VỀ MỘT HỆ ELLIPTIC p- LAPLACE TRONG KHÔNG GIAN SOBOLEV CÓ TRỌNG

Trần Minh Thuyết[*], Lê Khánh Luận[†], Võ Giang Giai[‡]

1. Giới thiệu

Trong bài này, chúng tôi xét bài toán biên phi tuyến cho hệ phương trình elliptic p -Laplace sau :

$$\frac{-1}{r^{\gamma}}\frac{d}{dr}\left(r^{\gamma}\left|u_i'(r)\right|^{p-2}u_i'(r)\right)+\left|u_i(r)\right|^{p-2}u_i(r)=f_i\left(r,u_1(r),u_2(r)\right),\ 0<r<1, \qquad (1.1)$$

$$\left|u_i'(1)\right|^{p-2}u_i'(1)+h_iu_i(1)=g_i, \qquad (1.2)$$

$$\left|\lim_{r\to 0_+} r^{\gamma/p}u_i'(r)\right|<+\infty,\ (i=1,\ 2), \qquad (1.3)$$

trong đó $\gamma=N-1,\ \ p\geq 2,\ \ h_1>0,\ h_2>0,\ \ g_1,\ g_2$ là các hằng số cho trước và $f_1,\ f_2$ là các hàm cho trước thỏa các điều kiện nào đó mà ta sẽ chỉ rõ sau. Trường hợp cho một phương trình tương tự như trên đã có nhiều nhà Toán học quan tâm nghiên cứu, chẳng hạn như : Nghĩa, Long [10] ; Long, Dũng, Thuyết [3] ; Long, Dũng, Nghĩa, Thuyết [4], Long, Ortiz, Định [6,7], Long, Lãng [8].

Chú ý rằng nếu đặt $v_i(x)=u_i\left(|x|\right)=u_i(r)$, là hàm chỉ phụ thuộc vào $r=|x|=\left(\sum_{i=1}^{N}x_i^2\right)^{1/2}$, thì nghiệm của bài toán (1.1)-(1.2) chính là nghiệm radial của bài toán biên phi tuyến cho hệ phương trình elliptic p-Laplace như sau :

$$-\Delta_p v_i+\left|v_i\right|^{p-2}v_i=f_i(|x|,v_1,v_2),\ \text{trong } \Omega_1, \qquad (1.4)$$

$$\left|\nabla v_i\right|^{p-2}\frac{\partial v_i}{\partial \nu}+h_iv_i=g_i,\ \text{trên } \partial\Omega_1,\ (i = 1,\ 2), \qquad (1.5)$$

---

[*] TS, Trường Đại học Kinh tế TP. HCM

[†] ThS, Trường Đại học Kinh tế TP. HCM

[‡] ThS, Cộng tác viên bộ môn Toán Cao cấp, Trường Đại học KHTN TP. HCM.

trong ño $\Omega_1 = \{x \in \mathbb{R}^N : |x| < 1\}$, $\Delta_p v = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla v|^{p-2} \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)$, $|\nabla v|^2 = \left(\sum_{i=1}^{N}\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^2\right)^{1/2}$,

ν la phap tuyen ñôn vò höông ra ngoai bien $\partial\Omega_1$, $\gamma = N-1$, $p \geq 2$, $h_1 > 0$, $h_2 > 0$, g_1, g_2 la cac hang so cho tröôc va f_1, f_2 la cac ham cho tröôc thoa cac ñieu kien nao ño ma ta se chæ ra sau.

Trong [2], D. Huang, Y. Li, xet he phöông trình elliptic p-Laplace sau

$$-\Delta_p u + |u|^{p-2} u = F_u(|x|, u, v), \text{ trong } \mathbb{R}^N, \tag{1.6}$$

$$-\Delta_p v + |v|^{p-2} v = -F_v(|x|, u, v), \text{ trong } \mathbb{R}^N, \tag{1.7}$$

$$u, v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N), \tag{1.8}$$

trong ño

$$F_u(|x|, u, v) = \frac{\partial F}{\partial u}(|x|, u, v),\ F_v(|x|, u, v) = \frac{\partial F}{\partial v}(|x|, u, v),$$

vôi $F \in C^1\left([0, +\infty) \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R}\right)$ $1 < p < N$, cho tröôc. Vôi mot so ñieu kien ñat ra cho N, p, F, cac tac gia D. Huang, Y. Li, chöng minh bai toan (1.6)-(1.8) co vo so nghiem radial (u, v), nghóa la nghiem $(u(x), v(x))$ chæ phu thuoc vao $r = |x|$.

