VA CHẠM CỦA MỘT VẬT RẮN VÀ MỘT THANH ĐÀN HỒI NHỚT PHI TUYẾN LIÊN KẾT VỚI MỘT ĐIỀU KIỆN BIÊN PHI TUYẾN

VÕ GIANG GIAI [1], LÊ XUÂN TRƯỜNG[2]

1. Giới thiệu

Trong bài này, chúng tôi xét bài toán: Tìm một cặp hàm (u,P) thoả

$$u_{tt} - u_{xx} + f(u,u_t) = F(x,t),\ 0<x<1,\ 0<t<T, \tag{1}$$

$$u_x(0,t) = P(t), \tag{2}$$

$$u(1,t) = 0, \tag{3}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x), \tag{4}$$

trong đó $f(u,u_t) = K|u|^{p-2}u + \lambda|u_t|^{q-2}u_t$, với $p \ge 2$, $q > 1$, K, λ là các hằng số và u_0; u_1, F là các hàm cho trước thoả một số điều kiện sẽ được chỉ rõ sau đó, ẩn hàm $u(x,t)$ và giá trị biến chưa biết $P(t)$ thoả một phương trình tích phân phi tuyến:

$$P(t) = g(t) + K_1|u(0,t)|^{\alpha-2}u(0,t) + \lambda|u_t(0,t)|^{\beta-2}u_t(0,t) - \int_0^t k(t-s)u(0,s)ds, \tag{5}$$

trong đó $\alpha, \beta, K_1, \lambda_1$ là các hằng số cho trước và g, k là các hàm cho trước.

Trong trường hợp $p = q = \alpha = 2, \lambda_1 = 0, K_1 = h \ge 0$, bài toán (1)-(5) được xây dựng từ bài toán (1)-(4) trong đó, ẩn hàm $u(x,t)$ và giá trị biên chưa biết $P(t)$ thoả một bài toán Cauchy cho một phương trình vi phân thường:

$$\begin{cases} P''(t) + \omega^2 P(t) = hu_{tt}(0,t),\ 0<t<T, \\ P(0) = P_0,\ \ P'(0) = P_1, \end{cases} \tag{6}$$

trong đó $h \ge 0$, $\omega > 0$, P_0, P_1 là các hằng số cho trước[6].

Trong [2], An và Triều đã nghiên cứu một trường hợp riêng của bài toán (1)-(4), (6) với $u_0 = u_1 = P_0 = 0$ và $f(u,u_t) = Ku + \lambda u_t$, với $K \ge 0, \lambda \ge 0$ là các hằng số cho trước. Trong trường hợp này, bài toán (1)-(4) và (6) là một mô hình toán học mô tả sự va chạm của một vật rắn và một thanh đàn hồi nhớt tuyến tính đặt trên một nền cứng [2].

[1] Thạc sĩ, Cộng tác viên Bộ môn Toán Cao cấp, Khoa Toán-Tin học, Trường ĐHKHTN TP.HCM.
[2] Thạc sĩ, Bộ môn Toán, Khoa Cơ Bản, Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật TP.HCM.

Từ bài toán (6) ta biểu diễn hàm $P(t)$ theo $P_0, P_1, \omega, h, u_{tt}(0,t)$ và sau đó lấy tích phân từng phần, ta thu được:

$$P(t) = g(t) + hu(0,t) - \int_0^t k(t-s)u(1,s)ds, \tag{7}$$

trong đó:

$$g(t) = -\left(P_0 - hu_0(0)\right)\cos\omega t - \frac{1}{\omega}\left(P_1 - hu_1(0)\right)\sin\omega t, \tag{8}$$

$$k(t) = h\omega \sin\omega t. \tag{9}$$

Trong [3] Bergounioux, Long và Định đã nghiên cứu bài toán (1), (4) với các điều kiện biên (2), (3) thay bởi:

$$u_x(0,t) = hu(0,t) + g(t) - \int_0^t k(t-s)u(0,s)ds, \tag{10}$$

$$u_x(1,t) + K_1 u(1,t) + \lambda_1 u_t(1,t) = 0, \tag{11}$$

với $h \geq 0$, K, λ, K_1, λ_1 là các hằng số cho trước và g, k là những hàm số cho trước.

Trong [8], Long, Định, Diễm đã thu được kết quả về sự tồn tại duy nhất nghiệm, tính chính quy và khai triển tiệm cận của nghiệm của bài toán (1), (4) trong trường hợp $-u_x(1,t) = K_1 u(1,t) + \lambda u_t(1,t)$, $u_x(0,t) = P(t)$ trong đó $P(t)$ thoả (7).

