# SUY LUẬN NGOẠI SUY VÀ QUY NẠP TRONG KHÁM PHÁ QUY LUẬT DÃY SỐ - NHỮNG PHÂN TÍCH LÍ THUYẾT VÀ THỰC NGHIỆM

TRƯƠNG THỊ KHÁNH PHƯƠNG*

**TÓM TẮT**

*Khám phá quy luật dãy số hỗ trợ học sinh phát triển năng lực suy luận toán học và việc hiểu các khái niệm hàm số và biến số (NCTM, 2000). Bài báo này phân tích cơ sở lí thuyết cho thấy hai loại suy luận được sử dụng để khám phá quy luật dãy số là ngoại suy và quy nạp. Kết quả thực nghiệm phản ánh khó khăn của học sinh trong việc đưa ra một giả thuyết ngoại suy đủ mạnh để hỗ trợ cho quy nạp nhằm đi đến một quy tắc tổng quát. Các phương án ngoại suy dựa trên việc khám phá biểu diễn trực quan mô tả quy luật dãy số có thể khắc phục vấn đề này.*

***Từ khóa:*** quy luật dãy số, tổng quát hóa, suy luận ngoại suy, suy luận quy nạp.

**ABSTRACT**

***Abductive reasoning and inductive reasoning in discovering sequence patterns – some theoretical and empirical analysis***

*Discovering sequence patterns supports students to develope their reasoning and their conceptual understanding of functions and variables (NCTM, 2000). This paper shows that abductive reasoning and inductive reasoning are used to explore sequence patterns. The analysis of data shows that students have difficulties in suggesting a strong abduction that can combine with induction to get an algebraic rule of sequence pattern. Abduction based on visual representation which describes the sequence pattern can overcome this problem.*

***Keywords:*** sequence patterns, generalization, abductive reasoning, inductive reasoning.

## 1. Giới thiệu

Polya cho rằng toán học tồn tại hai kiểu suy luận: suy luận diễn dịch và suy luận có lí. Polya nhấn mạnh mối liên hệ chặt chẽ giữa suy luận diễn dịch và suy luận có lí như sau: "Toán học được xem là một môn khoa học chứng minh, tuy nhiên đó chỉ là một khía cạnh của nó... Chúng ta cần phải dự đoán về một định lí toán học trước khi chứng minh nó, phải dự đoán về đường lối và tư tưởng chủ đạo của chứng minh trước khi chứng minh, cần phải đối chiếu các kết quả quan sát được và suy ra những điều tương tự, phải mò mẫm và thử đi thử lại nhiều lần... Nếu việc dạy toán phản ánh ở mức độ nào đó việc hình thành toán học như thế nào thì trong việc giảng dạy đó phải dành chỗ cho dự đoán, cho suy luận có lí"[2]. Trong nghiên cứu này, chúng tôi đề cập đến hai

* NCS, Trường Đại học Sư phạm TPHCM; *Email: phuongttk@gmail.com*

loại suy luận có lí là suy luận quy nạp và suy luận ngoại suy vì chúng liên quan trực tiếp đến hoạt động khám phá quy luật dãy số như sẽ trình bày ở phần sau.

## 2. Suy luận quy nạp và suy luận ngoại suy

### *2.1. Suy luận quy nạp*

Suy luận quy nạp là tiến trình bắt đầu từ các quan sát về tính chất/đặc trưng của một số trường hợp đến kết luận về sự tồn tại của tính chất đó cho một nhóm lớn hơn các trường hợp ([6]).

Không giống như suy luận diễn dịch, kết luận của suy luận quy nạp không chắc chắn đúng. Mức độ có lí của kết luận sẽ được tăng lên khi có nhiều trường hợp hơn được kiểm chứng là đúng, nhưng kết luận có thể ngay lập tức bị bác bỏ khi có một phản ví dụ được chỉ ra.

### *2.2. Suy luận ngoại suy*

Mặc dù khái niệm về ngoại suy được đề cập đến lần đầu tiên bởi Aristole, nhưng nhà toán học, triết học và logic học người Mĩ Charles Sanders Peirce (1839-1914) là người đã phát triển khái niệm này và đưa nó vào trong hệ thống các loại suy luận. Nhận thức truyền thống liên quan đến bản chất của suy luận toán học vẫn giữ quan điểm rằng suy diễn và quy nạp hình thành nên một cặp đôi mà tất cả các loại suy luận không phải là suy diễn thì sẽ rơi vào trường hợp còn lại là quy nạp [7]. Tuy nhiên, Peirce đề xuất một loại suy luận mới: suy luận ngoại suy nhằm tìm kiếm giả thuyết để lí giải cho các sự kiện quan sát được.

Mô hình suy luận ngoại suy của Peirce:

Một sự thật *C* được quan sát,

Nếu *A* đúng, *C* hiển hiên cũng sẽ đúng;

Vì thế, là hợp lí khi giả thuyết rằng *A* là đúng. ([6], 5.189)

J. Josephson & S. Josephson [6] phát triển mô hình ngoại suy của Peirce thêm một giai đoạn: đánh giá giả thuyết nào là tốt nhất. Mô hình mới nhằm đưa ra một giả thuyết ngoại suy đủ tốt được viết lại như sau:

*D* là một tập các dữ liệu (sự kiện, quan sát, cái đã cho) (1)

*H* giải thích *D* (nếu *H* đúng, sẽ giải thích *D*) (2)

Không có giả thuyết khác có thể giải thích *D* tốt hơn *H* (3)

Như vậy, *H* có lẽ là đúng. (4)

Tính có lí của các giả thuyết ngoại suy có thể được tăng lên hay bị giảm đi, thậm chí bị bác bỏ khi có thêm các sự kiện/thông tin mới được cung cấp. Khi có nhiều giả thuyết có lí cùng giải thích cho một quan sát, nhiệm vụ của ngoại suy là chọn ra giả thuyết có lí nhất.

