VA CHẠM CỦA MỘT VẬT RẮN VÀ MỘT THANH ĐÀN HỒI NHỚT TUYẾN TÍNH: SỰ TỒN TẠI TOÀN CỤC VÀ ỔN ĐỊNH CỦA NGHIỆM

NGUYỄN THÀNH LONG[1], LÊ VĂN ÚT[2],
NGUYỄN THỊ THẢO TRÚC[3]

1. Giới thiệu

Trong bài này, chúng tôi xét bài toán: Tìm một cặp hàm (u,Q) thỏa

(1.1) $u_{tt} - \mu(t)u_{xx} + F(u,u_t) = f(x,t),\ 0 < x < 1,\ 0 < t < T,$

(1.2) $u(0,t) = 0,$

(1.3) $-\mu(t)u_x(1,t) = Q(t),$

(1.4) $u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x),$

trong đó $F(u,u_t) = Ku + \lambda u_t$, với K,λ là các hằng số và u_0, u_1, f, μ là các hàm cho trước thỏa một số điều kiện sẽ được chỉ rõ ở phía sau, ẩn hàm $u(x,t)$ và giá trị biến chưa biết $Q(t)$ thỏa một phương trình tích phân

(1.5) $$Q(t) = K_1(t)u(1,t) + \lambda_1(t)u_t(1,t) - g(t) - \int_0^t k(t-s)u(1,s)ds,$$

trong đó g, k, K_1, λ_1 là các hàm cho trước.

Trong [10] Long, Út và Trúc đã xét bài toán (1.1), (1.3), (1.4) với điều kiện biên (1.2) thay bởi

(1.6) $u(0,t) = q(t),$

trong đó $q(t)$ là hàm cho trước. Trong [10] chúng tôi đã thiết lập một khai triển tiệm cận nghiệm (u,Q) bài toán (1.1), (1.3), (1.4), (1.6) theo hai tham số bé K,λ.

---

(1) Khoa Toán- Tin học, Đại học Khoa học Tự nhiên T.P. Hồ Chí Minh.
(2) Khoa học Tự nhiên, Đại học Tại Chức Cần Thơ.
(3) Bộ môn Toán, Khoa Sư Phạm, Đại học Cần Thơ.

Trong trường hợp $K = \lambda = 0$, Santos [13] đã nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của nghiệm bài toán (1.1), (1.2), (1.4) liên quan đến điều kiện biên thuộc loại memory tại $x = 1$ như sau:

(1.7) $$u(1,t) + \int_0^t g(t-s)\mu(s)u_x(1,s)ds = 0, \quad t > 0.$$

Sử dụng toán tử Voltera nghịch đảo, Santos [13] đã biến đổi điều kiện biên (1.7) thành (1.3), (1.5) với $K_1(t) = \frac{g'(0)}{g(0)}$, $\lambda_1(t) = \frac{1}{g(0)}$ là các hằng số dương.

Trong trường hợp $\lambda_1(t) \equiv 0$, $K_1(t) = h \geq 0$, $\mu(t) = 1$, bài toán (1.1)-(1.5) được xây dựng từ bài toán (1.1)-(1.4) trong đó, ẩn hàm $u(x,t)$ và giá trị biên chưa biết $Q(t)$ thỏa một bài toán Cauchy cho một phương trình vi phân thường

(1.8) $$\begin{cases} Q''(t) + \omega^2 Q(t) = hu_{tt}(1,t), \ 0 < t < T, \\ Q(0) = Q_0, \ Q'(0) = Q_1, \end{cases}$$

trong đó $h \geq 0, \omega > 0, Q_0, Q_1$ là các hằng số cho trước [6].

Trong [1], An và Triều đã nghiên cứu một trường hợp riêng của bài toán (1.1)-(1.4), (1.8) với $u_0 = u_1 = Q_0 = 0$ và $F(u,u_t) = Ku + \lambda u_t$, với $K \geq 0, \lambda \geq 0$ là các hằng số cho trước. Trong trường hợp này bài toán (1.1)-(1.4) và (1.8) là một mô hình toán học mô tả sự va chạm của một vật rắn và một thanh đàn hồi nhớt tuyến tính đặt trên nền cứng [1].

Từ bài toán (1.8) ta biểu diễn hàm $Q(t)$ theo $Q_0, Q_1, \omega, h, u_{tt}(1,t)$ và sau đó lấy tích phân từng phần, ta thu được:

(1.9) $$Q(t) = hu(1,t) - g(t) - \int_0^t k(t-s)u(1,s)ds,$$

trong đó

(1.10) $$g(t) = -(Q_0 - hu_0(1))\cos\omega t - \frac{1}{\omega}(Q_1 - hu_1(1))\sin\omega t,$$

(1.11) $$k(t) = h\omega \sin\omega t.$$

Trong [2] Bergounioux, Long và Định đã nghiên cứu bài toán (1.1), (1.4) với các điều kiện biên (1.2), (1.3) thay bởi:

(1.12) $$u_x(0,t) = hu(0,t) + g(t) - \int_0^t k(t-s)u(0,s)ds,$$

(1.13) $$u_x(1,t) + K_1 u(1,t) + \lambda_1 u_t(1,t) = 0,$$

trong đó

(1.14) $$g(t) = \left(Q_0 - hu_0(0)\right)\cos\omega t + \frac{1}{\omega}\left(Q_1 - hu_1(0)\right)\sin\omega t,$$

(1.15) $$k(t) = h\omega \sin\omega t,$$

với $h \ge 0$, $\omega > 0$, Q_0, Q_1, K, λ, K_1, λ_1 là các hằng số cho trước.