Trong [10] Long và Giai đã thu được kết quả về sự tồn tại duy nhất nghiệm và khai triển tiệm cận của nghiệm của bài toán (1)-(5) khi $\alpha \geq 2, \beta \geq 2$, $f(u,u_t) = Ku + \lambda u_t$, $(u_0,u_1) \in H^1 \times L^2$. Trong trường hợp này, bài toán (1)-(5) là mô hình toán học mô tả sự va chạm của một vật rắn và một thanh đàn hồi nhớt phi tuyến đặt trên một nền cứng. Kết quả này cũng nới rộng trong [11] cho bài toán với điều kiện biên (11) thay cho (3).

Bài báo gồm hai phần chính. Trong phần 1, với điều kiện $(u_0,u_1) \in V \times L^2$, với $V = \{v \in H^1 : v(1) = 0\}$, $F \in L^2(Q_T)$, $k \in W^{1,1}(0,T)$, $g \in L^{\beta'}(0,T)$, $K, K_1 \geq 0$, $\lambda, \lambda_1 > 0$, $p, \alpha, \beta \geq 2$, $q > 1$, $\beta' = \dfrac{\beta}{\beta - 1}$, chúng tôi chứng minh một định lí tồn tại toàn cục và duy nhất nghiệm yếu (u,P) của bài toán (1)-(5). Chứng minh nhờ vào phương pháp xấp xỉ Galerkin kết hợp với một số đánh giá tiên nghiệm và các lí luận quen thuộc về sự hội tụ yếu và tính compact. Ta chú ý rằng phương pháp tuyến tính hoá trong các bài báo [4, 8] không sử dụng được trong bài báo này và trong [3, 6, 7]. Khi $\beta = 2$, chúng tôi chứng minh rằng nghiệm yếu $(u,P) \in L^\infty(0,T;V \cap H^2) \times H^1(0,T)$, với $u_t \in L^\infty(0,T;V)$, $u_{tt} \in L^\infty(0,T;L^2)$, $u(0,\cdot) \in H^2(0,T)$, nếu ta giả sử $(u_0,u_1) \in (V \cap H^2) \times V$ và một số điều kiện khác. Cuối cùng, trong phần 2, chúng tôi thu được một khai triển tiệm cận của nghiệm (u,P) của bài toán (1)-(5) đến cấp

$N+1$ theo ba tham số K, λ, K_1. Các kết quả thu được ở đây đã tổng quát hoá tương đối các kết quả trong [1-4, 6-12].

2. Định lí tồn tại và duy nhất nghiệm

Đặt $\Omega = (0,1)$, $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $T > 0$. Chúng ta bỏ qua các định nghĩa của các không gian thông dụng như $C^m(\overline{\Omega})$, $L^p(\Omega)$, $W^{m,p}(\Omega)$. Ta kí hiệu $W^{m,p} = W^{m,p}(\Omega)$, $L^p = W^{0,p}(\Omega)$, $H^m = W^{m,2}(\Omega)$, $1 \le p \le \infty$, $m = 0,1,...$

Chuẩn L^2 được kí hiệu bởi $\|\cdot\|$. Ta cũng kí hiệu bởi $\langle \cdot,\cdot \rangle$ chỉ tích vô hướng trong L^2 hay cặp tích đối ngẫu của phiếm hàm tuyến tính liên tục với một phần tử của một không gian hàm. Ta kí hiệu bởi $\|\cdot\|_X$ là chuẩn của một không gian Banach X và bởi X' là không gian đối ngẫu của X. Ta kí hiệu bởi $L^p(0,T;X)$, $1 \le p \le \infty$ cho không gian Banach các hàm $u:(0,T) \to X$ đo được, sao cho:

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt \right)^{1/p} < \infty \quad \text{với } 1 \le p \le \infty,$$

và

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \underset{0<t<T}{ess\sup} \|u(t)\|_X < \infty \quad \text{với } p = \infty.$$

Kí hiệu $u(t), u'(t) = u_t(t), u''(t) = u_{tt}(t), u_x(t), u_{xx}(t)$ để chỉ $u(x,t)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)$, $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$, lần lượt.

Ta đặt:

$$V = \{v \in H^1(0,1) : v(1) = 0\}, \quad a(u,v) = \int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} dx. \tag{12}$$

Khi đó, V là một không gian Hilbert đối với tích vô hướng $a(\cdot,\cdot)$ và trên V, hai chuẩn $\|v\|_{H^1}$ và $\|v\|_V = \sqrt{a(v,v)} = \|v_x\|$ là tương đương.

Ta thành lập các giả thiết sau:

(H_1) $\quad u_0 \in V$ và $u_1 \in L^2$,

(H_2) $\quad k \in L^1(0,T)$, $g \in L^{\beta'}(0,T)$, $\beta' = \frac{\beta}{\beta - 1}$,

(H_3) $\quad F \in L^2(Q_T)$,

(H_4) $\quad K \ge 0, K_1 \ge 0, \lambda > 0, \lambda_1 > 0$,

(H_5) $\quad p, \alpha, \beta \ge 2, q > 1$.

