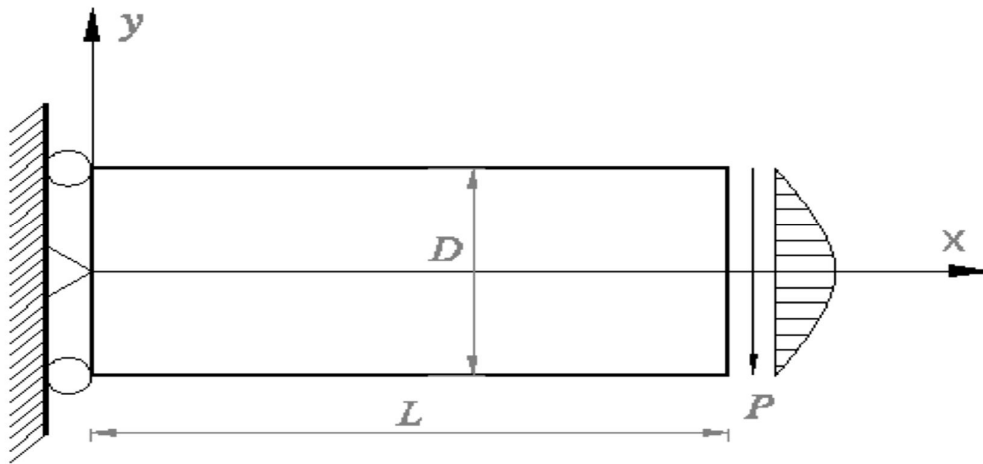
Ở Hình 4, ta phác họa sự phân phối của áp suất qua màng với các lưới kích cỡ khác nhau (lưới 64 phần tử và lưới 256 phần tử). Kết quả cho thấy cả hai phương pháp MINI và PTHHBT đều ổn định.



Hình 4. Sự phân bố của áp suất dọc đường thẳng $x = 24$ trên các lưới tam giác ban đầu lần lượt gồm 64 phần tử (hình trái) và 256 phần tử (hình phải)

3.2. Bài toán dầm tải trọng một đầu

Xét một tấm dầm có chiều dài $L = 48\text{m}$, chiều rộng $D = 12\text{m}$ và độ dày $T = 1\text{m}$. Tấm dầm chịu tác động của một lực kéo $P = 1000\text{N}$ tại đầu thả tự do như trên Hình 5.



Hình 5. Mô hình bài toán dầm tải trọng tại một đầu

Điều kiện ứng suất phẳng được giả định, môđun Young $E = 3.0 \times 10^7$ N/m, hệ số Poisson $\nu = 0.4999999$. Nghiệm giải tích của bài toán được cho bởi:

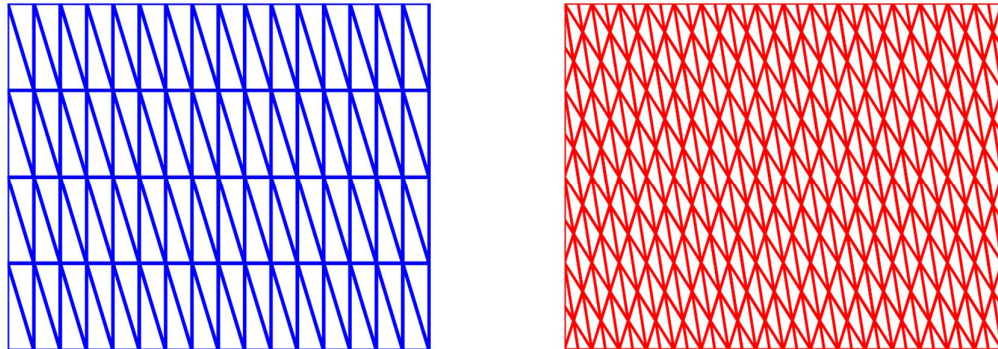
$$u_x = \frac{Py}{6EI} \left[(6L - 3x)x + (2 + \nu) \left(y^2 - \frac{D^2}{4} \right) \right],$$

$$u_y = -\frac{P}{6EI} \left[3\nu y^2(L - x) + (4 + 5\nu) \frac{D^2 x}{4} + (3L - x)x^2 \right],$$

trong đó, I là moment quán tính của tấm dầm có tiết diện hình chữ nhật và độ dày đơn vị, xác định bởi: $I = \frac{D^3}{12}$. Với nghiệm giải tích như trên, ta tính được các ứng suất như sau:

$$\sigma_{xx}(x, y) = \frac{P(L - x)y}{I}; \quad \sigma_{yy}(x, y) = 0; \quad \tau_{xy}(x, y) = -\frac{P}{2I} \left(\frac{D^2}{4} - y^2 \right).$$

Để tìm nghiệm xấp xỉ của bài toán, ta chia miền tính toán thành các phần tử tam giác (lưới ban đầu) và từ đó xây dựng lưới kép, lưới kép phụ như Hình 6. Ta so sánh sai số tương đối theo chuẩn L^2 của độ dịch chuyển xấp xỉ bởi phương pháp PTHHBT và MINI trong Bảng 1.