Cũng cùng loại với bài toán trên, trong [12], Long, Định, Diễm đã nghiên cứu bài toán biên phi tuyến dưới đây:

(1.16) $$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + K|u|^{\alpha}u + \lambda|u_t|^{\beta}u_t = f(x,t),\ 0 < x < 1, 0 < t < T, \\ u_x(0,t) = P(t), \\ u_x(1,t) + K_1 u(1,t) + \lambda_1 u_t(1,t) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x), \\ P(t) = g(t) + hu(0,t) - \int_0^t k(t-s)u(0,s)ds, \end{cases}$$

trong đó u_0, u_1, f là các hàm số cho trước, $K, K_1, \alpha, \beta, \lambda$ và λ_1 là các hằng số không âm cho trước.

Bài báo gồm hai phần chính. Trong phần 1, chúng tôi chứng minh một định lý tồn tại toàn cục và duy nhất nghiệm yếu (u,Q) của bài toán (1.1)-(1.5). Chứng minh nhờ vào phương pháp xấp xỉ Galerkin kết hợp với một số đánh giá tiên nghiệm và các lý luận quen thuộc về sự hội tụ yếu và tính compact. Sự khó khăn gặp phải ở đây là điều kiện biên tại $x = 1$. Để giải quyết sự khó khăn này, các giả thiết mạnh hơn về điều kiện đầu u_0 và u_1 sẽ được thành lập. Ta chú ý rằng phương pháp tuyến tính hóa trong các bài báo [3, 7] không sử dụng được trong bài toán này và trong [2, 5, 6]. Trong phần 2, chúng tôi thu được sự ổn định của nghiệm (u,Q) của bài toán (1.1)-(1.5) đối với các dữ kiện $(K, \lambda, \mu, \lambda_1, f, g, k, K_1)$. Các kết quả thu được ở đây đã tổng quát hóa tương đối các kết quả trong [1-3, 5-13].

2. Định lý tồn tại và duy nhất

Đặt $\Omega = (0,1)$, $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $T > 0$. Chúng ta bỏ qua các định nghĩa của các không gian thông dụng như $C^m(\overline{\Omega})$, $L^p(\Omega)$, $W^{m,p}(\Omega)$. Ta ký hiệu $W^{m,p} = W^{m,p}(\Omega)$, $L^p = W^{0,p}(\Omega)$, $H^m = W^{m,2}(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$, $m = 0,1,\ldots$

Chuẩn L^2 được ký hiệu bởi $\|\cdot\|$. Ta cũng ký hiệu bởi $\langle\cdot,\cdot\rangle$ chỉ tích vô hướng trong L^2 hay cặp tích đối ngẫu của phiếm hàm tuyến tính liên tục với một phần tử của một không gian hàm. Ta ký hiệu bởi $\|\cdot\|_X$ là chuẩn của một không gian Banach X và bởi X' là không gian đối ngẫu của X. Ta ký hiệu bởi $L^p(0,T;X)$, $1 \le p \le \infty$ cho không gian Banach các hàm $u:(0,T) \to X$ đo được, sao cho

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt \right)^{1/p} < \infty \quad \text{với } 1 \le p \le \infty,$$

và

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \operatorname*{ess\,sup}_{0<t<T} \|u(t)\|_X \quad \text{với } p = \infty.$$

Ký hiệu $u(t), u'(t) = u_t(t), u''(t) = u_{tt}(t), u_x(t), u_{xx}(t)$ để chỉ $u(x,t)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)$, $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$, lần lượt.

Ta đặt

$$(2.1) \qquad V = \{v \in H^1(0,1) : v(0) = 0\}, \quad a(u,v) = \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx.$$

V là không gian Hilbert đối với tích vô hướng $a(\cdot,\cdot)$ và trên V, $\|v\|_{H^1}$ và $\|v\|_V = \sqrt{a(v,v)} = \|v_x\|$ là các chuẩn tương đương.

Ta thành lập các giả thiết sau:

(H_1) $K, \lambda \in IR$,

(H_2) $u_0 \in H^2$ và $u_1 \in H^1$,

(H_3) $g, K_1, \lambda_1 \in H^1(0,T)$, $\lambda_1(t) \ge \lambda_0 > 0$, $K_1(t) \ge 0$,

(H_4) $k \in H^1(0,T)$,

(H_5) $\mu \in H^2(0,T)$, $\mu(t) \ge \mu_0 > 0$,

(H_6) $f, f_t \in L^2(Q_T)$.

Khi đó ta có định lý sau:

Định lý 1. *Cho $T > 0$. Giả sử $(H_1)-(H_6)$ đúng. Khi đó, tồn tại duy nhất một nghiệm yếu (u,Q) của bài toán (1.1)-(1.5) sao cho*

$$(2.2) \qquad \begin{cases} u \in L^\infty(0,T;V \cap H^2), u_t \in L^\infty(0,T;H^1), u_{tt} \in L^\infty(0,T;L^2), \\ u(1,\cdot) \in H^2(0,T), \ Q \in H^1(0,T). \end{cases}$$

Chú thích 1. Từ (2.2), thành phần u trong nghiệm yếu (u,Q) của bài toán (1.1)-(1.5) thỏa

$$(2.3) \qquad u \in C^0(0,T;V) \cap C^1(0,T;L^2) \cap L^\infty(0,T;V \cap H^2).$$

Chứng minh Định lý 1. Chứng minh gồm 4 bước.