Trong bai nay, tröôc tien chung toi thiet lap mot so khong gian Sobolev co trong cu the cung vôi cac tính chat cua chung. Ô [3], chung toi chöng minh ñònh lí ton tai va duy nhat nghiem yeu cua bai toan (1.1)-(1.3) trong cac khong gian ham Sobolev co trong thích hôp. Trong chöng minh co söû dung phöông phap xap xæ Galerkin ket hôp vôi phöông phap compact va ñôn ñieu. Ô [4], chung toi cung nghien cöu dang ñieu tiem can cua nghiem $(u_1(h_1, h_2), u_2(h_1, h_2))$ phu thuoc vao (h_1, h_2) khi $h_1 \to 0_+$, $h_2 \to 0_+$. Cac ket qua thu ñöôc ô ñay ña tong quat hoa töông ñoi cac ket qua trong [2-4], [6-8], [10].

2. Khong gian Sobolev co trong

Ñat $\Omega = (0,1)$, chung ta bo qua cac ñònh nghóa ve khong gian ham thong dung nhö $C^m(\overline{\Omega})$, $L^p(\Omega)$, $H^m(\Omega)$, $W^{m,p}(\Omega)$. Ta kí hieu $L^p_\gamma(\Omega) = L^p_\gamma$ la tap hôp cac ham u xac ñònh va ño ñöôc tren Ω sao cho

$$\|u\|_{p,\gamma} < +\infty, \tag{2.1}$$

trong ño

$$\|u\|_{p,\gamma} = \begin{cases} \left(\int_0^1 x^\gamma |u(x)|^p dx \right)^{1/p}, & \text{neu } 1 \le p < +\infty, \\ \underset{0<x<1}{ess\sup} |u(x)|, & \text{neu } p = +\infty. \end{cases}$$

Ta ñong nhat tren L_γ^p cac ham bang nhau hau het tren Ω. Cac phan tö cua L_γ^p la cac lôp töông ñöông cac ham ño ñöôc thoa man (2.1), hai ham la töông ñöông neu chung bang nhau hau het tren Ω. Khi ño L_γ^p la khong gian Banach vôi chuan $\|\cdot\|_{p,\gamma}$. Trong tröông hôp rieng, L_γ^2 la khong gian Hilbert ñoi vôi tích vo höông va chuan töông öng nhö sau :

$$\langle u, v\rangle = \int_0^1 x^\gamma u(x) v(x) dx, \qquad \|u\|_{2,\gamma} = \sqrt{\langle u, u\rangle}.$$

Ta kí hieu $W_\gamma^{1,p}(\Omega) = W_\gamma^{1,p} = \{v \in L_\gamma^p : v' \in L_\gamma^p\}$, vôi ñao ham ñöôc hieu theo nghóa phan bo. Hôn nöa, ta co $W_\gamma^{1,p}$ la khong gian Banach vôi chuan

$$\|u\|_{1,p,\gamma} = \begin{cases} \left(\|u\|_{p,\gamma}^p + \|u'\|_{p,\gamma}^p \right)^{1/p}, & 1 \le p < +\infty, \\ \max\left\{ \|u\|_{\infty,\gamma}, \ \|u'\|_{\infty,\gamma} \right\}, & p = +\infty. \end{cases}$$

Chu y rang ta co the ñònh nghóa $W_\gamma^{1,p}$ nhö la sö ñay ñu hoa cua khong gian $C^1(\overline{\Omega})$ ñoi vôi chuan $\|\cdot\|_{1,p,\gamma}$. Cac bat ñang thöc ve phep nhung sau ñay se ñöôc sö dung trong cac phan sau