Hình 6. Miền tính toán của bài toán dầm chia bởi lưới tam giác ban đầu (hình trái) và lưới kép phụ tương ứng (hình phải)

Bảng 1. Sai số tương đối theo chuẩn L^2 của độ dịch chuyển xấp xỉ bởi phương pháp PTHHBT và MINI cho bài toán dầm trên các cỡ lưới tam giác khác nhau

Lưới \mathcal{T}_h	$16 \times 4 \times 2$	$24 \times 6 \times 2$	$32 \times 8 \times 2$	$40 \times 10 \times 2$	$48 \times 4 \times 2$
Số bậc tự do của \mathbf{u} (MINI)	426	926	1618	2502	3578
Số bậc tự do của \mathbf{u} (PTHHBT)	256	576	1024	1600	2304
$erl2_{rel}^{DIS}$ (MINI)	8.38 e-02	3.92 e-02	2.23 e-02	1.44 e-02	1.00 e-02
$erl2_{rel}^{DIS}$ (PTHHBT)	2.98 e-02	1.12 e-03	5.83 e-04	3.56 e-04	2.40e-04
$\widehat{erl2}_{rel}^{DIS}$ (PTHHBT)	2.65 e-03	9.66 e-04	4.89 e-04	2.94 e-04	1.96 e-04

Ta thấy với cùng một cỡ lưới, số bậc tự do của độ dịch chuyển trong PTHHBT là nhỏ hơn nhiều so với MINI (số bậc tự do áp suất của hai phương pháp là bằng nhau). Trong khi đó, sai số theo chuẩn L^2 của độ dịch chuyển cho bởi PTHHBT tốt hơn rất nhiều sai số cho bởi MINI. Để giải thích cho điều này, ta chú ý rằng lưới kép phụ mịn hơn nhiều so với lưới ban đầu (Hình 6), và PTHHBT xấp xỉ nghiệm trên lưới kép phụ nên sẽ cho sai số nhỏ hơn. Tuy nhiên, vì phương pháp PTHHBT là trung tâm do cách xây dựng lưới (xem mục 2.4) nên số bậc tự do thấp hơn MINI. Bậc hội tụ theo chuẩn L^2 của độ dịch chuyển trong trường hợp phương pháp MINI là 1.92, còn với PTHHBT là 2.32 (sai số loại 1) và 2.40 (sai số loại 2). Như vậy, PTHHBT hiệu quả hơn MINI vì cho nghiệm xấp xỉ với độ chính xác cao hơn với chi phí tính toán thấp hơn MINI.

Ghi chú: Nghiên cứu này được tài trợ bởi Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh trong khuôn khổ đề tài mã số CS2015.19.60.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Arnold, D. N., Brezzi, F., & Fortin, M. (1985), "A stable finite element for the Stokes equations", *Calcolo*, 21 (1984), 337-344.
2. Arnold, D. N., & Winther, R. (2002), "Mixed finite elements for elasticity", *Numer. Math.*, 92, 401-419.
3. Babuska, I. & Suri, M. (1992), "Locking effects in the finite element approximation of elasticity problems", *Numer. Math.*, 62, 439-463.
4. Belytschko, T. & Bindeman, L. P. (1991), "Assumed strain stabilization of the 4-node quadrilateral with 1-point quadrature for nonlinear problems", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 88, 311-340.
5. Braess, D. (1996), "Stability of saddle point problems with penalty", *RAIRO Model. Math. Anal. Numer.*, 30, 731-742.
6. Brezzi, F. & Fortin, M. (1991), *Mixed and hybrid finite element methods*, Springer-Verlag, New York.
7. Hughes, T. (1987), *The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.
8. Lamichhane, B. P. (2009), "Inf-sup stable finite-element pairs based on dual meshes and bases for nearly incompressible elasticity", *IMA J. Numer. Anal.*, 29, 404-420.
9. Lamichhane, B. P. (2014), "A stabilized mixed finite element method based on g-biorthogonal systems for nearly incompressible elasticity", *Computers and Structures*, 140, 48-54.
10. Lamichhane, B. P., Reddy, B. D. & Wohlmuth, B. I. (2006), "Convergence in the incompressible limit of finite element approximations based on the Hu-Washizu formulation", *Numer. Math.*, 104, 151-175.
11. Le Potier, C. & Ong Thanh Hai (2012), "A cell-centered scheme for heterogeneous anisotropic diffusion problems on general meshes", *International journal on Finite Volumes*, 8.
12. Ong Thanh Hai, Heaney, C. E., Lee, C. K., Nguyen Xuan Hung & Liu, G. R. (2015), "On stability, convergence and accuracy of bES-FEM and bFS-FEM for nearly incompressible elasticity", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 285, 315-345.
13. Stenberg, R. (1990), "Error analysis of some finite element methods for the Stokes problems", *Math. Comp.*, 54, 495-508.

(Ngày Tòa soạn nhận được bài: 15-5-2016; ngày phản biện đánh giá: 05-6-2016;
ngày chấp nhận đăng: 13-6-2016)