Bước 1. *Xấp xỉ Galerkin.* Giả sử $\{w_j\}$ là một cơ sở đếm được của $V \cap H^2$. Ta tìm nghiệm xấp xỉ của bài toán (1.1)-(1.5) dưới dạng

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} c_{mj}(t) w_j, \tag{2.4}$$

trong đó các hàm hệ số c_{mj} thỏa hệ phương trình vi- tích phân

$$\begin{aligned} &\langle u_m''(t), w_j\rangle + \mu(t)\langle u_{mx}(t), w_{jx}\rangle + Q_m(t) w_j(1) + \langle F(u_m(t), u_m'(t)), w_j\rangle \\ &\qquad = \langle f(t), w_j\rangle,\ 1 \le j \le m, \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$Q_m(t) = K_1(t) u_m(1,t) + \lambda_1(t) u_m'(1,t) - \int_0^t k(t-s) u_m(1,s) ds - g(t), \tag{2.6}$$

$$\begin{cases} u_m(0) = u_{0m} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{mj} w_j \to u_0, & \textit{mạnh trong } H^2, \\ u_m'(0) = u_{1m} = \sum_{j=1}^{m} \beta_{mj} w_j \to u_1, & \textit{mạnh trong } H^1. \end{cases} \tag{2.7}$$

Từ các giả thiết của định lý 1, hệ (2.5)-(2.7) có nghiệm (u_m, Q_m) trên một khoảng nào đó $[0, T_m]$. Các đánh giá tiên nghiệm sau đây cho phép ta lấy $T_m = T$ với mọi m.

Chú thích 2. Sự tồn tại nghiệm địa phương (u_m, Q_m) của hệ (2.5)-(2.7) trên một khoảng $[0, T_m]$ được chứng minh bằng cách chuyển hệ này thành hệ phương trình vi- tích phân, sau đó dùng định lý điểm bất động Schauder. Kỹ thuật này cũng sử dụng trong các công trình khác của chúng tôi [8, 9].

Bước 2. *Đánh giá tiên nghiệm.*

Đánh giá I. Thay thế (2.6) vào (2.5) và nhân phương trình thứ j của (2.5) với $c_{mj}'(t)$, kế tiếp, lấy tổng theo j, sau đó tích phân từng phần theo biến thời gian ta được

$$\begin{aligned} S_m(t) = {} & S_m(0) + K\|u_{0m}\|^2 - 2g(0)u_{0m}(1) - K\|u_m(t)\|^2 - 2\lambda \int_0^t \|u_m'(s)\|^2 ds \\ & + \int_0^t \mu'(s)\|u_{mx}(s)\|^2 ds + \int_0^t [K_1'(s) - 2k(0)] u_m^2(1,s) ds \\ & + 2\left(u_m(1,t) \int_0^t k(t-s) u_m(1,s) ds + g(t) u_m(1,t) \right) \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$-2\int_0^t u_m(1,\tau)d\tau\left(g'(\tau)+\int_0^\tau k'(\tau-s)u_m(1,s)ds\right)$$
$$+2\int_0^t \langle f(s),u_m'(s)\rangle ds,$$

trong đó

(2.9) $$S_m(t)\equiv\|u_m'(t)\|^2+\mu(t)\|u_{mx}(t)\|^2+K_1(t)u_m^2(1,t)+2\int_0^t\lambda_1(s)|u_m'(1,s)|^2ds.$$

Dùng các giả thiết $(H_1)-(H_3)$, (H_5), ta suy ra rằng

(2.10) $$2S_m(0)+6|K|\|u_{0m}\|^2+4|g(0)u_{0m}(1)|\le C_1 \text{ với mọi } m,$$

(2.11) $$\begin{cases} C_1+\dfrac{8}{\mu_0}\left(g^2(t)+\displaystyle\int_0^t|g'(s)|^2ds\right)+2\displaystyle\int_0^t\|f(s)\|^2ds\le M_T^{(1)},\forall t\in[0,T],\\ M_T^{(2)}=(3+4|\lambda|+4T|K|)+\dfrac{8}{\mu_0^2}\displaystyle\int_0^T\left(k^2(\theta)+T|k'(\theta)|^2\right)d\theta,\end{cases}$$

trong đó C_1 là một hằng số chỉ tùy thuộc vào $\mu(0),K_1(0),g(0),K,u_0,u_1$ và $M_T^{(i)}$, $i=1,2$ là các hằng số chỉ tùy thuộc vào T. Khi đó, sau các bước đánh giá và tính toán dài dòng, ta thu được từ (2.8)-(2.11) rằng

(2.12) $$S_m(t)\le M_T^{(1)}+\int_0^t N_T^{(1)}(s)S_m(s)ds,$$

trong đó

(2.13) $$N_T^{(1)}(s)=\frac{2}{\mu_0}\left(|\mu'(s)|+|K_1'(s)-2k(0)|\right)+M_T^{(2)},\quad N_T^{(1)}\in L^1(0,T).$$

Do bổ đề Gronwall, ta thu được

(2.14) $$S_m(t)\le M_T^{(1)}\exp\left(\int_0^t N_T^{(1)}ds\right)\le M_T,\text{ với mọi } t\in[0,T].$$

Đánh giá II. Bây giờ ta đạo hàm (2.5) theo t, sau đó, nhân phương trình thứ j vừa nhận được với $c_{mj}''(t)$, kế tiếp, lấy tổng theo j, sau đó tích phân từng phần theo biến thời gian và sắp xếp lại các số hạng ta được

(2.15) $$X_m(t)\le 2X_m(0)+4|\mu'(0)|\|u_{0mx}\|\|u_{1mx}\|+6|K|\|u_{1m}\|^2+N_T^{(2)}(t)$$
$$+\int_0^t\widetilde{N}_T^{(1)}(s)X_m(s)ds,$$

trong đó

(2.16) $$X_m(t)=\|u''_m(t)\|^2+\mu(t)\|u'_{mx}(t)\|^2+2\int_0^t\lambda_1(s)|u''_m(1,s)|^2\,ds,$$