Bo ñe 1. Cho $\gamma > 0,\ p > 1,\ u \in C^1(\overline{\Omega}),$ ta co

(i) $\|u\|_{p,\gamma}^p \le |u(1)|^p + K_1 \|u'\|_{p,\gamma}^p$,

(ii) $|u(1)| \le K_2 \|u\|_{1,p,\gamma}$,

(iii) $r^{\gamma/p} |u(r)| \le K_3 \|u\|_{1,p,\gamma}, \ \forall r \in \overline{\Omega},$

(iv) $\|u\|_{2,\gamma}^2 \le K_4 \|u\|_{1,p,\gamma} \left(|u(1)|^p + \|u'\|_{p,\gamma}^p \right)^{1/p}$, neáu $p \ge 2 - \dfrac{1}{\gamma}$,

(v) $\dfrac{1}{(1+K_1)^{1/p}} \|u\|_{1,p,\gamma} \le \left(|u(1)|^p + \|u'\|_{p,\gamma}^p \right)^{1/p} \le \left(1 + K_2^p\right)^{1/p} \|u\|_{1,p,\gamma}$,

trong ñoù

$$K_1 = \left(\frac{p-1}{\gamma} \right)^{p-1}, \quad K_2 = (\gamma + p)^{p-1},$$

$$K_3 = \max\left\{ \sqrt[p]{2},\ \sqrt[p]{\gamma + 2p - 1} \right\}, \quad K_4 = K_3 \left(\frac{2^{p-1}}{1 + (p-1)\gamma} \right)^{p-1}.$$

Boå ñeà 2. Pheùp nhuùng $W_\gamma^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L_\gamma^2(\Omega)$ laø lieân tuïc neáu $p > 1,\ p \ge 2 - 1/\gamma$, vaø compact neáu $p \ge 2$.

Chöùng minh cuûa caùc boå ñeà 1 vaø 2 coù theå tìm thaáy ôû [5].

Chuù thích 1. Ta chuù yù raèng :

$$\lim_{r \to 0_+} r^{\gamma/p} u(r) = 0, \text{ vôùi moïi } u \in W_\gamma^{1,p}(\Omega). \tag{2.2}$$

(Xem [1], boå ñeà 5.40, trang 128). Maët khaùc, do $W^{1,p}(\varepsilon,1) \hookrightarrow C([\varepsilon,1])$ vaø

$$\varepsilon^{\gamma/p} \|u\|_{W^{1,p}(\varepsilon,1)} \le \|u\|_{1,p,\gamma}, \text{ vôùi moïi } u \in W_\gamma^{1,p}(\Omega), \text{ vôùi moïi } 0 < \varepsilon < 1,$$

ta suy ra raèng :

$$u\big|_{[\varepsilon,1]} \in C([\varepsilon,1]), \text{ vôùi moïi } u \in W_\gamma^{1,p}(\Omega), \text{ vôùi moïi } 0 < \varepsilon < 1. \tag{2.3}$$

Töø (2.2) vaø (2.3) ta suy ra

$$r^{\gamma/p} u(r) \in C(\overline{\Omega}), \text{ vôùi moïi } u \in W_\gamma^{1,p}(\Omega). \tag{2.4}$$

Ta ñaët $H = L_\gamma^2(\Omega)$, $V = W_\gamma^{1,p}(\Omega)$. Töø keát quaû cuûa boå ñeà 2 vôùi $p > 1,\ p \ge 2 - 1/\gamma,\ V$ ñöôïc nhuùng lieân tuïc trong H. Hôn nöõa V truø maät trong H, vì $C^1(\overline{\Omega})$ truø maät trong H, ñoàng nhaát H vôùi H' (ñoái ngaãu cuûa H), ta coù $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$.

3. Ñònh lí toàn taïi vaø duy nhaát nghieäm

Cho $i = 1,2,$ vaø $p \ge 2$. Ñaët $p' = \dfrac{p}{p-1}$.