### *2.3. Suy luận trong quá trình khám phá quy luật dãy số*

*a) Các nhiệm vụ khám phá quy luật dãy số*

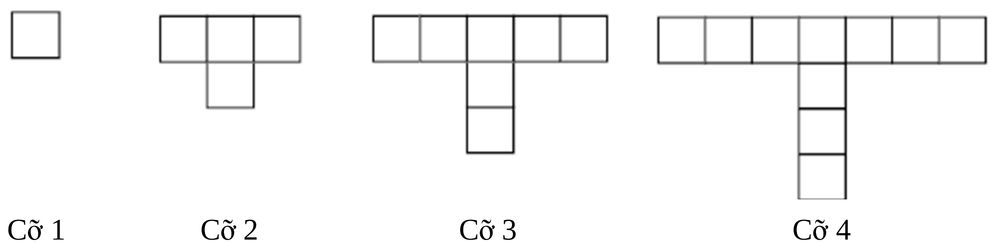
Các nhiệm vụ khám phá quy luật dãy số có thể được thể hiện trong bối cảnh số học (Nhiệm vụ 1) hay sử dụng các biểu diễn trực quan (BDTQ) để mô tả (Nhiệm vụ 2) như minh họa dưới đây:

**Nhiệm vụ 1**. Năm số hạng đầu tiên của một dãy số là: 1, 4, 7, 10, 13…

a) Viết tiếp số hạng thứ 6, thứ 10 và thứ 50 của dãy số.

b) Em có thể viết một quy tắc để tìm kiếm số hạng thứ *n* của dãy số này nếu giá trị *n* được cho sẵn? Giải thích các em tìm ra câu trả lời.

**Nhiệm vụ 2**. Các tấm bìa hình vuông được sắp xếp thành các hình chữ *T* theo một sơ đồ có quy luật như sau:




***Hình 1.*** *Biểu diễn trực quan mô tả quy luật hình chữ T*

a) Viết một công thức để tìm số tấm bìa cần sử dụng cho hình chữ *T* cỡ *n*.

b) Sử dụng công thức ở câu a), tìm số tấm bìa cần được sử dụng cho hình chữ *T* cỡ 100, cỡ 178.

Trong nhiệm vụ 1, việc tìm kiếm số hạng thứ 6 đòi hỏi học sinh (HS) phải xem xét 5 số hạng được cho trước đó và suy ra một quy luật giữa 5 số hạng này, chẳng hạn: mỗi số hạng đứng sau bằng số hạng liền kề trước cộng 3 đơn vị. Do đó, số hạng thứ 6 là $13+3=16$. Việc tìm kiếm số hạng thứ 10 và 50 được gọi là các nhiệm vụ tổng quát hóa (TQH) gần và TQH xa. TQH gần yêu cầu HS tìm kiếm một số hạng không hẳn phải liền kề ngay sau các số hạng đã cho, nhưng vị trí của nó trong dãy quy luật đủ gần để HS có thể thực hiện từng bước đếm tuần tự và có được câu trả lời. TQH xa yêu cầu HS tìm kiếm một số hạng ở vị trí xa hơn nhiều so với các số hạng đã được cho sẵn khiến cho việc đếm từng bước tuần tự trở nên không hiệu quả. Tuy nhiên với nhiệm vụ 2, HS không cần phải tiến hành bất kì TQH xa nào để đạt được câu trả lời cho câu hỏi b) và c) mà câu trả lời cho một vị trí bất kì có thể suy ra ngay từ quy luật được thiết lập ở câu hỏi a). Các nhiệm vụ khám phá quy luật dãy số mà chúng tôi sử dụng trong nghiên cứu này được mô tả bằng BDTQ.