(2.17) $$N_T^{(2)}(t)=\frac{2}{\beta\mu_0^2}M_T|\mu'(t)|^2+\frac{2M_T}{\beta\mu_0}\int_0^t|K_1'(s)-k(0)|^2\,ds+\frac{2M_T}{\beta\mu_0}t\left(\int_0^t|k'(\theta)|d\theta\right)^2+\frac{2}{\mu_0^2}M_T\int_0^t|\mu''(s)|^2\,ds+\frac{2}{\beta}\int_0^t\|f'(s)\|^2\,ds+\frac{2}{\beta}\int_0^t|g'(s)|^2\,ds,$$

(2.18) $$\begin{cases}\widetilde{N}_T^{(1)}(s)=4T|K|+4|\lambda|+\dfrac{2}{\beta\mu_0}|K_1(s)+\lambda_1'(s)|^2+\dfrac{6}{\mu_0}|\mu'(s)|+2\beta+2,\\ \widetilde{N}_T^{(1)}\in L^1(0,T),\end{cases}$$

với $\beta=\dfrac{\lambda_0}{2\lambda_0+4}$. Chú ý rằng $H^1(0,T)\quad C^0([0,T])$, ta suy từ (2.7) và (H_1), (H_2), (H_5), rằng

(2.19)
$$2X_m(0)+4|\mu'(0)|\|u_{0mx}\|\|u_{1mx}\|+6|K|\|u_{1m}\|^2+N_T^{(2)}(t)\le\widetilde{M}_T^{(1)},\ a.e.,\ t\in[0,T],$$

trong đó $\widetilde{M}_T^{(1)}$ là một hằng số chỉ tùy thuộc vào T. Khi đó, ta suy ra từ (2.14)-(2.19), rằng

(2.20) $$X_m(t)\le\widetilde{M}_T^{(1)}+\int_0^t\widetilde{N}_T^{(1)}(s)X_m(s)ds.$$

Do bổ đề Gronwall, ta thu được từ (2.20) rằng

(2.21) $$X_m(t)\le\widetilde{M}_T^{(1)}\exp\left(\int_0^t\widetilde{N}_T^{(1)}(s)ds\right)\le\widetilde{M}_T\quad\forall t\in[0,T].$$

Mặt khác, ta suy ra từ (2.6), (2.14) và (2.21), rằng

(2.22) $$\|Q_m'\|_{L^2(0,T)}^2\le M_T,$$

trong đó M_T là một hằng số chỉ tùy thuộc vào T.

Bước 3. Qua giới hạn. Từ (2.6), (2.14), (2.21) và (2.22), ta suy ra rằng tồn tại một dãy con của $\{(u_m,Q_m)\}$ cũng vẫn ký hiệu như là $\{(u_m,Q_m)\}$, sao cho

$$(2.23)\qquad \begin{cases} u_m \to u & \text{trong } L^\infty(0,T;V\cap H^2), & \text{yếu *}, \\ u'_m \to u' & \text{trong } L^\infty(0,T;V), & \text{yếu *}, \\ u''_m \to u'' & \text{trong } L^\infty(0,T;L^2), & \text{yếu *}, \\ u_m(1,\cdot) \to u(1,\cdot) & \text{trong } H^2(0,T), & \text{yếu}, \\ Q_m \to \tilde{Q} & \text{trong } H^1(0,T), & \text{yếu}. \end{cases}$$

Do bổ đề compact của Lions [4: p.57] ta suy ra từ (2.23) rằng tồn tại một dãy con của $\{(u_m,Q_m)\}$ vẫn ký hiệu là $\{(u_m,Q_m)\}$, sao cho

$$(2.24)\qquad \begin{cases} u_m \to u & \text{mạnh trong } L^2(Q_T), \\ u'_m \to u' & \text{mạnh trong } L^2(Q_T), \\ u_m(1,\cdot) \to u(1,\cdot) & \text{mạnh trong } H^1(0,T), \\ u'_m(1,\cdot) \to u'(1,\cdot) & \text{mạnh trong } C^0[0,T], \\ Q_m \to \tilde{Q} & \text{mạnh trong } C^0[0,T]. \end{cases}$$

Từ (2.6) và $(2.24)_{3-4}$, ta có

$$(2.25)\qquad Q_m(t) \to K_1(t)u(1,t) + \lambda_1(t)u'(1,t) - \int_0^t k(t-s)u(1,s)ds - g(t) \equiv Q(t)$$

mạnh trong $C^0[0,T]$.

Do đó, ta suy ra từ $(2.24)_5$ và (2.25), rằng

$$(2.26)\qquad Q(t) = \tilde{Q}(t).$$

Qua giới hạn trong (2.5)-(2.7) nhờ vào (2.23)-(2.26) ta suy ra rằng (u,Q) thỏa bài toán

$$(2.27)\qquad \langle u''(t),w\rangle + \mu(t)\langle u_x(t),w_x\rangle + Q(t)w(1) + \langle Ku(t)+\lambda u'(t),w\rangle = \langle f(t),w\rangle,\ \forall w\in H^1,$$

$$(2.28)\qquad u(0)=u_0,\quad u'(0)=u_1,$$

$$(2.29)\qquad Q(t) = K_1(t)u(1,t) + \lambda_1(t)u_t(1,t) - \int_0^t k(t-s)u(1,s)ds - g(t).$$

Mặt khác, ta suy từ (2.27) và các giả thiết $(H_5)-(H_6)$, rằng

$$(2.30)\qquad u_{xx} = \frac{1}{\mu(t)}\left(u'' + Ku + \lambda\ u' - f\right) \in L^\infty(0,T;L^2).$$

Do đó $u\in L^\infty(0,T;V\cap H^2)$ và sự tồn tại được chứng minh xong.

