TÍNH SIÊU KHẢ TÍCH CỦA BÀI TOÁN MICZ-KEPLER CHÍN CHIỀU

PHAN NGỌC HƯNG*, LÊ VĂN HOÀNG**

TÓM TẮT

Bài toán MICZ-Kepler chín chiều với thế đơn cực $SO(8)$ được khẳng định có đối xứng $SO(10)$. Trên cơ sở sử dụng đối xứng này, một hệ gồm 9 toán tử độc lập giao hoán trong đó chứa Hamiltonian được chúng tôi xây dựng tường minh. Một bộ 8 toán tử bất biến độc lập khác cũng được chỉ ra. Sự tồn tại đồng thời của hai bộ toán tử này cho phép khẳng định tính siêu khả tích tối đa của bài toán này.

Từ khóa: bài toán MICZ-Kepler, đối xứng ẩn, siêu khả tích, không gian chín chiều, đối xứng $SO(10)$.

ABSTRACT

Superintegrability of the nine-dimensional MICZ-Kepler problem

The nine-dimensional MICZ-Kepler system with the $SO(8)$ monopole potential has been regarded to have $SO(10)$ symmetry recently. Based on this symmetry, in the present paper, a set of nine functionally independent, commutative each to other, and invariant operators including the Hamiltonian of the system is built explicitly. Also, another set of eight invariant operators is built. From the combination of those set, which are seventeen operators we conclude that the considered MICZ-Kepler problem is maximally superintegrable.

Keywords: MICZ-Kepler problem, hidden symmetry, superintegrability, nine-dimensional space, $SO(10)$ symmetry.

1. Khái niệm siêu khả tích

Trong nghiên cứu các hệ vật lí, việc xây dựng mô hình toán học và khảo sát các tính chất của mô hình là một hướng tiếp cận thông dụng. Cách tiếp cận này đã thu được rất nhiều thành công cả trong vật lí cổ điển lẫn vật lí lượng tử. Tuy nhiên, các mô hình toán học thường dẫn đến những phương trình hoặc hệ phương trình vi phân phức tạp, mà đa phần không có lời giải giải tích, chỉ có thể giải số. Chỉ có một số rất ít các bài toán có lời giải chính xác và tường minh, được gọi là các bài toán khả tích. Một nhóm thậm chí còn ít hơn rất nhiều các bài toán có đồng thời lời giải giải tích và lời giải đại số, được gọi là các bài toán siêu khả tích. Các bài toán siêu khả tích đóng vai trò rất quan trọng trong sự phát triển lí thuyết của vật lí học, và thường được xem như những

* ThS, Trường Đại học Sư phạm TPHCM; *Email: hungpn@hcmup.edu.vn*

** PGS TSKH, Trường Đại học Sư phạm TPHCM

bài toán cơ sở để tính toán cho các hệ phức tạp hơn nhờ các lí thuyết nhiễu loạn. Một ví dụ về bài toán siêu khả tích là bài toán Kepler, được xem là bài toán căn bản để phát triển tính toán quỹ đạo các thiên thể trong vật lí cổ điển, hay tính toán các mức năng lượng của nguyên tử trong vật lí lượng tử. Một ví dụ khác là bài toán dao động tử điều hòa, vẫn được xem là cơ sở tính toán cho các hệ boson.

Tuy các hệ có tính siêu khả tích như bài toán Kepler-Coulomb hay dao động tử điều hòa đã được quan tâm nghiên cứu từ rất lâu, nhưng lí thuyết hiện đại về cấu trúc và phân loại các hệ này có thể xem như chỉ mới bắt đầu từ công trình của Smorodinsky, Winternitz và các cộng sự năm 1965 [2, 3]. Tính siêu khả tích của một hệ được xác định thông qua việc khảo sát đối xứng của bài toán, và thường liên quan đến "đối xứng ẩn" của hệ. Các hệ siêu khả tích được thừa nhận là có đối xứng tối đa, dẫn đến khả năng giải được bằng phương pháp đại số lẫn giải tích [1-4, 7].

Xét một hệ lượng tử có phương trình Schödinger dừng trong không gian N -chiều:

$$H\Psi = E\Psi,$$

hệ được gọi là khả tích, nếu tồn tại n toán tử độc lập tuyến tính X_a thỏa:

$$[X_a, X_b] = 0, \qquad a, b = 1, \ldots, n,$$

trong đó, toán tử $X_1 = H$ là Hamiltonian của hệ.