Ta thành lập các giả thiết sau :

(H_1) $f_i : \Omega\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện Caratheodory, nghĩa là

(i) $f_i(\cdot, y, z)$ đo được trên Ω; $\forall y, z\in\mathbb{R}$,

(ii) $f_i(r,\cdot,\cdot)$ liên tục trên $\mathbb{R}^2$, a.e. $r\in\Omega$,

(H_2) Tồn tại các hằng số $a, b>0,\ 0<p_1,\ p_2<p$ và hàm $q\in L^1_\gamma$ sao cho

$$yf_1(r,y,z)+zf_2(r,y,z)\le a|y|^{p_1}+b|z|^{p_2},\ \forall y,z\in\mathbb{R},\ \text{a.e. } r\in\Omega,$$

(H_3) Tồn tại các hằng số $a_i,\ b_i>0,$ và các hàm $q_i\in L^{p'}_\gamma$ sao cho

$$|f_i(r,y,z)|\le a_i|y|^{p-1}+b_i|z|^{p-1}+|q_i(r)|,\ \forall y,z\in\mathbb{R},\ \text{a.e. } r\in\Omega.$$

Nghiệm của bài toán (1.3) và (1.4) được thành lập từ phương trình biến phân sau này :

Tìm $(u_1,u_2)\in V\times V$ sao cho

$$\langle A(u_i'),v'\rangle+\langle A(u_i),v\rangle+h_i u_i(1)v(1)=\langle f_i(r,u_1,u_2),v\rangle+g_i v(1),\ \forall v\in V, \quad (3.1)$$

trong đó $A(x)=|x|^{p-2}x,\ x\in\mathbb{R}$.

Chú thích 2. Do (2.4), các số hạng $u_1(1),\ u_2(1)$ xuất hiện trong (3.1) được xác định với mọi $v\in V$. Ta nhận được (3.1) bằng cách nhân hình thức hai vế (1.3) với $r^\gamma v$, $v\in V$, và sau đó lấy tích phân từng phần kết hợp với việc sử dụng các điều kiện (1.4) và (2.2).

Khi đó ta có định lí sau này :

Định lí 1. Giả sử $h_1>0,\ h_2>0,\ g_1, g_2\in\mathbb{R}$ và $(H_1)-(H_3)$ được thỏa. Khi đó bài toán biến phân (3.1) có nghiệm $(u_1,u_2)\in V\times V$. Hơn nữa, nếu $f_1,\ f_2$ thỏa

(H_4) Tồn tại các hằng số $a_3,\ b_3\le 2^{2-p}$, sao cho

$$\left(f_1(r,y,z)-f_1(r,y_1,z_1)\right)(y-y_1)+\left(f_2(r,y,z)-f_2(r,y_1,z_1)\right)(z-z_1)$$
$$\le a_3|y-y_1|^p+b_3|z-z_1|^p,$$

$\forall y, y_1, z, z_1\in\mathbb{R}$, a.e. $r\in\Omega$,

thì bài toán biến phân (3.1) có nghiệm (u_1,u_2) duy nhất.

Chứng minh. Ta tiến hành qua một số bước nhỏ sau :

a. Xấp xỉ Galerkin. Do V là không gian Banach khả li nên tồn tại một cơ sở đếm được $w_1, w_2, \ldots$ trong V. Ta tìm $u_i^{(m)}$ dưới dạng

$$u_i^{(m)} = \sum_{j=1}^{m} c_{mj}^{(i)} w_j, \ (i = 1,\ 2) \tag{3.2}$$

va thoa he phöông trình phi tuyen sau :

$$\begin{aligned} &\langle A(u_i^{(m)\prime}), w_j' \rangle + \langle A(u_i^{(m)}), w_j \rangle + h_i u_i^{(m)}(1) w_j(1) \\ &\quad = \langle f_i \ (r, u_1^{(m)}, u_2^{(m)}), w_j \rangle + g_i w_j(1), \quad 1 \le j \le m. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Nhö vay cac he so $c_{mj}^{(i)}$ cua $u_i^{(m)}$ thoa he phöông trình phi tuyen