Khi đó ta có định lí sau:

Định lí 1. *Cho* $T > 0$. *Giả sử* $(H_1)-(H_5)$ *đúng. Khi đó, tồn tại duy nhất một nghiệm yếu* (u, P) *của bài toán* (1)-(5) *sao cho*

$$\begin{cases} u \in L^\infty(0,T;V), u_t \in L^\infty(0,T;L^2) \cap L^q(Q_T), \\ u(1,\cdot) \in W^{1,\beta}(0,T), \quad P \in L^{\beta'}(0,T). \end{cases} \tag{13}$$

Hơn nữa, nếu $k \in W^{1,1}(0,T)$ *trong* (H_2) *và* $\alpha = 2$ *hoặc* $\alpha \geq 3$, *thì nghiệm có được là duy nhất.*

Chú thích 1.

1) Định lí 1 chưa khẳng định về tính duy nhất của nghiệm khi $2 < \alpha < 3$. Tuy nhiên, việc xây dựng một bộ các giả thiết $(H_1)-(H_5)$ với α trong (H_5) thoả $2 < \alpha < 3$, sao cho bài toán (1)-(5) có ít nhất hai nghiệm thoả (13) là một bài toán mở. Trong Định lí 2, chúng tôi tăng cường các giả thiết $(H_1)-(H_5)$ và thu được tính duy nhất nghiệm trong trường hợp $p,\ q,\ \alpha \geq 2,\ \beta = 2$.

2) Các kết quả trong [10] là các trường hợp đặc biệt của Định lí 1 với $p = q = \alpha = \beta = 2$, $(u_0, u_1) \in (V \cap H^2) \times H^1$ và $p = q = 2, (u_0, u_1) \in V \times L^2$, lần lượt.

Phác họa chứng minh Định lí 1. Chứng minh gồm nhiều bước khá dài dòng và cũng do khuôn khổ hạn định của tạp chí nên chúng tôi xin phép nêu phác hoạ chứng minh. Sự tồn tại nghiệm được chứng minh nhờ vào phương pháp xấp xỉ Galerkin [5] kết hợp với một số đánh giá tiên nghiệm và các lí luận quen thuộc về sự hội tụ yếu và kĩ thuật qua giới hạn số hạng phi tuyến bằng phương pháp đơn điệu. Tính duy nhất nghiệm được dựa vào bổ đề Gronwall.∎

Bây giờ, ta bổ sung thêm các giả thiết, cụ thể như sau:

(H_1') $u_0 \in V \cap H^2$ và $u_1 \in V$,

(H_2') $g,\ k \in H^1(0,T)$,

(H_3') $F,\ F_t \in L^2(Q_T)$,

(H_4') $K \geq 0, K_1 \geq 0, \lambda > 0, \lambda_1 > 0$,

(H_5') $p,\ q,\ \alpha \geq 2,\ \beta = 2$.

Khi đó ta có định lí sau:

Định lí 2. *Cho* $T > 0$. *Giả sử* $(H_1')-(H_5')$ *đúng. Khi đó, tồn tại duy nhất một nghiệm yếu* (u, P) *của bài toán* (1.1)-(1.5) *sao cho:*

$$\begin{cases} u \in L^\infty(0,T;V \cap H^2), u_t \in L^\infty(0,T;V), u_{tt} \in L^\infty(0,T;L^2), \\ u(0,\cdot) \in H^2(0,T), \quad P \in H^1(0,T). \end{cases} \tag{14}$$

Chú thích 2. Từ (2.34), ta suy ra rằng

$$u \in C^0(0,T;V) \cap C^1(0,T;L^2) \cap L^\infty(0,T;V \cap H^2). \tag{15}$$

Chứng minh Định lí 2 có thể tìm thấy trong [11].

Chú thích 3. Trong trường hợp $p,q > 2$ và $K < 0$ hoặc $\lambda < 0$, sự tồn tại nghiệm của bài toán (1)-(5) vẫn là câu hỏi mở. Tuy nhiên, chúng tôi đã thu được kết quả khi $p = q = 2$ và $K, \lambda \in IR$ [11].

3. Khai triển tiệm cận

Trong phần này, ta kí hiệu u_0, u_1 bởi $\widetilde{u}_0$, $\widetilde{u}_1$, lần lượt. Giả sử $\beta = 2$, $p,q,\alpha \geq N+1$ $(2 \leq N \in Z_+)$, $\lambda_1 > 0$, và $(\widetilde{u}_0, \widetilde{u}_1, F, g, k)$ thoả mãn các giả thiết $(H_1') - (H_3')$. Với $(K, \lambda, K_1) \in IR_+^3$, theo Định lí 2, bài toán (1)-(5) có duy nhất một nghiệm yếu (u,P) phụ thuộc (K,λ,K_1): $u = u(K,\lambda,K_1), P = P(K,\lambda,K_1)$.