*b) Suy luận có lí trong khám phá quy luật dãy số*

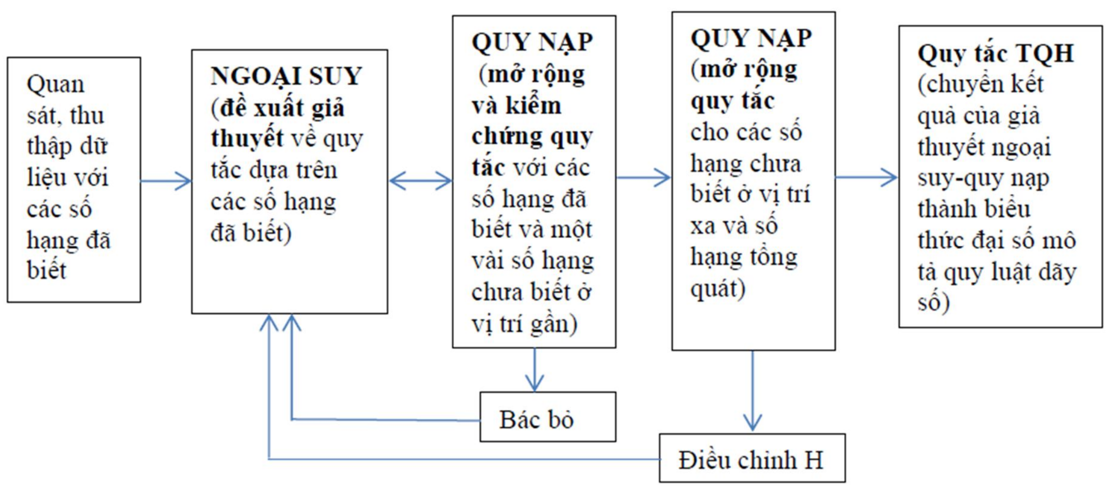
Khi đề cập đến những suy luận xảy ra dựa trên việc quan sát một số trường hợp cụ thể đến một kết quả tổng quát, người ta thường nghĩ đến suy luận quy nạp. Khái niệm ngoại suy cũng không hề được nhắc đến trong những phân tích của các tác giả Reid [9], Canadas & Castro [4] về suy luận của HS khi thực hiện các nhiệm vụ khám phá quy luật dãy số. Tuy nhiên, việc đồng nhất nhiệm vụ khám phá quy luật dãy số với hành động kiểm chứng và tổng quát hóa một quy luật từ các trường hợp cho sẵn của dãy số dường như đã phớt lờ đi yếu tố sáng tạo trong quá trình này, yếu tố mà Peirce đã chỉ ra như một đặc trưng của ngoại suy. Trong khi đó, Canadas và Castro khẳng định rằng trong số bảy bước của tiến trình suy luận quy nạp bao gồm: (1) *Quan sát các trường hợp đặc biệt*; (2) *Sắp xếp các trường hợp đặc biệt một cách hệ thống*; (3) *Tìm kiếm và dự đoán quy luật*; (4) *Hình thành giả thuyết*; (5) *Kiểm chứng giả thuyết* (với các trường hợp đặc biệt); (6) *Tổng quát hóa giả thuyết*; (7) *Xác minh giả thuyết tổng quát* thì bước thứ 4 (*Hình thành giả thuyết*) là quan trọng và xuất hiện thường xuyên nhất trong bài làm của HS. Đây rõ ràng là nhiệm vụ của ngoại suy. Một số câu hỏi được chúng tôi đặt ra: Liệu ngoại suy có tham gia vào các hoạt động khám phá quy luật dãy số? Nếu có thì ngoại suy được thể hiện ở đâu trong quá trình này?

Quay trở lại tìm hiểu các nghiên cứu về suy luận ngoại suy của Peirce đặc biệt là ở giai đoạn thứ 2 (từ năm 1878 trở về sau), chúng tôi tìm thấy một chỉ dẫn cho câu trả lời, đó là đến năm 1901, Peirce bắt đầu sử dụng thuật ngữ "ngoại suy" nhằm chỉ đến "sự khởi động đầu tiên nhất để đưa ra một giả thuyết" (Peirce, [65, 6.525]). "*Ngoại suy chỉ đơn thuần là bước khởi đầu. Nó là bước đầu tiên của suy luận trong khoa học, trong khi quy nạp là bước kết luận sau cùng*" (Peirce, [65, 7.218]). Chúng tôi cũng phát hiện được một số điểm khác biệt sau đây giữa ngoại suy và quy nạp qua quá trình khảo cứu các tài liệu liên quan:

- Mục đích của ngoại suy là *đưa ra một giả thuyết* nhằm giải thích cho những gì được quan sát [7]. Mục đích của quy nạp nhằm *tổng quát hóa một tính chất* từ việc quan sát tính chất đó trong những trường hợp riêng.
- Quy nạp "cho thấy sự tồn tại của một hiện tượng mà chúng ta đã quan sát trong những trường hợp tương tự trước đó", và "xu hướng này không phải là các sự kiện mới" ([1], tr. 234), trong khi ngoại suy "đề xuất một điều gì đó mà thường là chúng ta không thể quan sát một cách trực tiếp" ([8], 2.640). Ngoại suy là loại suy luận duy nhất tạo ra các tri thức mới của người học. Kết luận của quy nạp chắc chắn hơn ngoại suy, nhưng ít sáng tạo hơn.
- Quy nạp chỉ ra sự phát triển của xu hướng được dự đoán cho những quan sát xa hơn, ngoại suy không (trực tiếp) quan tâm đến những quan sát xa hơn sau đó mà chỉ hướng đến mục đích lí giải cho chính trường hợp đang xảy ra. Nói cách khác, ngoại suy bắt đầu khi có một quan sát gây ngạc nhiên thúc đẩy việc tạo ra một giả thuyết để giải thích ở giai đoạn đầu tiên nhất, hoặc làm hẹp bớt miền các giả thuyết có thể xảy ra. Quy nạp chỉ bắt đầu vận hành khi đã có giả thuyết từ ngoại suy, bằng cách kiểm tra giả thuyết thông qua các trường hợp cụ thể. Quy nạp không hề tạo ra bất kì các ý tưởng cơ bản ban đầu nào [8].