Hệ được gọi là siêu khả tích nếu ngoài n toán tử X_a đã kể trên, còn tồn tại k toán tử $\{Y_1, \ldots, Y_k\}$ bảo toàn, tức là

$$[H, Y_j] = 0, \qquad j = 1, \ldots, k,$$

đồng thời bộ $2n-1$ toán tử gồm $\{H, X_2, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_k\}$ độc lập với nhau. Ở đây, các toán tử Y_j không cần giao hoán với các toán tử X_a cũng như không cần giao hoán với nhau. Số lượng toán tử Y_j thỏa:

$$1 \le k \le n-1.$$

Trường hợp $k = 1$, hệ được gọi là "siêu khả tích tối thiểu". Trường hợp $k = n-1$, hệ được gọi là "siêu khả tích tối đa". [4]

Trong trường hợp cổ điển, các khái niệm khả tích, siêu khả tích cũng có định nghĩa tương tự như trên, trong đó quan hệ giao hoán tử giữa các toán tử được thay bằng các ngoặc Poisson.

Các hệ siêu khả tích nhận được sự quan tâm đặc biệt vì những tính chất sau đây [4], [5]:

1. Trong cơ học cổ điển, các hệ siêu khả tích tối đa được chứng tỏ có quỹ đạo khép kín và chuyển động mang tính chu kì.
2. Về mặt lí thuyết, các quỹ đạo của hệ siêu khả tích cổ điển có thể thu được mà không cần giải các phương trình vi phân.

3. Theo định lí Bertrand, trong các hệ có thế năng đối xứng cầu, chỉ có hai trường hợp có quỹ đạo khép kín: dao động tử điều hòa và hệ Kepler-Coulomb.

4. Trong trường hợp đại số của đại lượng bảo toàn là bậc hai, các phương trình Hamilton-Jacobi hoặc Schödinger tương ứng của các hệ siêu khả tích này có thể tách biến.

5. Với các hệ lượng tử, tính siêu khả tích dẫn đến sự tăng suy biến các mức năng lượng, gọi là "suy biến ngẫu nhiên" (accidental degenaracy). Sự gia tăng các bậc suy biến có thể giải thích do tính siêu khả tích có liên quan đến một "đối xứng ẩn" của hệ.

6. Đối với các hệ siêu khả tích cực đại lượng tử đã biết, năng lượng của hệ có thể giải bằng phương pháp thuần đại số và giải tích.

2. Đối xứng của bài toán MICZ-Kepler 9 chiều

Bài toán MICZ-Kepler là sự mở rộng của bài toán Kepler-Coulomb, trong đó hệ được xét gồm một hạt có điện tích và isospin chuyển động trong thế năng của một dyon (một hạt có điện tích và từ tích). Bài toán MICZ-Kepler chín chiều được mở rộng một cách tự nhiên từ bài toán ba chiều và năm chiều với thế đơn cực tương ứng thỏa tính chất đại số $SO(8)$ được giới thiệu trong công trình của nhóm tác giả Van-Hoang Le năm 2009 [5, 6], và được nhóm tác giả này gọi là đơn cực $SO(8)$. Trong mục này, chúng tôi tóm tắt các kết quả đáng chú ý của công trình [6] về nhóm đối xứng của bài toán để làm cơ sở khảo sát tính siêu khả tích.

Phương trình Schödinger dừng của bài toán trong hệ đơn vị nguyên tử ($m = c = \hbar = e = 1$) có dạng:

$$H\Psi = \left\{\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{Q^2}{8r^2} - \frac{Z}{r}\right\}\Psi = E\Psi, \tag{1}$$

trong đó, $\pi^2 = \pi_\mu \pi_\mu$, ($\mu = 1,\ldots,9$) với các thành phần xung lượng π_μ có dạng tường minh:

$$\pi_j = -i\frac{\partial}{\partial x_j} + A_k(r)Q_{kj}, \quad j,k = 1,\ldots,8,$$

$$\pi_9 = -i\frac{\partial}{\partial x_9}.$$

Các số hạng $A_k(r)Q_{kj}$ đặc trưng cho tương tác của hạt có isospin với đơn cực $SO(8)$ với thế vector có dạng tường minh:

$$A_k(r) = \frac{x_k}{r(r + x_9)}.$$

Toán tử $Q^2 = Q_{kj}Q_{kj}$ ($j,k = 1,\ldots,8$) với Q_{kj} là các vi tử của nhóm $\mathrm{so}(8)$, nghĩa là thỏa mãn hệ thức giao hoán:

$$\left[Q_{jk}, Q_{mn}\right] = i\delta_{jm}Q_{kn} + i\delta_{kn}Q_{jm} - i\delta_{jn}Q_{km} - i\delta_{km}Q_{jn},$$

trong đó, δ_{jk} là kí hiệu delta Kronecker.