Xét bài toán nhiễu sau, trong đó K,λ,K_1 là các tham số bé, $0 \leq K \leq K_*, 0 < \lambda \leq \lambda_*$, $0 \leq K_1 \leq K_{1*}$:

$$(\widetilde{P}_{K,\lambda,K_1}) \begin{cases} Au \equiv u_{tt} - u_{xx} = -KH_p(u) - \lambda H_q(u_t) + F(x,t), \ 0 < x < 1, \ 0 < t < T, \\ Bu \equiv u_x(0,t) = P(t), \ u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = \widetilde{u}_0(x), u_t(x,0) = \widetilde{u}_1(x), \\ P(t) = g(t) + K_1 H_\alpha(u(0,t)) + \lambda_1 u_t(0,t) - \int_0^t k(t-s)u(0,s)ds. \end{cases}$$

Kí hiệu đa chỉ số $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \in Z_+^3$, và $\mathrm{\vec{K}} = (\mathrm{K}, \lambda, \mathrm{K}_1) \in \mathbb{R}_+^3$, ta đặt:

$$\begin{cases} |\gamma| = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3, \ \gamma! = \gamma_1!\gamma_2!\gamma_3!, \\ \|\vec{K}\| = \sqrt{K^2 + \lambda^2 + K_1^2}, \ \vec{K} = K^{\gamma_1}\lambda^{\gamma_2}K_1^{\gamma_3}, \\ \alpha, \beta \in Z_+^3, \ \beta \leq \alpha \Leftrightarrow \beta_i \leq \alpha_i, \ \forall i = 1,2,3, \\ C_\alpha^\beta = \dfrac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}. \end{cases}$$

Trước tiên, ta có bổ đề sau và chi tiết chứng minh có thể xem trong [12].

Bổ đề 2. *Cho* $\mathrm{m}, \mathrm{N} \in \mathbb{N}$ *và* $\mathrm{v}_\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathrm{Z}_+^3, 1 \leq |\alpha| \leq \mathrm{N}$. *Khi đó:*

$$\left(\sum_{1 \leq |\alpha| \leq N} v_\alpha \vec{K}^\alpha\right)^m = \sum_{m \leq |\alpha| \leq mN} T^{(m)}[v]_\alpha \vec{K}^\alpha, \tag{16}$$

trong đó hệ số $T^{(m)}[v]_\alpha, m \le |\alpha| \le mN$ *phụ thuộc vào* $v = (v_\alpha),\ \alpha \in Z_+^3,\ 1 \le |\alpha| \le N$ *thoả mãn công thức truy hồi sau:*

$$\begin{cases} T^{(1)}[v]_\alpha = v_\alpha,\ 1 \le |\alpha| \le N, \\ T^{(m)}[v]_\alpha = \sum\limits_{\beta \in I_\alpha^{(m)}} v_{\alpha-\beta} T^{(m-1)}[v]_\beta,\ m \le |\alpha| \le mN,\ m \ge 2, \\ I_\alpha^{(m)} = \left\{\beta \in Z_+^3 : \beta \le \alpha,\ 1 \le |\alpha-\beta| \le N,\ m-1 \le |\beta| \le (m-1)N\right\}. \end{cases} \tag{17}$$

Gọi $(u_0, P_0) \equiv (u_{0,0,0}, P_{0,0,0})$ là nghiệm yếu duy nhất của bài toán $(\widetilde{P}_{0,0,0})$ (như trong Định lí 2) tương ứng với $(K, \lambda, K_1) = (0,0,0)$,

$$(\widetilde{P}_{0,0,0}) \qquad \begin{cases} Au_0 = F_{0,0,0} \equiv F(x,t),\ 0 < x < 1,\ 0 < t < T, \\ u_0(1,t) = 0, \qquad Bu_0 = P_0(t), \\ u_0(x,0) = \widetilde{u}_0(x), \quad u_0'(x,0) = \widetilde{u}_1(x), \\ P_0(t) = g(t) + \lambda_1 u_0'(0,t) - \int_0^t k(t-s) u_0(0,s)ds, \\ u_0 \in C^0(0,T;V) \cap C^1(0,T;L^2) \cap L^\infty(0,T;V \cap H^2), \\ u_0' \in L^\infty(0,T;V), \quad u_0'' \in L^\infty(0,T;L^2), \\ u_0(0,\cdot) \in H^2(0,T), \quad P_0 \in H^1(0,T). \end{cases}$$