Những phân tích trên cho thấy chức năng và kết quả của suy luận ngoại suy và quy nạp là hoàn toàn khác nhau. Tuy nhiên việc phân biệt hai loại suy luận này trong quá trình khám phá các quy luật dãy số trở nên phức tạp hơn theo chúng tôi bởi hai lí do sau. Thứ nhất, Deutscher [3] cho rằng phép quy nạp gắn liền với việc tổng quát hóa một thuộc tính hay một mối quan hệ từ ít nhất hai trường hợp cụ thể cho một lớp toàn bộ các đối tượng, còn phép ngoại suy đòi hỏi một biến đổi đột biến có tính khái niệm từ trường hợp đã cho đến một giả thuyết có tính giải thích. Nói cách khác, ưu thế của ngoại suy được tận dụng khi đưa ra giả thuyết chỉ dựa trên *một* quan sát đơn lẻ (hoặc *một số* quan sát có liên quan đến nhau nhưng *không nhất thiết tương tự nhau*), trong khi quy nạp cần phải dựa trên một số lượng nào đó *các quan sát tương tự nhau*. Thứ hai, giả thuyết của ngoại suy thường là phát biểu dựa trên mối *quan hệ nguyên nhân - hệ quả*, và kết luận của quy nạp là một phát biểu mang *tính tổng quát hóa*. Tuy nhiên, khi khám phá quy luật dãy số, giả thuyết ban đầu được đề xuất phần lớn là để lí giải cho *một vài* trường hợp đã được cho sẵn chứ không chỉ một trường hợp, và giả thuyết này thường bị nhầm lẫn với kết luận của suy luận quy nạp do nó *có thể được tổng quát hóa*. Như vậy, trong quá trình khám phá quy luật dãy số, việc đề xuất giả thuyết ban đầu nhất về quy luật là công việc của ngoại suy, nhưng phát biểu cuối cùng nhằm tổng quát hóa của quy luật được khẳng định bởi quy nạp, thông qua kiểm chứng với các trường hợp thực nghiệm.

Chúng tôi cũng tìm thấy một quan điểm tương tự trong nghiên cứu của Becker & Rivera [3] khi các tác giả quan sát và phỏng vấn quá trình suy luận của 42 giáo viên (GV) toán trong lúc giải quyết các nhiệm vụ liên quan đến tổng quát hóa quy luật bậc nhất. Trên cơ sở quy trình khám phá các quy luật hàm số bậc nhất bằng ngoại suy-quy nạp được đề xuất bởi Becker & Rivera [3] và mô hình suy luận quy nạp gồm bảy bước của của Canadas & Castro [4], chúng tôi xây dựng quy trình lí thuyết để khám phá quy luật dãy số gồm 5 bước ở hình 2:




***Hình 2.** Quy trình khám phá quy luật dãy số bằng suy luận ngoại suy-quy nạp*

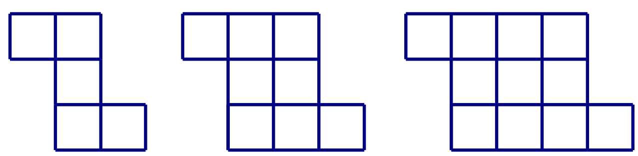
Minh họa cho các bước của quy trình sẽ được trình bày cụ thể ngay sau đây qua một bài toán được sử dụng trong thực nghiệm của nghiên cứu này.

### *2.4. Các phương án ngoại suy để khám phá quy luật dãy số*

Thực nghiệm được tiến hành trên 81 HS thuộc hai lớp 10 của Trường THPT Lê Lợi, thành phố Đông Hà, Quảng Trị nhằm khảo sát các giả thuyết ngoại suy mà HS đề xuất và quy trình mà các em thực hiện để khám phá ra quy luật dãy số. HS được yêu cầu trả lời hai bài toán: *Hình chữ Z* và *Hình chữ S*. Hai bài toán được đưa ra cho HS với bối cảnh hoàn toàn giống nhau, BDTQ mô tả cho các số hạng cụ thể của mỗi bài cũng tương tự nhau, nhưng hàm số mô tả quy luật bài *Hình chữ Z* là một hàm bậc nhất và bài *Hình chữ S* là hàm bậc hai.

**CÂU HỎI 1. HÌNH CHỮ Z**

Nam sử dụng những tấm bìa hình vuông giống hệt nhau để thiết kế mẫu hình chữ Z trang trí cho buổi tiệc sinh nhật với các kích cỡ khác nhau. Dưới đây là minh họa mẫu hình chữ Z mà Nam đã thiết kế với ba kích cỡ tương ứng.



Cỡ 1 Cỡ 2 Cỡ 3

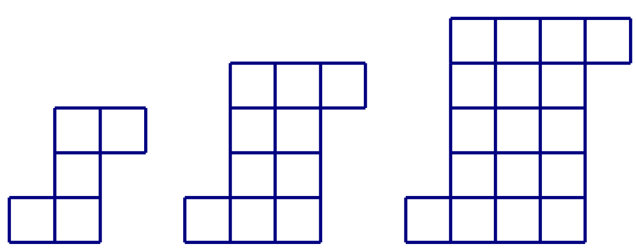
Khi kích cỡ mẫu hình chữ Z tăng lên, sẽ cần chuẩn bị nhiều tấm bìa hình vuông hơn.

a) Em hãy đề xuất một quy tắc giúp Nam tìm số tấm bìa hình vuông cần chuẩn bị cho mẫu hình chữ Z với cỡ bằng giá trị $n$ bất kì.

b) Mô tả rõ ràng làm thế nào em tìm ra được quy tắc đó. Em có thể dùng hình vẽ, lập bảng số liệu hay diễn đạt bằng lời.

**CÂU HỎI 2. HÌNH CHỮ S**

Bình sử dụng những tấm bìa hình vuông giống hệt nhau để thiết kế mẫu hình chữ S trang trí cho hội trại với các kích cỡ khác nhau. Dưới đây là minh họa mẫu hình chữ S mà Bình đã thiết kế với ba kích cỡ tương ứng.