Bước 4. Sự duy nhất nghiệm. Giả sử (u_1,Q_1) và (u_2,Q_2) là hai nghiệm yếu của bài toán (1.1)-(1.5) sao cho

$$(2.31)\qquad \begin{cases} u_i \in L^\infty(0,T;V\cap H^2), \\ u_i' \in L^\infty(0,T;H^1),\ u_i'' \in L^\infty(0,T;L^2), \\ u_i(1,\cdot) \in H^2(0,T),\ Q_i \in H^1(0,T),\ i=1,2. \end{cases}$$

Khi đó (u,Q) với $u = u_1 - u_2$ và $Q = Q_1 - Q_2$ thỏa bài toán biến phân

$$(2.32)\qquad \begin{cases} \langle u''(t), w\rangle + \mu(t)\langle u_x(t), w_x\rangle + Q(t)w(1) + \langle Ku + \lambda u', w\rangle = 0,\ \forall w \in H^1, \\ u(0) = u'(0) = 0, \end{cases}$$

trong đó

$$(2.33)\qquad Q(t) = K_1(t)u(1,t) + \lambda_1(t)u'(1,t) - \int_0^t k(t-s)u(1,s)ds.$$

Chọn $w = u'$ trong $(2.32)_1$, sau đó tích phân theo t, ta được

$$(2.34)\qquad S(t) \le \int_0^t m_1(s)S(s)ds,$$

trong đó

$$(2.35)\qquad S(t) = \|u'(t)\|^2 + \mu(t)\|u_x(t)\|^2 + K_1(t)u^2(1,t) + 2\int_0^t \lambda_1(s)\left|u'(1,s)\right|^2 ds,$$

và

$$(2.36)\qquad \begin{cases} m_1(s) = \dfrac{2}{\mu_0}\left(|\mu'(s)| + |K_1'(s)|\right) + 2|K|T + 4|\lambda| + \dfrac{8T\lambda_0}{\mu_0}\displaystyle\int_0^T k^2(\theta)d\theta, \\ m_1 \in L^1(0,T). \end{cases}$$

Do bổ đề Gronwall, ta thu được từ (2.34) rằng $S \equiv 0$ và Định lý 1 được chứng minh.■

3. Tính ổn định của nghiệm

Trong phần này, ta giả sử rằng các hàm u_0, u_1 thỏa (H_2). Do định lý 1, bài toán (1.1)-(1.5) có một nghiệm yếu duy nhất (u,Q) phụ thuộc vào $K, \lambda, \mu, \lambda_1, f, g, k, K_1$.

$$(3.1)\qquad u = u(K,\lambda,\mu,\lambda_1,f,g,k,K_1),\quad Q = Q(K,\lambda,\mu,\lambda_1,f,g,k,K_1),$$

trong đó $(K,\lambda,\mu,\lambda_1,f,g,k,K_1)$ thoả các giả thiết (H_1), $(H_3)-(H_6)$ và u_0, u_1 là các hàm cố định thỏa (H_2).

Ta đặt

$$\Im(\lambda_0,\mu_0) = \{(K,\lambda,\mu,\lambda_1,f,g,k,K_1) : (K,\lambda,\mu,\lambda_1,f,g,k,K_1) \text{ thoả các giả thiết } (H_1), (H_3)-(H_6)\},$$

trong đó $\lambda_0, \mu_0 > 0$ là các hằng số cho trước.

Khi đó, ta có định lý sau.

Định lý 2. *Cho $T > 0$. Giả (H_1)–(H_6) đúng. Khi đó, nghiệm của bài toán* (1.1)-(1.5) *là ổn định đối với dữ kiện* $(K, \lambda, \mu, \lambda_1, f, g, k, K_1)$, nghĩa là:

Nếu $(K, \lambda, \mu, \lambda_1, f, g, k, K_1)$, $(K^j, \lambda^j, \mu^j, \lambda_1^j, f^j, g^j, k^j, K_1^j) \in \Im(\lambda_0, \mu_0)$, *sao cho*

$$(3.2) \qquad \begin{cases} |K^j - K| + |\lambda^j - \lambda| \to 0, \quad \|\mu^j - \mu\|_{H^2(0,T)} \to 0, \quad \|\lambda_1^j - \lambda_1\|_{H^1(0,T)} \to 0, \\ \|f^j - f\|_{L^2(0,T;L^2)} + \|f_t^j - f_t\|_{L^2(0,T;L^2)} \to 0, \quad \|g^j - g\|_{H^1(0,T)} \to 0, \\ \|k^j - k\|_{H^1(0,T)} \to 0, \quad \|K_1^j - K_1\|_{H^1(0,T)} \to 0, \end{cases}$$

khi $j \to +\infty$, *thì*

$$(3.3) \qquad \left(u^j, u_t^j, u^j(1,\cdot), Q^j\right) \to \left(u, u_t, u(1,\cdot), Q\right)$$

mạnh trong $L^\infty(0,T;V) \times L^\infty(0,T;L^2) \times H^1(0,T) \times L^2(0,T)$ *khi* $j \to +\infty$, *trong đó* $u_j = u(K^j, \lambda^j, \mu^j, \lambda_1^j, f^j, g^j, k^j, K_1^j)$, $Q_j = Q(K^j, \lambda^j, \mu^j, \lambda_1^j, f^j, g^j, k^j, K_1^j)$.