Ta xét dãy hữu hạn các nghiệm yếu $(u_\gamma, P_\gamma),\ \gamma \in Z_+^3,\ 1 \le |\gamma| \le N$, xác định bởi các bài toán sau (như trong Định lí 2):

$$(\widetilde{P}_\gamma) \qquad \begin{cases} Au_\gamma = F_\gamma, \quad 0 < x < 1,\ 0 < t < T, \\ u_\gamma(1,t) = 0, \qquad Bu_\gamma = P_\gamma(t), \\ u_\gamma(x,0) = u_\gamma'(x,0) = 0, \\ P_\gamma(t) = \hat{P}_\gamma(t) + \lambda_1 u_\gamma'(0,t) - \int_0^t k(t-s) u_\gamma(0,s)ds, \\ u_\gamma \in C^0(0,T;V) \cap C^1(0,T;L^2) \cap L^\infty(0,T;V \cap H^2), \\ u_\gamma' \in L^\infty(0,T;H^1), \quad u_\gamma'' \in L^\infty(0,T;L^2), \\ u_\gamma(0,\cdot) \in H^2(0,T), \quad P_\gamma \in H^1(0,T), \end{cases}$$

trong đó $F_\gamma, \hat{P}_\gamma, |\gamma| \le N$, được xác định bởi công thức truy hồi sau:

$$F_\gamma = \begin{cases} F, & |\gamma| = 0, \\ 0, & \gamma_1 = \gamma_2 = 0,\ 1 \le |\gamma| \le N \\ -H_p(u_0), & \gamma_1 = 1, |\gamma| = 1, \\ -\sum_{m=1}^{|\gamma_1|-1} \frac{1}{m!} H_p^{(m)}(u_0) T^{(m)}[u]_{\gamma_1 - 1, 0, \gamma_3}, & \gamma_1 \ge 1,\ \gamma_2 = 0,\ 2 \le |\gamma| \le N, \\ -H_q(u_0'), & \gamma_2 = 1,\ |\gamma| = 1, \\ -\sum_{m=1}^{|\gamma|-1} \frac{1}{m!} H_q^{(m)}(u_0') T^{(m)}[u']_{0, \gamma_2 - 1, \gamma_3}, & \gamma_2 \ge 1,\ \gamma_1 = 0,\ 2 \le |\gamma| \le N, \\ -\sum_{m=1}^{|\gamma|-1} \frac{1}{m!} \left[H_p^{(m)}(u_0) T^{(m)}[u]_{\gamma_1 - 1, \gamma_2, \gamma_3} + H_q^{(m)}(u_0') T^{(m)}[u']_{\gamma_1, \gamma_2 - 1, \gamma_3} \right] & \\ & \gamma_1 \ge 1,\ \gamma_2 \ge 1,\ 2 \le |\gamma| \le N, \end{cases} \quad (18)$$

$$\hat{P}_\gamma(t) = \begin{cases} g(t), & |\gamma| = 0, \\ 0, & \gamma_3 = 0,\ 1 \le |\gamma| \le N, \\ H_\alpha(u_0(0,t)), & \gamma_3 = 1, |\gamma| = 1, \\ \sum_{m=1}^{|\gamma|-1} \frac{1}{m!} H_\alpha^{(m)}(u_0(0,t)) T^{(m)}[u(0,t)]_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 - 1}, & \gamma_3 \ge 1,\ 2 \le |\gamma| \le N, \end{cases} \quad (19)$$

ở đây, ta kí hiệu $u = (u_\gamma), |\gamma| \le N$. Gọi $(u, P) = (u_{K,\lambda,K_1}, P_{K,\lambda,K_1})$ là nghiệm yếu duy nhất của bài toán $(\widetilde{P}_{K,\lambda,K_1})$. Khi đó, (v, R), với:

$$v = u - \sum_{|\gamma| \le N} u_\gamma \vec{K}^\gamma \equiv u - h, \quad R = P - \sum_{|\gamma| \le N} P_\gamma \vec{K}^\gamma, \quad (20)$$

thoả bài toán:

$$\begin{cases} Av = -K\left[H_p(v+h) - H_p(h)\right] - \lambda\left[H_q(v'+h') - H_q(h')\right] + E_N(\vec{K}), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 < x < 1,\ 0 < t < T, \\ v(1,t) = 0,\quad Bv = R(t), \\ v(x,0) = v'(x,0) = 0, \\ R(t) = K_1\left[H_\alpha\left[(v+h)(0,t)\right] - H_\alpha\left[h(0,t)\right]\right] + \lambda_1(t)v'(0,t) \\ \qquad - \int_0^t k(t-s)v(0,s)ds + \widetilde{E}_N(\vec{K}), \\ v \in C^0(0,T;V) \cap C^1(0,T;L^2) \cap L^\infty(0,T;V \cap H^2), \\ v' \in L^\infty(0,T;V),\quad v'' \in L^\infty(0,T;L^2), \\ v(0,\cdot) \in H^2(0,T),\quad R \in H^1(0,T), \end{cases} \tag{21}$$