$$P(e_m) = \left(Q_1(e_m),\ Q_2(e_m)\right) = 0, \tag{3.4}$$

trong ño

$$c_m^{(i)} = \left(c_{m1}^{(i)}, \ldots, c_{mm}^{(i)}\right), \ Q_i\ (e_m) = \left(R_1^{(i)}(e_m), \ldots, R_m^{(i)}(e_m)\right),$$

$$\begin{aligned} R_j^{(i)}(e_m) &= \langle A(u_i^{(m)/}), w_j^/ \rangle + \langle A(u_i^{(m)}), w_j \rangle + h_i u_i^{(m)}(1) w_j(1) \\ &\quad - \langle f_i \ (r, u_1^{(m)}, u_2^{(m)}), w_j \rangle - g_i w_j(1), \quad i = 1, 2, \ 1 \le j \le m. \end{aligned}$$

Ñe chöùng minh söï ton tai nghiem cua he (3.3), chung ta nhô ñen bo ñe sau nay :

Bo ñe 3. Cho $P: \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^{2m}$ la anh xa lien tuc. Gia sö ton tai hang so $\rho > 0$, sao cho

$$\langle P(e), e \rangle_{\mathbb{R}^{2m}} \ge 0, \ \ \forall e \in \mathbb{R}^{2m}, \ \ \|e\|_{\mathbb{R}^{2m}} = \rho. \tag{3.5}$$

thì ton tai $\tilde{e} \in \mathbb{R}^{2m}$, $\|\tilde{e}\|_{\mathbb{R}^{2m}} \le \rho$ sao cho $P(\tilde{e}) = 0$,

trong ño

$$c = (c_1, \ldots, c_m), \ d = (d_1, \ldots, d_m) \in \mathbb{R}^m, \ \tilde{c} = (\tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_m), \ \tilde{d} = (\tilde{d}_1, \ldots, \tilde{d}_m) \in \mathbb{R}^m,$$

$$e = (c, d), \ \ \tilde{e} = (\tilde{c}, \tilde{d}), \ \langle e, \tilde{e} \rangle_{\mathbb{R}^{2m}} = \langle c, \tilde{c} \rangle_{\mathbb{R}^m} + \langle d, \tilde{d} \rangle_{\mathbb{R}^m}, \ \|e\|_{\mathbb{R}^{2m}} = \sqrt{\|c\|_{\mathbb{R}^m}^2 + \|d\|_{\mathbb{R}^m}^2}.$$

Ta nghiem lai anh xa P thoa cac gia thiet cua bo ñe 3.

(j) Ta chöùng minh de dang rang $P: \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^{2m}$ la anh xa lien tuc

(jj) Ta nghiem lai ñieu kien (3.5) ñung vôi mot so döông ρ nao ño. That vay, ta co :

$$\langle P(e_m), e_m \rangle_{\mathbb{R}^{2m}} = \langle Q_1(e_m), c_m^{(1)} \rangle_{\mathbb{R}^{2m}} + \langle Q_2(e_m), c_m^{(2)} \rangle_{\mathbb{R}^{2m}}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^1 r^{\gamma}\Big[\, \big|u_1^{(m)/}(r)\big|^p + \big|u_2^{(m)/}(r)\big|^p \,\Big] dr \\
&\qquad + h_1\big|u_1^{(m)}(1)\big|^2 + h_2\big|u_2^{(m)}(1)\big|^2 - g_1 u_1^{(m)}(1) - g_2 u_2^{(m)}(1) \\
&\qquad + \int_0^1 r^{\gamma}\Big[\, \big|u_1^{(m)}(r)\big|^p + \big|u_2^{(m)}(r)\big|^p \,\Big] dr \\
&+ \int_0^1 r^{\gamma}\Big[\, f_1\big(r, u_1^{(m)}(r), u_2^{(m)}(r)\big) u_1^{(m)}(r) + f_2\big(r, u_1^{(m)}(r), u_2^{(m)}(r)\big) u_2^{(m)}(r) \,\Big] dr.
\end{aligned}
$$