Cũng giống như trường hợp các bài toán MICZ-Kepler ba chiều và năm chiều, sự bổ sung thế đơn cực không làm phá vỡ tính chất đối xứng hình học $SO(9)$ của bài toán Kepler-Coulomb chín chiều. Cụ thể, nhóm đối xứng hình học của bài toán MICZ-Kepler chín chiều được biểu diễn bởi $N(N-1)/2 = 36$ thành phần moment xung lượng độc lập dưới dạng tensor:

$$\Lambda_{\mu\nu} = x_\mu \pi_\nu - x_\nu \pi_\mu + ir^2\left[\pi_\mu, \pi_\nu\right], \qquad \mu, \nu = 1, \ldots, 9, \quad \mu < \nu. \tag{2}$$

Các hệ thức giao hoán của các thành phần này chứng tỏ bài toán có đối xứng $SO(9)$

$$\left[\Lambda_{\mu\nu}, H\right] = 0,$$
$$\left[\Lambda_{\mu\nu}, \Lambda_{\sigma\rho}\right] = i\delta_{\mu\sigma}\Lambda_{\nu\rho} + i\delta_{\nu\rho}\Lambda_{\mu\sigma} - i\delta_{\mu\rho}\Lambda_{\nu\sigma} - i\delta_{\nu\sigma}\Lambda_{\mu\rho}. \tag{3}$$

Đối xứng ẩn của bài toán được thể hiện qua vector Runge-Lenz suy rộng 9-chiều với các thành phần có dạng tường minh:

$$M_\nu = \frac{1}{2}\left(\pi_\mu \Lambda_{\mu\nu} + \Lambda_{\mu\nu}\pi_\mu\right) + Z\frac{x_\nu}{r}, \qquad \nu = 1, \ldots, 9. \tag{4}$$

Các thành phần này thỏa mãn các hệ thức giao hoán:

$$\left[M_\mu, H\right] = 0,$$
$$\left[\Lambda_{\mu\nu}, M_\rho\right] = i\delta_{\mu\rho}M_\nu - i\delta_{\nu\rho}M_\mu,$$
$$\left[M_\mu, M_\nu\right] = -2iH\Lambda_{\mu\nu}.$$

Nhóm đối xứng $so(10)$ của bài toán MICZ-Kepler chín chiều được xác định từ 45 thành phần $\{\hat{\Lambda}_{\mu\nu}, \hat{M}_\rho\}$. Trong các hệ thức trên, H đóng vai trò như "hằng số" đối với nhóm đối xứng này. Các thành phần của nhóm đối xứng này sẽ được chúng tôi sử dụng để khảo sát tính siêu khả tích của bài toán trong phần tiếp theo.

3. Tính siêu khả tích tối đa của bài toán MICZ-Kepler 9 chiều

Trong trường hợp bài toán MICZ-Kepler chín chiều, $N = 9$ nên để hệ khả tích, cần 9 toán tử độc lập tuyến tính giao hoán với nhau (trong đó có Hamiltonian H). Thêm vào đó, để hệ là siêu khả tích, ta cần thêm k toán tử bảo toàn khác tạo với bộ 9 toán tử trước đó tạo thành một bộ độc lập ($0 \le k \le n-1$).