trong đó:

$$\begin{cases} E_N(\vec{K}) = F(x,t) - KH_p(h) - \lambda H_q(h') - \sum_{|\gamma| \le N} P_\gamma \vec{K}^\gamma, \\ \widetilde{E}_N(\vec{K}) = K_1 H_\alpha\left[h(0,t)\right] - \sum_{1 \le |\gamma| \le N} \hat{P}_\gamma \vec{K}^\gamma. \end{cases} \tag{22}$$

Khi đó ta có bổ đề sau.

Bổ đề 3. *Giả sử* $p, q, \alpha \ge N+1$, $2 \le N \in \mathbb{N}$ *và* $(H_1') - (H_5')$ *đúng. Khi đó:*

$$\begin{cases} \left\|E_N(\vec{K})\right\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \le \widetilde{C}_{1N} \left\|\vec{K}\right\|^{N+1}, \\ \left\|\widetilde{E}_N(\vec{K})\right\|_{L^2(0,T)} \le \widetilde{C}_{2N} \left\|\vec{K}\right\|^{N+1}, \end{cases} \tag{23}$$

với mọi $\vec{K} = (K, \lambda, K_1) \in IR_+^3$, $\left\|\vec{K}\right\| \le \left\|\vec{K}_*\right\|$ *với* $\vec{K}_* = (K_*, \lambda_*, K_{1*})$, *trong đó* $\widetilde{C}_{1N}, \widetilde{C}_{2N}$ *là các hằng số chỉ tùy thuộc vào các hằng số* $\left\|\vec{K}_*\right\|$, $\left\|u_\gamma\right\|_{L^\infty(0,T;V)}$, $\left\|u_\gamma'\right\|_{L^\infty(0,T;V)}$, $(|\gamma| \le N)$.

Chứng minh bổ đề 3. Dùng khai triển Taylor của hàm H_p, H_α tại u_0 và H_q tại u_0' đến cấp $N-1$, sau một số bước đánh giá, ta thu được (23).■

Kết quả sau đây cho một khai triển tiệm cận của nghiệm (u,P) của bài toán (1)-(5) đến cấp $N+1$ theo (K, λ, K_1), với (K, λ, K_1) đủ nhỏ.

Định lí 3. *Giả sử* $p, q, \alpha \ge N+1, N \in \mathbb{N}$ *và* $(H_1') - (H_5')$ *đúng. Khi đó, với mỗi* $\vec{K} \in \mathbb{R}_+^3$, *với* $0 \le K \le K_*, 0 < \lambda \le \lambda_*, 0 \le K_1 \le K_{1*}$, *bài toán* $(\widetilde{P}_{K,\lambda,K_1})$ *có duy nhất một nghiệm yếu* $(u,P) = (u_{K,\lambda,K_1}, P_{K,\lambda,K_1})$ *thoả một đánh giá tiệm cận đến cấp* $N+1$ *như sau:*

$$\left\| u' - \sum_{|\gamma| \le N} u'_{\gamma} \vec{K}^{\gamma} \right\|_{L^{\infty}(0,T;L^2)} + \left\| u - \sum_{|\gamma| \le N} u_{\gamma} \vec{K}^{\gamma} \right\|_{L^{\infty}(0,T;V)} + \left\| u'(0,\cdot) - \sum_{|\gamma| \le N} u'_{\gamma}(0,\cdot) \vec{K}^{\gamma} \right\|_{L^2(0,T)} \le \widetilde{D}^{*}_{N} \left\| \vec{K} \right\|^{N+1}, \tag{24}$$

và

$$\left\| P - \sum_{|\gamma| \le N} P_{\gamma} \vec{K}^{\gamma} \right\|_{L^2(0,T)} \le \widetilde{D}^{**}_{N} \left\| \vec{K} \right\|^{N+1}, \tag{25}$$

với mọi $\vec{K} \in \mathbb{R}^3_+$, $\|\vec{K}\| \le \|\vec{K}_*\|$, $\widetilde{D}^{*}_{N}$ và $\widetilde{D}^{**}_{N}$ *là hằng số chỉ tùy thuộc vào* $\vec{K}$, *các hàm* (u_{γ}, P_{γ}) *là nghiệm yếu của các bài toán* $(\widetilde{P}_{\gamma})$, $\gamma \in Z^3_+$, $|\gamma| \le N$.