Töø giaû thieát (H_2) vaø Boå ñeà 1, ii, ta suy ra raèng :

$$
\langle P(e_m), e_m \rangle_{IR^{2m}} \geq \frac{1}{4}\big\|u_1^{(m)}\big\|_{1,p,\gamma}^p + \frac{1}{4}\big\|u_2^{(m)}\big\|_{1,p,\gamma}^p - \frac{1}{4}C_1, \tag{3.6}
$$

trong ñoù C_1 laø haèng soá chung ñoäc laäp vôùi m, h_1, h_2. Maët khaùc, trong $\mathbb{R}^m$ caùc chuaån $\big\|u_1^{(m)}\big\|_{1,p,\gamma}$, $\big\|u_2^{(m)}\big\|_{1,p,\gamma}$, $\big\|c_m^{(1)}\big\|_{IR^m}$, $\big\|c_m^{(2)}\big\|_{IR^m}$ laø töông ñöông nhau neân toàn taïi $a_m > 0$, sao cho

$$
\big\|u_i^{(m)}\big\|_{1,p,\gamma}^p \geq 4a_m \big\|c_m^{(i)}\big\|_{IR^m}^p, \ \text{(i= 1, 2)} \tag{3.7}
$$

Töø (3.6) vaø (3.7) suy ra raèng :

$$
\begin{aligned}
\langle P(e_m), e_m \rangle_{\mathbb{R}^{2m}} &\geq a_m\Big(\big\|c_m^{(1)}\big\|_{\mathbb{R}^m}^p + \big\|c_m^{(2)}\big\|_{\mathbb{R}^m}^p \Big) - \frac{1}{4}C_1 \\
&\geq 2^{1-\frac{p}{2}} \big\|e_m\big\|_{\mathbb{R}^{2m}}^p - \frac{1}{4}C_1.
\end{aligned} \tag{3.8}
$$

Töø (3.8) deã daøng suy ra ñöôïc raèng heä (3.3) coù nghieäm.

b. Ñaùnh giaù tieân nghieäm. Töø (3.6) suy ra raèng :

$$
\big\|u_i^{(m)}\big\|_{1,p,\gamma} \leq \sqrt[p]{C_1} = C_2, \ \ (i = 1,\ 2). \tag{3.9}
$$

Ta suy ra töø (3.9) raèng :

$$
\Big\| r^{\gamma/p'} A\big(u_i^{(m)\prime}\big) \Big\|_{L^{p'}} = \left(\int_0^1 r^{\gamma} \big|u_i^{(m)\prime}(r)\big|^p \, dr \right)^{1/p'} \leq C_3, \tag{3.10}
$$

$$
\Big\| r^{\gamma/p'} A\big(u_i^{(m)}\big) \Big\|_{L^{p'}} \leq C_3, \tag{3.11}
$$

$$
\begin{aligned}
\left| r^{\gamma/p'} f_i\left(r, u_1^{(m)}, u_2^{(m)}\right)\right| &\le a_i r^{\gamma/p'} \left| u_1^{(m)}(r)\right|^{p-1} + b_i r^{\gamma/p'} \left| u_2^{(m)}(r)\right|^{p-1} + r^{\gamma/p'} \left| q_i(r)\right| \\
&= a_i \left(r^{\gamma} \left| u_1^{(m)}(r)\right|^{p}\right)^{1/p'} + b_i \left(r^{\gamma} \left| u_2^{(m)}(r)\right|^{p}\right)^{1/p'} + r^{\gamma/p'} \left| q_i(r)\right| \\
&\le C_4 \left(\left\| u_1^{(m)}\right\|_{1,p,\gamma}^{p/p'} + \left\| u_2^{(m)}\right\|_{1,p,\gamma}^{p/p'}\right) + r^{\gamma/p'} \left| q_i(r)\right| \\
&\le C_5 + r^{\gamma/p'} \left| q_i(r)\right|, \qquad \text{a.e. } r \in \Omega,
\end{aligned}
$$

(3.12)

trong ño C_2, C_3, C_4, C_5 la cac hang so döông ñoc lap vôi m, h_1, h_2.