3.1. Tính khả tích

Nhóm đối xứng không gian $so(9)$ (và đầy đủ hơn là nhóm đối xứng $so(10)$) của bài toán được xây dựng dựa trên các toán tử bất biến sẽ là một cơ sở tốt để chúng tôi xây dựng nên bộ toán tử thỏa mãn tính chất khả tích của bài toán, do nhóm này được cấu tạo từ toán tử bất biến. Cụ thể, nhóm đối xứng không gian $\mathrm{so}(9)$ của bài toán MICZ-Kepler chín chiều được biểu diễn tường minh qua ma trận 9×9:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda_{12} & \Lambda_{13} & \Lambda_{14} & \Lambda_{15} & \Lambda_{16} & \Lambda_{17} & \Lambda_{18} & \Lambda_{19} \\ \Lambda_{21} & 0 & \Lambda_{23} & \Lambda_{24} & \Lambda_{25} & \Lambda_{26} & \Lambda_{27} & \Lambda_{28} & \Lambda_{29} \\ \Lambda_{31} & \Lambda_{32} & 0 & \Lambda_{34} & \Lambda_{35} & \Lambda_{36} & \Lambda_{37} & \Lambda_{38} & \Lambda_{39} \\ \Lambda_{41} & \Lambda_{42} & \Lambda_{43} & 0 & \Lambda_{45} & \Lambda_{46} & \Lambda_{47} & \Lambda_{48} & \Lambda_{49} \\ \Lambda_{51} & \Lambda_{52} & \Lambda_{53} & \Lambda_{54} & 0 & \Lambda_{56} & \Lambda_{57} & \Lambda_{58} & \Lambda_{59} \\ \Lambda_{61} & \Lambda_{62} & \Lambda_{63} & \Lambda_{64} & \Lambda_{65} & 0 & \Lambda_{67} & \Lambda_{68} & \Lambda_{69} \\ \Lambda_{71} & \Lambda_{72} & \Lambda_{73} & \Lambda_{74} & \Lambda_{75} & \Lambda_{76} & 0 & \Lambda_{78} & \Lambda_{79} \\ \Lambda_{81} & \Lambda_{82} & \Lambda_{83} & \Lambda_{84} & \Lambda_{85} & \Lambda_{86} & \Lambda_{87} & 0 & \Lambda_{89} \\ \Lambda_{91} & \Lambda_{92} & \Lambda_{93} & \Lambda_{94} & \Lambda_{95} & \Lambda_{96} & \Lambda_{97} & \Lambda_{98} & 0 \end{pmatrix}$$

trong đó, các thành phần của ma trận này thỏa mãn tính chất phản đối xứng $\Lambda_{ij} = -\Lambda_{ji}$.

Trên cơ sở của nhóm đối xứng này, chúng tôi chọn một bộ 8 nhóm con bất biến gồm $\{\mathrm{so}(2), \mathrm{so}(3), \ldots, \mathrm{so}(9)\}$ theo quy tắc: nhóm $\mathrm{so}(m)$ gồm các thành phần trong ma trận khối $m\times m$ góc trên bên trái của ma trận Λ, với biểu diễn tường minh như sau:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda_{12} & \Lambda_{13} & \cdots & \Lambda_{1m} \\ \Lambda_{21} & 0 & \Lambda_{23} & \cdots & \Lambda_{2m} \\ \Lambda_{31} & \Lambda_{32} & 0 & \cdots & \Lambda_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{m1} & \Lambda_{m2} & \Lambda_{m3} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Với cách chọn nhóm con như vậy, từ tính chất của ma trận Λ, có thể dễ dàng nhận thấy $X(m)$ là ma trận hoàn toàn phản đối xứng với các thành phần tạo thành nhóm kín thỏa mãn tính chất giao hoán (3) của đại số $SO(m)$.

Ứng với mỗi nhóm con $\mathrm{so}(m)$, toán tử $S^{(m)}$ được chúng tôi định nghĩa là toán tử Casimir bậc 2 của nhóm đối xứng $\mathrm{so}(m)$:

$$S^{(m)} = -\frac{1}{2} X(m)_{ij} X(m)_{ji} = \sum_{1\le i< j\le m} \Lambda_{ij}^2, \qquad m = 2,\ldots,9, \tag{5}$$

trong đó, các chỉ số i, j lặp lại được hiểu là lấy tổng từ 1 đến m. Vì là các toán tử Casimir của nhóm đối xứng, nên các toán tử này hoàn toàn thỏa mãn tính chất bất biến:

$$[S^{(m)}, H] = 0. \tag{6}$$

Ngoài ra, do cách chọn các nhóm con thỏa mãn $\mathrm{so}(2) \subset \mathrm{so}(3) \subset \ldots \mathrm{so}(9)$, nên các toán tử Casimir tương ứng của các nhóm này cũng hoàn toàn độc lập với nhau. Đặc biệt, toán tử Hamiltonian H do có vai trò như "hằng số" đối với các nhóm so kể trên, có thể xem như vi tử của nhóm $\mathrm{so}(1)$ là nhóm con bất biến của tất cả các nhóm này, nên H cũng độc lập với các toán tử $S^{(m)}$.