Cỡ 1 Cỡ 2 Cỡ 3

Khi kích cỡ mẫu hình chữ S tăng lên, sẽ cần chuẩn bị nhiều tấm bìa hình vuông hơn.

a) Em hãy đề xuất một quy tắc giúp Bình tìm số tấm bìa hình vuông cần chuẩn bị cho mẫu hình chữ S với cỡ bằng giá trị *n* bất kì.

b) Mô tả rõ ràng làm thế nào em tìm ra được quy tắc đó. Em có thể dùng hình vẽ, lập bảng số liệu hay diễn đạt bằng lời.

Do sự tương tự về mặt bản chất của hai bài toán trên, trong bài báo này chúng tôi chỉ trình bày phân tích tiền thực nghiệm dựa trên quy trình mà chúng tôi đã đề xuất cho bài *Hình chữ Z*:

- ***Bước 1.*** Quan sát, thu thập dữ liệu cho các trường hợp cho sẵn.

HS quan sát các BDTQ mô tả *Hình chữ Z* cỡ 1, cỡ 2, cỡ 3, thu thập dữ liệu bằng cách đếm để có được số tấm bìa của *Hình chữ Z* cỡ 1, cỡ 2, cỡ 3 là 5, 8, 11.

- ***Bước 2.*** Đề xuất giả thuyết ngoại suy là một quy tắc mang tính thăm dò nhằm lí giải cho sự xuất hiện theo quy luật của các trường hợp có sẵn. Quy tắc này được phát hiện dựa trên việc tổ chức, hệ thống hóa dữ liệu số (chúng tôi gọi là các phương án ngoại suy Số học) hay khai thác cấu trúc của BDTQ mô tả dãy *Hình chữ Z* theo các cách khác nhau nhằm làm xuất hiện lặp lại một số đặc trưng nào đó giữa các trường hợp cho sẵn (chúng tôi gọi là các phương án ngoại suy Hình học). Sau đây là minh họa một số phương án ngoại suy Số học:

(1) *Quy tắc đệ quy*:

***Bảng 3.1.*** Tổ chức dữ liệu theo phương án *Đệ quy*

| **Kích cỡ (*n*)** | **Số tấm bìa** $(a_n)$ | **Phương án ngoại suy** |
|---|---|---|
| 1 | 5 | 5 |
| 2 | 8 | $8 = 5 + 3$ |
| 3 | 11 | $11 = 8 + 3$ |

Với cách tổ chức dữ liệu như trong Bảng 3.1, giả thuyết ngoại suy: $a_{n+1} = a_n + 3, a_1 = 5$ với $n = 1,2$.

(2) *Đoán và Thử*:

***Bảng 3.2.*** Tổ chức dữ liệu theo phương án *Đoán và Thử*

| **Kích cỡ (*n*)** | **Số tấm bìa** $(a_n)$ | **Phương án ngoại suy** |
|---|---|---|
| 1 | 5 | $5 = 3.1 + 2$ |
| 2 | 8 | $8 = 3.2 + 2$ |
| 3 | 11 | $11 = 3.3 + 2$ |

Với cách tổ chức dữ liệu như trong Bảng 3.2, giả thuyết ngoại suy: các số hạng của dãy *Hình chữ Z* thỏa $a_n = 3n + 2$ với $n = 1, 2, 3.$

(3) *Cộng dồn*:

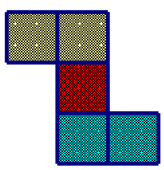
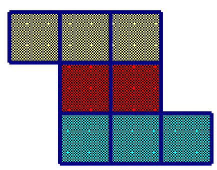
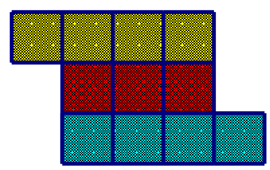
***Bảng 3.3.*** Tổ chức dữ liệu theo phương án *Cộng dồn*

| **Kích cỡ (*n*)** | **Số tấm bìa** $(a_n)$ | **Phương án ngoại suy** |
|---|---|---|
| 1 | 5 | 5 |
| 2 | 8 | $8 = 5 + 3 = 5 + 1.3$ |
| 3 | 11 | $11 = 8 + 3 = 5 + 3 + 3 = 5 + 2.3$ |

Với cách tổ chức dữ liệu như trong Bảng 3.3, giả thuyết ngoại suy: $a_n = 5 + (n-1)3$ với $n = 1, 2, 3$.

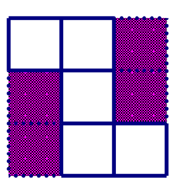
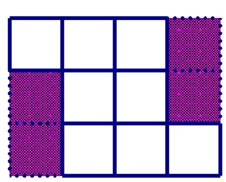
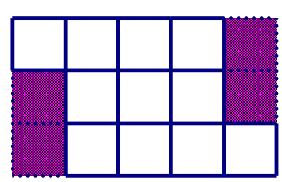
Tiếp theo chúng tôi minh họa một số phương án ngoại suy Hình học:

(4) *Ghép hình rời*: Chia *Hình chữ Z* thành ba phần (mỗi phần được đánh dấu bằng một màu riêng biệt). Số tấm bìa tạo thành *Hình chữ Z* được tính bằng cách lấy số tấm bìa theo từng màu và cộng lại.

| **Cỡ 1** | **Cỡ 2** | **Cỡ 3** |
|---|---|---|
|  |  |  |
| $2 + 1 + 2$ | $3 + 2 + 3$ | $4 + 3 + 4$ |

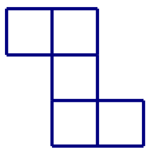
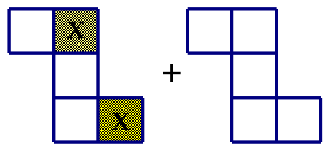
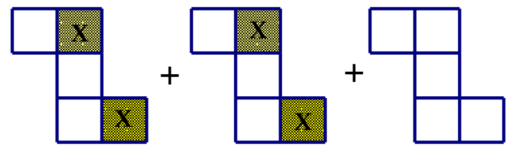
Giả thuyết ngoại suy: Số tấm bìa của *Hình chữ Z* cỡ $n$ $(n = 1, 2, 3)$ là: $a_n = (n+1) + n + (n+1)$.