c. Qua giôi han. Tö (3.9), (3.10) va bo ñe 2 suy ra rang co mot day con cua day $\{(u_1^{(m)}, u_2^{(m)})\}$ van kí hieu la $\{(u_1^{(m)}, u_2^{(m)})\}$ sao cho

$$u_i^{(m)} \to u_i \text{ trong } V, \tag{3.13}$$

$$u_i^{(m)} \to u_i \text{ trong } H \text{ manh va a.e trong } \Omega, \tag{3.14}$$

$$u_i^{(m)\prime} \to u_i' \text{ trong } L_\gamma^p \text{ yeu}, \tag{3.15}$$

$$r^{\gamma/p'} A\left(u_i^{(m)\prime}\right) \to \chi_i \text{ trong } L^{p'} \text{ yeu}, \tag{3.16}$$

vôi $i = 1, 2$. Hôn nöa, do phep nhung $W^{1,p}(\varepsilon,1)\ C([\varepsilon,1])\ (0 < \varepsilon < 1)$, la compact, va tö ñanh gia $\varepsilon^{\gamma/p} \left\| u_i^{(m)}\right\|_{W^{1,p}(\varepsilon,1)} \le \left\| u_i^{(m)}\right\|_{1,p,\gamma} \le C_2$, suy ra co mot day con cua $\{u_i^{(m)}\}$, van kí hieu la $\{u_i^{(m)}\}$, sao cho

$$u_i^{(m)}\Big|_{[\varepsilon,1]} \to u_i\Big|_{[\varepsilon,1]} \text{ trong } C([\varepsilon,1]) \text{ manh} \tag{3.17}$$

Mat khac, tö (H_1), (3.1), (3.12) suy ra rang :

$$r^{\gamma/p'} f_i\left(r, u_1^{(m)}, u_2^{(m)}\right) \to r^{\gamma/p'} f_i\left(r, u_1, u_2\right) \text{ trong } L^{p'} \text{ manh}, \tag{3.18}$$

$$r^{\gamma/p'} A(u_i^{(m)}) \to r^{\gamma/p'} A(u_i) \text{ trong } L^{p'} \text{ yeu}. \tag{3.19}$$

Qua giôi han trong (3.3) ta co

$$\int_0^1 \chi_i r^{\gamma/p} v'(r)dr + h_i u_i(1)v(1) + \int_0^1 r^{\gamma} A\left(u_i^{(m)}(r)\right)v(r)dr$$
$$= \int_0^1 r^{\gamma} f_i \left(r, u_1(r), u_2(r)\right)v(r)dr + g_i v(1), \forall v \in V.$$

Sö dung phöông phap ñôn ñieu nhö trong [3,4], ta co the chöng minh rang

$$\chi_i = r^{\gamma/p'} A(u_i'). \tag{3.20}$$

Sö ton tai nghiem cua bai toan bien phan (3.1) ñöôc chöng minh.

d. Tính duy nhat. Gia sö $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in V \times V$ la hai nghiem cua bai toan bien phan (3.1), khi ño

$$\langle A(u_i') - A(v_i'), w' \rangle + \langle A(u_i) - A(v_i), w \rangle + h_i \left(u_i(1) - v_i(1)\right)w(1)$$
$$= \langle f_i(r, u_1, u_2) - f_i(r, v_1, v_2), w \rangle, \ \forall w \in V.$$

Do ño

$$2^{2-p}\| u_1' - v_1' \|_{p,\gamma}^p + 2^{2-p}\| u_2' - v_2' \|_{p,\gamma}^p$$
$$+ (2^{2-p} - a_3)\| u_1 - v_1 \|_{p,\gamma}^p + (2^{2-p} - b_3)\| u_2 - v_2 \|_{p,\gamma}^p$$
$$+ h_1 \left| u_1(1) - v_1(1) \right|^2 + h_2 \left| u_2(1) - v_2(1) \right|^2 \le 0. \tag{3.21}$$

Vay $u_1 = v_1, \ u_2 = v_2$.