Giao hoán tử của các toán tử bình phương moment xung lượng được tính trực tiếp từ hệ thức giao hoán của nhóm $\mathrm{so}(9)$:

$$\begin{aligned}[\Lambda_{ij}^2, \Lambda_{mn}^2] = i\delta_{im}\{\Lambda_{ij}, \Lambda_{mn}, \Lambda_{jn}\} + i\delta_{jn}\{\Lambda_{ij}, \Lambda_{mn}, \Lambda_{im}\} \\ -i\delta_{in}\{\Lambda_{ij}, \Lambda_{mn}, \Lambda_{jm}\} - i\delta_{jm}\{\Lambda_{ij}, \Lambda_{mn}, \Lambda_{in}\},\end{aligned} \tag{7}$$

trong đó, kí hiệu $\{A, B\} = AB + BA$ là phản giao hoán tử và $\{A, B, C\} = \{A, \{B, C\}\}$. Tính toán trực tiếp từ các định nghĩa của các toán tử bất biến $S^{(m)}$ và sử dụng hệ thức (7), chúng tôi thu được kết quả:

$$[S^{(m)}, S^{(n)}] = 0, \qquad m, n = 2, \ldots, 9, \tag{8}$$

tức là các toán tử $S^{(m)}$ hoàn toàn tạo thành một bộ giao hoán với nhau.

Như vậy, nhóm 9 toán tử $\{H, S^{(2)}, S^{(3)}, \ldots, S^{(9)}\}$ tạo thành một bộ toán tử bất biến độc lập, giao hoán với nhau, cho phép chúng tôi kết luận bài toán MICZ-Kepler chín chiều có tính khả tích.

3.2. *Tính siêu khả tích tối đa*

Một cách khác để xây dựng bộ 8 nhóm con $\{\mathrm{so}(2), \mathrm{so}(3), ..., \mathrm{so}(9)\}$ là theo quy tắc: nhóm con $\mathrm{so}(m)$ gồm các thành phần trong ma trận khối $m \times m$ góc dưới bên phải của ma trận Λ, với biểu diễn tường minh như sau:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \Lambda_{10-m,7} & \Lambda_{10-m,8} & \Lambda_{10-m,9} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Lambda_{7,10-m} & \cdots & 0 & \Lambda_{78} & \Lambda_{79} \\ \Lambda_{8,10-m} & \cdots & \Lambda_{87} & 0 & \Lambda_{89} \\ \Lambda_{9,10-m} & \cdots & \Lambda_{97} & \Lambda_{98} & 0 \end{pmatrix}$$

Một cách tương tự như phần trước, chúng tôi cũng định nghĩa 8 toán tử bất biến là toán tử Casimir bậc 2 của 8 nhóm con này:

$$S_{(m)} = -\frac{1}{2} Y(m)_{ij} Y(m)_{ji} = \sum_{9-m<i<j\le 9} \Lambda_{ij}^2, \qquad m = 2, \ldots, 9. \tag{9}$$

Từ định nghĩa của các ma trận $X(m)$ và $Y(m)$, có thể dễ nhận ra hai ma trận $X(9)$ và $Y(9)$ trùng nhau (và trùng với ma trận Λ), do đó, $S^{(9)} \equiv S_{(9)} \equiv \Lambda^2$. Đối với hệ 7 toán tử còn lại $\{S_{(2)}, \ldots, S_{(8)}\}$, bằng các tính toán trực tiếp dựa trên định nghĩa của các toán tử này, chúng tôi nhận thấy các phương trình

$$S_{(m)} = aH + \sum_{j=2}^{9} b_j S^{(j)} + \sum_{\substack{j=2 \\ j\neq m}}^{8} c_j S_{(j)}, \qquad m = 2,\ldots,8, \tag{10}$$

đều không có nghiệm (a, b_j, c_j), tức là không thể biểu diễn một toán tử nào trong số bảy toán tử $\{S_{(2)},\ldots,S_{(8)}\}$ dưới dạng tổ hợp của các toán tử còn lại và bộ $\{H, S^{(m)}\}$. Từ đây, chúng tôi kết luận rằng bộ 16 toán tử $\{H, S^{(2)},\ldots,S^{(9)}, S_{(2)},\ldots,S_{(8)}\}$ độc lập với nhau. Ngoại trừ Hamiltonian H, các toán tử còn lại đều được tạo ra từ nhóm đối xứng $\mathrm{so}(9)$ đặc trưng cho đối xứng không gian của bài toán.