(5) *Làm tròn hình*: Bổ sung vào mỗi *Hình chữ Z* 4 tấm bìa (được tô màu) để tạo thành các hình chữ nhật. Số tấm bìa trong mỗi *Hình chữ Z* bằng số tấm bìa của hình chữ nhật được tạo thành trừ đi 4 tấm bìa vừa được bổ sung.

| **Cỡ 1** | **Cỡ 2** | **Cỡ 3** |
|---|---|---|
|  |  |  |
| $3(1+2) - 4$ | $3(2+2) - 4$ | $3(3+2) - 4$ |

Giả thuyết ngoại suy: Số tấm bìa của *Hình chữ Z* cỡ $n$ $(n=1,2,3)$ là: $a_n = 3(n+2)-4$.

(6) *Ghép hình chồng*: Tưởng tượng các *Hình chữ Z* được tạo thành bằng cách ghép chồng lên nhau các *Hình chữ Z* cỡ 1, với số tấm bìa của *Hình chữ Z* cỡ 1 là 5 tấm. Khi đó, cần phải trừ đi các tấm bìa bị tính hai lần do chúng bị ghép chồng lên nhau (là các tấm bìa có đánh dấu X).

| **Cỡ 1** | **Cỡ 2** | **Cỡ 3** |
|---|---|---|
|  |   |   |
| $1.(5)-0$ | $2.(5)-1.2$ | $3.(5)-2.2$ |

Giả thuyết ngoại suy: Số tấm bìa của *Hình chữ Z* cỡ $n$ $(n=1,2,3)$ là: $a_n = n(5)-(n-1)2$.

- ***Bước 3:*** *Mở rộng giả thuyết vừa đề xuất bằng suy luận quy nạp và thực hiện kiểm chứng cho những trường hợp chưa biết ở vị trí gần nhằm khẳng định hay bác bỏ giả thuyết này.*

Giả thuyết ngoại suy được đề xuất ở Bước 2 chỉ mới nhằm giải thích cho các trường hợp cho sẵn. Để đề xuất quy tắc cho trường hợp tổng quát bằng suy luận quy nạp, các quy tắc ở Bước 2 cần được mở rộng cho các trường hợp chưa biết $(n = 4,5,6...)$ và kiểm chứng. Càng nhiều trường hợp được kiểm chứng là đúng thì tính có lí của giả thuyết ngoại suy càng được củng cố. Tuy nhiên nếu có một trường hợp sai thì giả thuyết cần được loại bỏ và HS quay trở lại Bước 2.

- ***Bước 4:*** *Mở rộng quy tắc cho trường hợp tổng quát.*

So với giả thuyết ngoại suy được đề xuất ở Bước 2, giả thuyết ngoại suy-quy nạp ở Bước 4 đã được mở rộng và kiểm chứng tính đúng đắn cho những trường hợp chưa biết, sau đó tổng quát hóa lên thành một quy tắc để tính số tấm bìa cho *Hình chữ Z* với cỡ *n* bất kì. Cụ thể là quy tắc $a_{n+1} = a_n + 3, a_1 = 5, n = 2,3,4...$ được mở rộng và tổng quát hóa từ phương án ngoại suy (1) hay quy tắc $a_n = 3n+2, \forall n = 1,2,3...$ được mở rộng và tổng quát hóa từ các phương án ngoại suy (2), (3), (4), (5), (6). Ở bước này, HS có thể nhận ra việc thực hành quy tắc $a_{n+1} = a_n + 3, a_1 = 5, n = 2,3,4...$ cho dãy *Hình chữ Z* sẽ gặp khó khăn khi giá trị *n* được yêu cầu là một số khá lớn, chẳng hạn tìm số tấm bìa cần sử dụng cho *Hình chữ Z* cỡ 500. Do đó, HS có thể quay trở lại Bước 2 để tìm kiếm một quy tắc khác giúp việc giải quyết vấn đề hiệu quả hơn.

- ***Bước 5:*** *Kết luận về quy luật của dãy số*

HS đưa ra kết luận cuối cùng về quy luật của dãy số sau khi đã kiểm chứng tính đúng đắn và đánh giá hiệu quả của giả thuyết ngoại suy-quy nạp trong việc tìm kiếm một số hạng của dãy số ở vị trí bất kì.

Với các kết quả thu thập được từ bài làm của HS, chúng tôi tiến hành phân loại các phương án ngoại suy theo từng phạm trù và tỉ tỉ lệ câu trả lời đúng trong mỗi phạm trù với hai nhiệm vụ *Hình chữ Z* và *Hình chữ S*. Riêng những HS không đưa ra giả thuyết hoặc đưa ra giả thuyết về quy tắc tổng quát nhưng không lí giải, hoặc lí giải hoàn toàn không hợp lí sẽ được xếp vào phạm trù "Không xác định được".