Chú thích 3. Kỹ thuật chứng minh trong định lý này cũng kế thừa từ các công trình khác của chúng tôi [8, 9]. Tuy nhiên, các bài toán khảo sát ở đó hoàn toàn khác đồng thời cũng không giống nhau về thủ thuật tính toán.

Chứng minh. Trước tiên, ta chú ý rằng nếu các dữ kiện $(K, \lambda, \mu, \lambda_1, f, g, k, K_1)$ thỏa

$$(3.4) \qquad \begin{cases} |K| \le K^*, |\lambda| \le \lambda^*, \\ \|f\|_{L^2(0,T;L^2)} + \|f_t\|_{L^2(0,T;L^2)} \le f^*, \|g\|_{H^1(0,T)} \le g^*, \\ \|k\|_{H^1(0,T)} \le k^*, \|\lambda_1\|_{H^1(0,T)} \le \lambda_1^*, \\ \|\mu\|_{H^2(0,T)} \le \mu^*, \|K_1\|_{H^1(0,T)} \le K_1^*, \end{cases}$$

trong đó $K^*, \lambda^*, g^*, k^*, \lambda_1^*, \mu^*, f^*, K_1^*$, là các hằng số dương cố định. Khi đó, các đánh giá tiên nghiệm của các dãy $\{u_m\}$ và $\{Q_m\}$ trong chứng minh của định lý 1 thỏa

$$(3.5) \qquad \|u_m'(t)\|^2 + \mu_0 \|u_{mx}(t)\|^2 + 2\lambda_0 \int_0^t |u_m'(1,s)|^2 ds \le M_T, \ \forall t \in [0,T],$$

$$(3.6) \qquad \|u_m''(t)\|^2 + \mu_0 \|u_{mx}'(t)\|^2 + 2\lambda_0 \int_0^t |u_m''(1,s)|^2 ds \le M_T, \ \forall t \in [0,T],$$

$$(3.7) \qquad \|Q_m\|_{H^1(0,T)} \le M_T,$$

trong đó M_T là một hằng số chỉ phụ thuộc vào $T, u_0, u_1, \lambda_0, \mu_0, K^*, \lambda^*, f^*, g^*, \mu^*, \lambda^*_1, k^*, K_1^*$ (độc lập với $K, \lambda, \mu, \lambda_1, f, g, k, K_1$). Do đó, giới hạn (u,Q) trong các không gian hàm thích hợp của dãy $\{(u_m, Q_m)\}$ xác định bởi (2.5)-(2.7) là nghiệm yếu của bài toán (1.1)-(1.5) thỏa các đánh giá tiên nghiệm (3.5)-(3.7).

Bây giờ, do (3.2) ta có thể giả sử rằng, tồn tại các hằng số dương $K^*, \lambda^*, \mu^*, \lambda_1^*, f^*, g^*, k^*, K_1^*$ sao cho các dữ kiện $\left(K^j, \lambda^j, \mu^j, \lambda_1^j, f^j, g^j, k^j, K_1^j\right)$ thoả (3.4) với $\left(K, \lambda, \mu, \lambda_1, f, g, k, K_1\right) = \left(K^j, \lambda^j, \mu^j, \lambda_1^j, f^j, g^j, k^j, K_1^j\right)$. Khi đó, do chú ý ở trên, ta có nghiệm $\left(u_j, Q_j\right)$ của bài toán (1.1)-(1.5) tương ứng với $\left(K, \lambda, \mu, \lambda_1, f, g, k, K_1\right) = \left(K^j, \lambda^j, \mu^j, \lambda_1^j, f^j, g^j, k^j, K_1^j\right)$ thoả

$$\|u_j'(t)\|^2 + \mu_0 \|u_{jx}(t)\|^2 + 2\lambda_0 \int_0^t |u_j'(1,s)|^2 ds \le M_T, \ \forall t \in [0,T], \tag{3.8}$$

$$\|u_j''(t)\|^2 + \mu_0 \|u_{jx}'(t)\|^2 + 2\lambda_0 \int_0^t |u_j''(1,s)|^2 ds \le M_T, \ \forall t \in [0,T], \tag{3.9}$$

$$\|Q_j\|_{H^1(0,T)} \le M_T, \tag{3.10}$$

Đặt

$$\begin{cases} \widetilde{K}_j = K^j - K, & \widetilde{\lambda}^j = \lambda^j - \lambda, \\ \widetilde{\mu}_j = \mu^j - \mu, & \widetilde{\lambda}_{1j} = \lambda_1^j - \lambda_1, \\ \widetilde{f}_j = f^j - f, & \widetilde{g}_j = g^j - g, \\ \widetilde{k}_j = k^j - k, & \widetilde{K}_{1j} = K_1^j - K_1. \end{cases} \tag{3.11}$$

Khi đó, $v_j = u_j - u$ và $P_j = Q_j - Q$ thỏa bài toán biến phân

$$\begin{cases} \langle v_j''(t), w\rangle + \mu(t)\langle v_{jx}(t), w_x\rangle + P_j(t)w(1) + \langle Kv_j + \lambda v_j', w\rangle \\ \qquad = \langle \widetilde{f}_j, w\rangle - \widetilde{\mu}_j(t)\langle u_{jx}(t), w_x\rangle - \langle \widetilde{K}_j u_j + \widetilde{\lambda}_j u_j', w\rangle \\ \qquad\qquad \forall w \in H^1, \\ v_j(0) = v_j'(0) = 0, \end{cases} \tag{3.12}$$

trong đó

(3.13)

$$P_j(t) = Q_j(t) - Q(t) = K_1(t)v_j(1,t) + \lambda_1(t)v_j'(1,t) - \int_0^t k(t-s)v_j(1,s)\,ds - \hat{g}_j(t),$$