Chú thích 4. Trong [9], như là một trường hợp đặc biệt của bài toán (1)-(5), Long, Alain và Diễm đã thu được kết quả về khai triển tiệm cận của nghiệm theo hai tham số (K, λ) đến cấp $N+1$.

Chứng minh định lí 3. Bằng cách nhân hai vế của $(21)_1$ với v', sau đó tích phân từng phần theo t và sử dụng Bổ đề 3, ta thu được:

$$\begin{aligned}\sigma(t) \le{}& 2\left(T\widetilde{C}^{2}_{1N} + \frac{3}{\lambda_1}\widetilde{C}^{2}_{2N}\right)\left\|\vec{K}\right\|^{2N+2} + 2\left(2 + \frac{3}{\lambda_1}T\|k\|^2_{L^2(0,T)}\right)\int_0^t \sigma(s)ds \\ &+ 2K^2\int_0^t \left\|H_p(v+h) - H_p(h)\right\|^2 ds \\ &+ \frac{6}{\lambda_1}K_1^2\int_0^t \left|H_\alpha\big(v(0,s) + h(0,s)\big) - H_\alpha\big(h(0,s)\big)\right|^2 ds,\end{aligned} \tag{26}$$

trong đó:

$$\sigma(t) = \|v'(t)\|^2 + \|v_x(t)\|^2 + 2\lambda_1\int_0^t |v'(0,s)|^2 ds + 2\lambda\int_0^t \langle H_q(v'+h') - H_q(h'), v'\rangle ds. \tag{27}$$

Sau một số bước đánh giá và sử dụng Bổ đề Gronwall, ta suy ra từ (26)-(27), rằng:

$$\left\{\begin{aligned} &\|v'\|_{L^{\infty}(0,T;L^2)} + \|v\|_{L^{\infty}(0,T;V)} + \|v'(0,\cdot)\|_{L^2(0,T)} \le \widetilde{D}^{*}_{N}\left\|\vec{K}\right\|^{N+1}, \\ &\|R\|_{L^2(0,T)} \le K_1(\alpha-1)R_2^{\alpha-2}\left(\int_0^T |v(0,s)|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} + \lambda_1\left(\int_0^T |v'(0,s)|^2 ds\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\qquad + \sqrt{T}\|k\|_{L^2(0,T)}\left(\int_0^T \sigma(s)ds\right)^{\frac{1}{2}} + \left\|\widetilde{E}_N(\vec{K})\right\|_{L^2(0,T)} \le \widetilde{D}^{**}_{N}\left\|\vec{K}\right\|^{N+1}, \end{aligned}\right. \tag{28}$$

với mọi $\vec{K} \in \mathbb{R}^3_+$, $\|\vec{K}\| \le \|\vec{K}_*\|$, $\widetilde{D}^{*}_{N}$ và $\widetilde{D}^{**}_{N}$ là các hằng số chỉ tùy thuộc vào $\vec{K}$.

Từ (28), ta suy ra các đánh giá tiệm cận (24), (25) và Định lý 3 được chứng minh.■

Chú thích 5. Trong trường hợp $(K,\lambda,K_1)\in\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}_+$, nhưng $p=q=\alpha=\beta=2$, chúng tôi cũng đã thu được một định lí về khai triển tiệm cận của nghiệm yếu (u,P) của bài toán (1)-(5) theo ba tham số đã đề cập; tuy nhiên, chúng tôi không trình bày chi tiết vì khuôn khổ giới hạn của tạp chí. Chú ý rằng khai triển tiệm cận cho bài toán tuyến tính (1)-(5), nghĩa là khi $p=q=\alpha=\beta=2$, không phải là trường hợp riêng của bài toán đang xét.■

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Đ. Đ. Áng, A.P.N. Định (1998), *Mixed problem for some semilinear wave equation with a nonhomogeneous condition*, Nonlinear Anal. **12**, 581 – 592.

[2] N.T. An, N.Đ. Triều (1991), *Shock between absolutely solid body and elastic bar with the elastic viscous frictional resistance at the side*, J. Mech. NCSR. Vietnam, **13** (2), 1-7.

[3] M. Bergounioux, N.T. Long, A.P.N. Định (2001), *Mathematical model for a shock problem involving a linear viscoelastic bar*, Nonlinear Anal. **43**, 547-561.

[4] A.P.N. Định, N.T. Long (1986), *Linear approximation and asymptotic expansion asscociated to the nonlinear wave equation in one dimension*, Demonstratio Math. **19**, 45-63.

[5] J.L. Lions (1969), *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites nonlinéaires*, Dunod; Gauthier-Villar, Paris.

[5] A.P.N. Định, N.T. Long (1992), *On the quasilinear wave equation:* $u_{tt}-\Delta u+f(u,u_t)=0$ *associated with a mixed nonhomogeneous condition*, Nonlinear Anal. **19**, 613-623.