Bảng 3.4 và 3.5 cho thấy sự phân bố các phương án ngoại suy được HS thể hiện theo từng phạm trù và tỉ lệ câu trả lời đúng trong mỗi phạm trù với hai nhiệm vụ *Hình chữ Z* và *Hình chữ S*.

***Bảng 3.4.*** *Số lượng các phương án ngoại suy theo từng phạm trù*

| **Nhiệm vụ** | **Số học** | **Hình học** | **Đoán và thử** | **Không xác định được** |
|---|---|---|---|---|
| *Hình chữ Z* | 39 | 15 | 3 | 24 |
| *Hình chữ S* | 9 | 16 | 4 | 52 |

***Bảng 3.5.*** *Số lượng và tỉ lệ câu trả lời đúng trong mỗi phạm trù*

| **Nhiệm vụ** | **Số học** | **Hình học** | **Đoán và thử** | **Không xác định được** |
|---|---|---|---|---|
| *Hình chữ Z* | 19<br>(48,7%) | 12<br>(80%) | 1<br>(33,3%) | 1<br>(0,04%) |
| *Hình chữ S* | 0<br>(0%) | 11<br>(68.8%) | 0<br>(0%) | 0<br>(0%) |

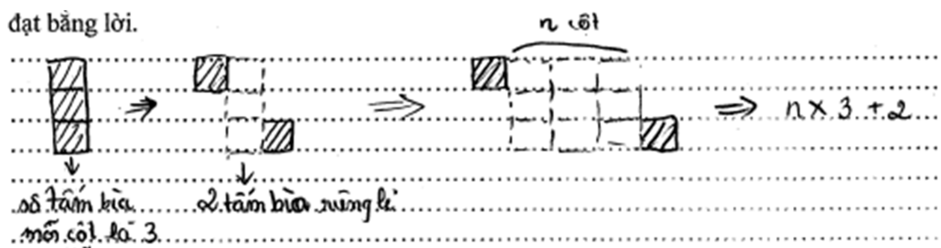
Một số kết luận được rút ra từ thực nghiệm qua quan sát bài làm của HS và các số liệu được thông kê trong Bảng 3.4. và Bảng 3.5:

Thứ nhất, tỉ lệ HS đưa ra các phương án ngoại suy thuộc phạm trù "Không xác định được" ở bài *Hình chữ Z* là 25/81 và bài *Hình chữ S* là 52/81. Tỉ lệ này cho thấy việc đề xuất một giả thuyết ngoại suy có lí cho bài toán quy luật hàm bậc hai gặp trở ngại nhiều hơn so với quy luật hàm số bậc nhất. Với bài *Hình chữ Z*, trong số 39 phương án ngoại suy Số học, có 19 HS (gần 50%) có thể đưa ra được quy tắc tổng quát đúng trong khi con số này ở bài *Hình chữ S* là bằng 0 mặc dù hầu hết HS đã nhận thấy giá trị sai khác giữa hai số hạng liên tiếp trong bài *Hình chữ S* là một dãy theo quy luật cấp số cộng. Điều này cho thấy các phương án ngoại suy Số học (chẳng hạn việc sử dụng quy tắc đệ quy) không còn phát huy hiệu quả khi khám phá các dãy số theo quy luật hàm số bậc hai. Hơn nưa, tỉ lệ HS đưa ra quy tắc đúng từ các phương án ngoại suy

Hình học luôn cao hơn trong cả hai bài toán cho thấy hiệu quả của những phương án ngoại suy này mang lại.

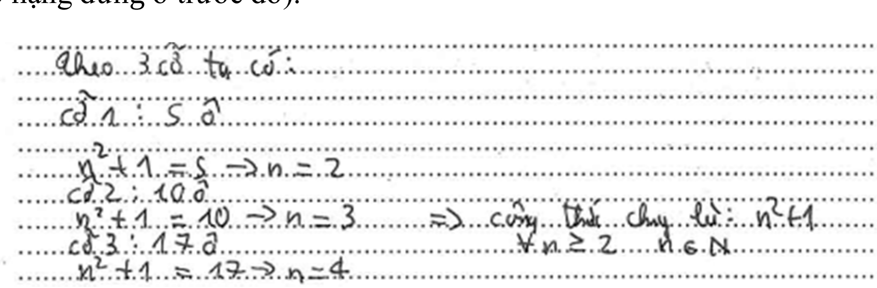
Thứ hai, với ngoại suy Số học, chỉ có một quy tắc đúng được HS đưa ra cho bài *Hình chữ Z* là $5+3(n-1)$ và không có kết quả nào cho bài *Hình chữ S* thì với ngoại suy Hình học, có ba quy tắc tương đương là $3n+2; 2(n+1)+n; 3(n+2)-2.2$ cho bài *Hình chữ Z* và ba quy tắc $(1+n)+(1+n)+n^2; 2+(n+2)n; (n+2)^2-2(n+1)$ cho bài *Hình chữ S*. Kết hợp với quan sát bài làm của HS, chúng tôi cho rằng kết quả trên có được là do các BDTQ cung cấp cho HS nhiều cách nhìn khác nhau về sự phát triển của quy luật hơn so với việc sử dụng đơn thuần các dữ liệu số.