Toán tử cuối cùng được chúng tôi chọn để hoàn thiện bộ 17 toán tử bất biến độc lập là thành phần $A = M_1$ của vector Runge-Lenz, đặc trưng cho đối xứng ẩn của bài toán. Toán tử này cũng là toán tử bậc 2 giống như 16 toán tử trong bộ $\{H, S^{(2)},\ldots,S^{(9)}, S_{(2)},\ldots,S_{(8)}\}$. Toán tử A này được cấu tạo từ thành phần trong nhóm thương $\mathrm{so}(10)/\mathrm{so}(9)$ nên chắc chắn sẽ độc lập với bộ 16 toán tử đã nêu.

Như vậy, ngoài bộ 9 toán tử bậc 2 $\{H, S^{(2)},\ldots,S^{(9)}\}$ độc lập và giao hoán đã chỉ ra ở phần (3.1), chúng tôi đã xác định được thêm $k = 9 - 1 = 8$ toán tử bậc 2 độc lập khác gồm $\{S_{(2)},\ldots,S_{(8)}, A\}$. Chúng tôi kết luận rằng bài toán MICZ-Kepler chín chiều có tính siêu đối xứng tối đa bậc 2.

Chúng tôi cũng lưu ý rằng, cách chọn bộ 17 toán tử như trên không phải là duy nhất. Chẳng hạn, ta có thể chọn bộ 9 toán tử độc lập và giao hoán $\{X_1, X_2,\ldots,X_9\} = \{H, S_{(2)},\ldots,S_{(9)}\}$, cộng thêm 8 toán tử bất biến độc lập khác $\{Y_1, Y_2,\ldots,Y_8\} = \{A, S^{(2)},\ldots,S^{(8)}\}$, trong đó, A là một tổ hợp bất kì của 9 thành phần của vector Runge-Lenz.

4. Kết luận

Dựa trên tính chất đối xứng $SO(10)$ của bài toán MICZ-Kepler, chúng tôi đã chỉ ra một cách xây dựng tường minh bộ 9 toán tử bất biến độc lập và giao hoán, qua đó khẳng định bài toán này khả tích. Bên cạnh đó, chúng tôi cũng đã xây dựng tường minh một bộ 8 toán tử bất biến độc lập khác cho phép kết luận bài toán có tính chất siêu khả tích cực đại bậc 2. Đây là kết quả khẳng định thêm cho những nhận định trước đây của chúng tôi về khả năng có lời giải đại số và khả năng tách biến của bài toán theo nhiều hệ tọa độ khác nhau.

Ghi chú: *Công trình này là một phần trong Đề tài Khoa học và Công nghệ cấp Bộ của Bộ Giáo dục và Đào tạo, mã số B2015.19.13.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Ballesteros, A. *et al.* (2011), "Superintegrable Oscillator and Kepler Systems on Space of Nonconstant Curvature via the Stäckel Transform", *SIGMA* **7**, 048-15.
2. Fris, I., Mandrosov, V., Smorodinsky, J. A., Uhlír, M., & Winternitz, P. (1965), "On higher symmetries in quantum mechanics", *Phys. Lett.* **16**, 354–356.
3. Fris, I., Smorodinsky, J. A., Uhlír, M., & Winternitz, P. (1966), "Symmetry groups in classical and quantum mechanics", *Yad. Fiz.* **4**, 625-635.
4. Kalnins, E. G., Kress, J. M., & Miller Jr., W. (2006), "Second order superintegrable systems in conformally flat spaces. V. Two- and Three-dimensional quantum systems", *J. Math. Phys.* **47**, 093501.
5. Le, V. H., Nguyen, T. S., & Phan, N. H. (2009), "A hidden non-Abelian monopole in a 16-dimensional isotropic harmonic oscillator", *J. Phys. A* **42(17)**, 175204.
6. Phan, N. H. & Le, V. H. (2012), "Generalized Runge-Lenz vector and a hidden symmetry of the nine-dimensional MICZ-Kepler problem", *J. Math. Phys.* **53**, 082103.
7. Rodriguez, M. A. & Winternitz, P. (2002), "Quantum Superintegrability and Exact Solvability in N Dimensions", *J. Math. Phys.* **43 (3)**, 1309-1322.

*(Ngày Tòa soạn nhận được bài: 22-4-2016; ngày phản biện đánh giá: 11-6-2016;
ngày chấp nhận đăng: 13-9-2016)*