[6] A.P.N. Định, N.T. Long (1995), *A semilinear wave equation associated with a linear differential equation with Cauchy data*, Nonlinear Anal. **24**, 1261-1279.

[7] A.P.N. Định, N.T. Long (1995), *A semilinear wave equation associated with a linear differential equation with Cauchy data*, Nonlinear Anal. **24**, 1261-1279.

[8] N.T. Long, T.N. Diễm (1997), *On the nonlinear wave equation* $u_{tt}-u_{xx}=f(x,t,u,u_x,u_t)$ *associated with the mixed homogeneous conditions*, Nonlinear Anal. **29**, 1217-1230.

[9] A.P.N. Định, N.T. Long, T.N. Diễm (2005), *On a shock problem involving a nonlinear viscoelastic bar*, J. Boundary Value Problem, Hindawi Publishing Corporation, No.3, 337-358.

[10] N.T. Long, V.G. Giai (2006), *A wave equation associated with a mixed nonhomogeneous conditions: Global existence and asymptotic expansion of solutions*, Nonlinear Anal. (accepted for publication).

[11] N.T. Long, V.G. Giai (2006), *A nonlinear wave equation associated with nonlinear boundary conditions: Existence and asymptotic expansion of solutions*, Nonlinear Anal. (accepted for publication).

[12] N.T. Long, L.X. Trường (2006), *Existence and asymptotic expansion for a viscoelastic problem with a mixed nonhomogeneous condition, Nonlinear Anal. (accepted for publication).*

Tóm tắt:

VA CHẠM CỦA MỘT VẬT RẮN VÀ MỘT THANH ĐÀN HỒI NHỚT PHI TUYẾN LIÊN KẾT VỚI MỘT ĐIỀU KIỆN BIÊN PHI TUYẾN

Bài báo đề cập đến bài toán giá trị biên-ban đầu cho phương trình sóng phi tuyến:

$$(*)\qquad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + K|u|^{p-2}u + \lambda|u_t|^{q-2}u_t = F(x,t),\ 0<x<1,\ 0<t<T, \\ u_x(0,t) = P(t), \\ u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x), \end{cases}$$

trong đó $p \geq 2, q > 1, K, \lambda$ *là các hằng số và* u_0, u_1, F *là các hàm cho trước, ẩn hàm* $u(x,t)$ *và giá trị biên chưa biết* $P(t)$ *thoả phương trình tích phân phi tuyến*

$$(**)\qquad P(t) = g(t) + K_1|u(0,t)|^{\alpha-2}u(0,t) + \lambda|u_t(0,t)|^{\beta-2}u_t(0,t) - \int_0^t k(t-s)u(0,s)ds,$$

trong đó $K_1, \lambda_1, \alpha, \beta$ *là các hằng số cho trước và* g, k *là các hàm cho trước. Bài báo gồm hai phần. Trong phần 1, chúng tôi chứng minh một định lí tồn tại và duy nhất nghiệm yếu* (u, P) *của bài toán (*)-(**). Trong phần 2, chúng tôi thu được một khai triển tiệm cận của nghiệm yếu* (u, P) *của bài toán (*)-(**) đến cấp* $N+1$ *theo ba tham số* K, λ, K_1.

Abstract:

THE SHOCK OF A RIGID BODY AND A NONLINEAR VISCOELASTIC BAR ASSOCIATED WITH A NONLINEAR BOUNDARY CONDITION

The paper deals with the initial-boundary value problem for the nonlinear wave equation

$$(*)\qquad \begin{cases} u_{tt} - u_{xx} + K|u|^{p-2}u + \lambda|u_t|^{q-2}u_t = F(x,t),\ 0 < x < 1,\ 0 < t < T, \\ u_x(0,t) = P(t), \\ u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x), \end{cases}$$

where $p \geq 2, q > 1, K, \lambda$ are given constants and u_0, u_1, F are given functions, the unknown function $u(x,t)$ and the unknown boundary value $P(t)$ satisfy the following nonlinear integral equation

$$(**)\qquad P(t) = g(t) + K_1|u(0,t)|^{\alpha-2}u(0,t) + \lambda_1|u_t(0,t)|^{\beta-2}u_t(0,t) - \int_0^t k(t-s)u(0,s)ds,$$

where $K_1, \lambda_1, \alpha, \beta$ are given functions. The paper consists of two parts. In Part 1, we prove a theorem of existence and uniqueness of a weak solution (u,P) of problem (*)-(**). Finally, in Part 2 we obtain an asymptotic expansion of the solution (u,P) of the problem (*)-(**) up to order $N+1$ in three small parameters K, λ, K_1.