Thứ 3, những HS sử dụng ngoại suy Số học thường trình bày giải thích cho quy tắc tổng quát được đề xuất bằng cách kiểm chứng rằng quy tắc này đúng với các trường hợp đã biết ($n=1,2,3$) trong khi những HS tiến hành ngoại suy Hình học có thể mô tả một số hạng tổng quát thông qua BDTQ, nghĩa là các em có thể nhận ra được mối liên kết mang tính quy luật giữa số hạng và vị trí của nó trong dãy số một cách độc lập với các số hạng khác (Hình 3).




***Hình 3.*** *Ngoại suy Hình học cho bài* Hình chữ Z

Thứ 4, một sai lầm khá phổ biến xuất hiện trong các phương án ngoại suy Số học là HS chưa thật sự hiểu ý nghĩa của biến số *n* dẫn đến các quy tắc sai mặc dù chúng có thể trích xuất ra đúng dãy số của bài toán. Chẳng hạn, trong quy tắc $n^2+1, \forall n \geq 2$ mà HS đưa ra cho bài *Hình chữ S* (Hình 4) thì biến *n* không mang ý nghĩa đại diện cho kích cỡ của *Hình chữ S*, hay các quy tắc đệ quy được diễn đạt dưới dạng $n+3$ trong bài *Hình chữ Z* (biến *n* là kích cỡ của *Hình chữ Z* nhưng trong công thức này nó đại diện cho số hạng đứng ở trước đó).




***Hình 4.*** *Ngoại suy Số học cho bài* Hình chữ S

Cuối cùng, qua quan sát bài làm của HS, chúng tôi hầu hết các em đều chỉ đưa ra giả thuyết ngoại suy để lí giải cho các trường hợp được cho sẵn và sau đó tổng quát hóa lên mà không kiểm chứng quy tắc cho các trường hợp chưa biết.

## 3. Kết luận

Trong bài báo này, chúng tôi đã phân tích cơ sở lí thuyết để làm rõ sự khác nhau giữa hai loại suy luận quy nạp và ngoại suy, đặc biệt là trong hoạt động tổng quát hóa quy luật dãy số. Chúng tôi cũng đề xuất quy trình lí thuyết thể hiện sự kết hợp chặt chẽ và hỗ trợ lẫn nhau của suy luận ngoại suy và quy nạp trong việc khám phá và kiểm chứng một giả thuyết để cuối cùng đi đến quy tắc tổng quát. Những kết quả thực nghiệm cho thấy: (1) HS thường bỏ qua giai đoạn kiểm chứng giả thuyết ngoại suy cho các trường hợp TQH gần và TQH xa mà đề xuất ngay quy tắc tổng quát khi thấy quy tắc đúng cho các trường hợp đã biết; (2) BDTQ mô tả quy luật dãy số cung cấp một cơ sở tốt về tính có lí cho giả thuyết ngoại suy qua đó hạn chế được các sai lầm (đặc biệt là các sai lầm về ý nghĩa của biến số) và giúp HS có nhiều hướng tiếp cận khác nhau đối với quy luật dãy số (đặc biệt là các dãy số theo quy luật hàm số bậc hai, đồng thời hỗ trợ quy nạp trong việc tổng quát hóa các giả thuyết này. Một bảng phân loại các mức độ của suy luận ngoại suy được HS thể hiện khi giải quyết các nhiệm vụ tổng quát hóa quy luật dãy số được mô tả bằng biểu diễn trực quan đã được chúng tôi thiết kế để cung cấp những phân tích sâu sắc hơn về mặt thực nghiệm, nội dung này chúng tôi sẽ trình bày ở nghiên cứu tiếp theo.

[1] National Council of Teachers of Mathematics (2000), Principles and Standards in Mathematics, NCTM, USA

[2] Polya (1954), Patterns of Plausible Inference, pp. 158-160.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Abe, A. (2003), "Abduction and analogy in chance discovery", *In Y. Ohsawa & P. McBurney (Eds), Chance Discovery*, pp. 231-248, New York: Springer.
2. Billings, E. M. H. (2008), "Exploring generalisation through pictorial growth patterns", *In C. E. Greenes & R. Rubenstein (Eds.), Algebra and Algebraic Thinking in School Mathematics (Seventieth Yearbook)*, pp. 279 – 293, Reston,VA: NCTM.
3. Becker, J., & Rivera, F. (2007), *Abduction in pattern generalization*, Proceedings of the 31st conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol (4), pp. 97–104, Seoul, Korea: Korea Society of Educational Studies in Mathematics.

4. Canadas, M.C. & Castro, E. (2009), "Using a model to describe students' inductive reasoning in problem solving", *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 1 (17), pp. 261 – 278.
5. Eco, U. (1983), "Horns, hooves, insteps: Some hypotheses on three types of abduction", *In U. Eco & T. Sebeok (Eds.), The sign of three: Dupin, Holmes, Peirce*, pp. 198–220, Bloomington, IN: Indiana University Press.
6. Josephson, J. & Josephson, S. (1994), *Abductive Inference: Computation, Philosophy, Technology*, New York: Cambridge University Press.
7. Magnani, L. (2005), "An abductive theory of scientific reasoning". *Semiotica*, 153(1-4), pp. 261-286.
8. Peirce, C. S. (1960), *Collected Papers*, Cambridge, MA: Harvard University Press.
9. Reid, D. (2002), "Conjectures and refutations in grade 5 mathematics", *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(1), pp. 5-29.


*(Ngày Tòa soạn nhận được bài: 07-02-2015; ngày phản biện đánh giá: 10-9-2015; ngày chấp nhận đăng: 24-9-2015)*