(3.14) $$\hat{g}_j(t) = \tilde{g}_j(t) - \tilde{K}_{1j}(t)u_j(1,t) - \tilde{\lambda}_{1j}(t)u_j'(1,t) + \int_0^t \tilde{k}_j(t-s)u_j(1,s)\,ds.$$

Thay $P_j(t)$ vào (3.12), khi đó lấy $w = v_j'$ trong $(3.12)_1$, sau đó tích phân theo t, ta thu được

(3.15) $$\begin{aligned} S_j(t) &= -K\|v_j(t)\|^2 - 2\lambda\int_0^t \|v_j'(s)\|^2 ds + \int_0^t K_1'(s)|v_j(1,s)|^2 ds \\ &+ 2\int_0^t \left(\int_0^r k(r-s)v_j(1,s)ds + \hat{g}_j(r)\right) v_j'(1,r)\,dr \\ &+ \int_0^t \mu'(s)\|v_{jx}(s)\|^2 ds + 2\int_0^t \langle \tilde{f}_j, v_j'(s)\rangle ds \\ &- 2\int_0^t \tilde{\mu}_j(s)\langle u_{jx}(s), v_{jx}'(s)\rangle ds - 2\int_0^t \langle \tilde{K}_j u_j + \tilde{\lambda}_j u_j', v_j'(s)\rangle ds, \end{aligned}$$

trong đó

(3.16) $$S_j(t) = \|v_j'(t)\|^2 + \mu(t)\|v_{jx}(t)\|^2 + K_1(t)|v_j(1,t)|^2 + 2\int_0^t \lambda_1(s)|v_j'(1,s)|^2 ds.$$

Ta cần sử dụng bổ đề sau

Bổ đề 1. *Chọn* $\beta = \dfrac{\lambda_0}{2}$ *và đặt*

(3.17) $$\tilde{R}_j = \frac{4}{\beta}\int_0^T |\hat{g}_j(r)|^2 dr + 2\int_0^T \|\tilde{f}_j(s)\|^2 ds + \frac{8TM_T}{\mu_0}\|\tilde{\mu}_j\|_\infty + \frac{8TM_T}{\mu_0}\left(|\tilde{K}_j| + \sqrt{\mu_0}\,|\tilde{\lambda}_j|\right),$$

(3.18) $$\phi(t) = 2\left(|K|T + 2|\lambda|\right) + \frac{4T}{\beta\mu_0}\int_0^T k^2(\theta)\,d\theta + \frac{2}{\mu_0}\left(|K_1'(t)| + |\mu'(t)|\right).$$

Khi đó, ta có

(3.19) $$S_j(t) \le \tilde{R}_j + \int_0^t \phi(s)S_j(s)\,ds, \quad \forall t \in [0,T].$$ ∎

Chứng minh bổ đề 1 có thể tìm thấy trong [11].

Áp dụng bổ đề Gronwall, ta thu được (3.19), rằng

(3.20) $$S_j(t) \le \tilde{R}_j \exp\left(\int_0^t \phi(s)\,ds\right) \le C_T^* \tilde{R}_j, \ \forall t \in [0,T].$$

Mặt khác, dùng phép nhúng $H^1(0,T) \quad C^0([0,T])$, ta suy từ (3.13), (3.14), (3.17), (3.18) và (3.20), rằng

$$\|P_j\|_{L^2(0,T)} \le \left(\frac{\|K_1\|_\infty}{\sqrt{\mu_0}} + \frac{\|\lambda_1\|_\infty}{\sqrt{2\lambda_0}}\right)\sqrt{C_T^* \widetilde{R}_j} + \left(\frac{T\sqrt{T}}{\sqrt{\mu_0}}\int_0^t k^2(\theta)d\theta\right) C_T^* \widetilde{R}_j + \|\hat{g}_j\|_{L^2(0,T)}, \tag{3.21}$$

$$\widetilde{R}_j \le \frac{4}{\beta}\|\hat{g}_j\|^2_{L^2(0,T)} + 2\int_0^T \|\widetilde{f}_j(s)\|^2 ds + \frac{8TM_T}{\mu_0}\|\widetilde{\mu}_j\|_{H^1(0,T)} + \frac{8TM_T}{\mu_0}\left(|\widetilde{K}_j| + \sqrt{\mu_0}|\widetilde{\lambda}_j|\right), \tag{3.22}$$

$$\|\hat{g}_j\|_{L^2(0,T)} \le \|\widetilde{g}_j\|_{H^1(0,T)} + \sqrt{\frac{M_T}{\mu_0}}\|\widetilde{K}_{1j}\|_{H^1(0,T)} + \sqrt{\frac{M_T}{2\lambda_0}}\|\widetilde{\lambda}_{1j}\|_{H^1(0,T)} + T\sqrt{\frac{M_T}{\mu_0}}\|\widetilde{k}_j\|_{H^1(0,T)} \tag{3.23}$$

Cuối cùng, từ (3.2), (3.11) và các đánh giá (3.20)-(3.23), ta suy ra rằng (3.3) là đúng. Định lý 2 được chứng minh hoàn tất. ■

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyễn Thúc An, Nguyễn Đình Triều, (1991), *Shock between absolutely solid body and elastic bar with the elastic viscous frictional resistance at the side,* J. Mech. NCSR. Vietnam Tom XIII (2), 1-7.

[2] Maitine Bergounioux, Nguyễn Thành Long, Alain Phạm Ngọc Định, (2001), *Mathematical model for a shock problem involving a linear viscoelastic bar,* Nonlinear Anal. 43, 547-561.

[3] Alain Phạm Ngọc Định, Nguyễn Thành Long, (1986), *Linear approximation and asymptotic expansion asscociated to the nonlinear wave equation in one dimension,* Demonstratio Math., 19, 45-63.

[4] J.L. Lions, (1969), *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites nonlinéaires,* Dunod-Gauthier-Villar, Paris.

[5] Nguyễn Thành Long, Alain Phạm Ngọc Định, (1992), *On the quasilinear wave equation: $u_{tt} - \Delta u + f(u, u_t) = 0$ associated with a mixed nonhomogeneous condition,* Nonlinear Anal., 19, 613-623.

[6] Nguyễn Thành Long, Alain Phạm Ngọc Định, (1995), *A semilinear wave equation associated with a linear differential equation with Cauchy data*, Nonlinear Anal., 24, 1261-1279.

[7] Nguyễn Thành Long, Trần Ngọc Diễm, (1997), *On the nonlinear wave equation $u_{tt} - u_{xx} = f(x,t,u,u_x,u_t)$ associated with the homogeneous conditions*, Nonlinear Anal., **29**, 1217-1230.

[8] Nguyễn Thành Long, Trần Minh Thuyết, (2003), *A semilinear wave equation associated with a nonlinear integral equation*, Demonstratio Math. **36**, No.4, 915-938.

[9] Nguyễn Thành Long, Bùi Tiến Dũng, (2004), *A nonlinear wave equation associated with a nonlinear integral equation involving boundary value*, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. **2004**, No. 103, pp.1-21., ISSN: 1072-6691. URL: http://ejde.math.txstate.edu or http://ejde.math.unt.edu.

[10] Nguyễn Thành Long, Lê Văn Út, Nguyễn Thị Thảo Trúc, (2004), *Va chạm của một vật rắn và một thanh đàn hồi nhớt tuyến tính*, Tạp Chí Khoa học Tự nhiên, Đại học Sư phạm TP. HCM, **38**, No. 4, 27-40.

[11] Nguyễn Thành Long, Lê Văn Út, Nguyễn Thị Thảo Trúc, (2005), *On a shock problem involving a linear viscoelastic bar*, J. Nonlinear Analysis (to appear).

[12] Nguyễn Thành Long, Alain Phạm Ngọc Định, Trần Ngọc Diễm, (2005), *On a shock problem involving a nonlinear viscoelastic bar*, J. Boundary Value Problems (to appear)

[13] Santos, M.L., (2001), *Asymptotic behavior of solutions to wave equations with a memory condition at the boundary*, Electronic JDE., Vol. **2001**, No. 73, pp.1-11., ISSN: 1072-6691. URL: http://ejde.math.swt.edu or http://ejde.math.unt.edu.

Tóm tắt:

Va chạm của một vật rắn và một thanh đàn hồi nhớt tuyến tính: Sự tồn tại toàn cục và ổn định của nghiệm

Bài báo đề cập đến bài toán giá trị biên-ban đầu cho phương trình sóng tuyến tính

$$(1)\qquad \begin{cases} u_{tt} - \mu(t)u_{xx} + Ku + \lambda\, u_t = f(x,t),\ 0 < x < 1,\ 0 < t < T, \\ u(0,t) = 0, \\ -\mu(t)u_x(1,t) = Q(t), \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x), \end{cases}$$

trong đó K, λ *là các hằng số và* u_0, u_1, f, μ *là các hàm cho trước, ẩn hàm* $u(x,t)$ *và giá trị biên chưa biết* $Q(t)$ *thỏa phương trình tích phân tuyến tính*

$$(2)\qquad Q(t) = K_1(t)u(1,t) + \lambda_1(t)u_t(1,t) - g(t) - \int_0^t k(t-s)u(1,s)ds,$$

trong đó g, k, K_1, λ_1 *là các hàm cho trước. Bài báo gồm hai phần. Trong phần 1, chúng tôi chứng minh một định lý tồn tại toàn cục và duy nhất nghiệm yếu* (u,Q) *của bài toán (1)-(2). Chứng minh nhờ vào phương pháp xấp xỉ Galerkin kết hợp với một số đánh giá tiên nghiệm, các lý luận về sự hội tụ yếu và tính compact. Trong phần 2, chúng tôi chứng minh rằng nghiệm* (u,Q) *của bài toán (1)-(2) ổn định đối với dữ kiện* $(K, \lambda, \mu, \lambda_1, f, g, k, K_1)$.

Abstract:

The knock of a rigid body and a linear viscoelastic bar: Global existence and stability of solutions

The paper deals with the initial-boundary value problem for the linear wave equation

$$(1)\qquad \begin{cases} u_{tt} - \mu(t)u_{xx} + Ku + \lambda\, u_t = f(x,t),\ 0 < x < 1,\ 0 < t < T, \\ u(0,t) = 0, \\ -\mu(t)u_x(1,t) = Q(t), \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x), \end{cases}$$

where K, λ *are given constants and* u_0, u_1, f, μ *are given functions, the unknown function* $u(x,t)$ *and the unknown boundary value* $Q(t)$ *satisfy the following linear integral equation*

$$(2)\qquad Q(t) = K_1(t)u(1,t) + \lambda_1(t)u_t(1,t) - g(t) - \int_0^t k(t-s)u(1,s)ds,$$

where g, k, K_1, λ_1 *are given functions. The paper consists of two parts. In part 1 we prove a theorem of global existence and uniqueness of a weak solution* (u,Q) *of problem (1)- (2). The proof is based on a Galerkin type approximation associated to various energy estimates-type bounds, weak-convergence and compactness arguments. In part, we prove that the solution* (u,Q) *of problem (1)-(2) is stable with respect to the data* $(K, \lambda, \mu, \lambda_1, f, g, k, K_1)$.