Chu thích 3. Ñònh lí 1 van con ñung neu gia thiet (H_2) ñöôc thay the bôi mot trong cac gia thiet sau ñay

(H_2') Ton tai cac hang so $a, b < 1$ va ham $q \in L_\gamma^1$ sao cho

$$yf_1(r, y, z) + zf_2(r, y, z) \le a|y|^p + b|z|^p + |q(r)|, \ \forall y, z \in \mathbb{R}, \text{ a.e. } r \in \Omega.$$

(H_2'') Ton tai cac hang so $a < 1, \ b > 0, \ 0 < p_1 < p$ va ham $q \in L_\gamma^1$ sao cho

$$yf_1(r, y, z) + zf_2(r, y, z) \le a|y|^p + b|z|^{p_1} + |q(r)|, \ \forall y, z \in \mathbb{R}, \text{ a.e. } r \in \Omega.$$

(H_2''') Ton tai cac hang so $a > 0, \ b < 1, \ 0 < p_1 < p$ va ham $q \in L_\gamma^1$ sao cho

$$yf_1(r, y, z) + zf_2(r, y, z) \le a|y|^{p_1} + b|z|^p + |q(r)|, \ \forall y, z \in \mathbb{R}, \text{ a.e. } r \in \Omega.$$

Chu thích 4. Tööng öng vôi $p = 2, \gamma = 1$, cac tac gia trong [6, 7] ña chöng minh phöông trình vi phan Bessel phi tuyen $\frac{-1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\,u'(x)\right) + u^2 - u = 0,\ 0 < x < +\infty$, lien ket vôi ñieu kien bien $u(0) = 1,\ \lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = 0$, co ít nhat mot nghiem. Mot trong so cac nghiem ô tren ñöôc thiet lap tö bai toan bien $\frac{-1}{x}\frac{d}{dx}\left(x\,u'(x)\right) + u^2 - u = 0,\ a < x < b$, lien ket vôi ñieu kien bien $u(a) = 1,\ u(b) = 0$, trong ño, $x_i < a < b < x_{i+1}$ va $x_i,\ x_{i+1}$ la hai zero lien tiep cua ham Bessel $J_0(x)$.

IV. DANG ÑIEU TIEM CAN CUA NGHIEM KHI $h_1 \to 0_+,\ h_2 \to 0_+$.

Trong phan nay, gia sö rang $(H_1)-(H_3)$ la ñung. Do ñònh lí 1 bai toan bien phan (3.1) tööng öng vôi cap so thöc $(h_1, h_2),\ h_1 > 0,\ h_2 > 0$, co nghiem duy nhat (u_1, u_2) phu thuoc vao (h_1, h_2) nhö sau $u_1 = u_1(h_1, h_2),\ u_2 = u_2(h_1, h_2)$. Ta se nghien cöu dang ñieu tiem can cua nghiem $\left(u_1(h_1, h_2),\ u_2(h_1, h_2)\right)$ khi $h_1 \to 0_+,\ h_2 \to 0_+$.

Ta bo sung them sau ñay mot gia thiet ve ham $f_1,\ f_2$.

(H_4') Ton tai cac hang so $a_3,\ b_3 < 2^{2-p}$, sao cho

$$\left(f_1(r,y,z) - f_1(r,y_1,z_1)\right)(y-y_1) + \left(f_2(r,y,z) - f_2(r,y_1,z_1)\right)(z-z_1) \le a_3|y-y_1|^p + b_3|z-z_1|^p,$$

$\forall y, y_1, z, z_1 \in \mathbb{R}$, a.e. $r \in \Omega$.

Ñònh lí 2. Gia sö co cac gia thiet $(H_1)-(H_3)$ va (H_4') ñung. Khi ño :

(i) Bai toan bien phan (3.1) tööng öng vôi $h_1 = h_2 = 0$ co nghiem duy nhat $\left(u_1^{(0)}, u_2^{(0)}\right) \in V \times V$.

(ii) $\left\|u_1(h_1,h_2) - u_1^{(0)}\right\|_V + \left\|u_2(h_1,h_2) - u_2^{(0)}\right\|_V \le C\left(\sqrt{h_1^2 + h_2^2}\right)^{1/(p-1)},\ \forall h_1 > 0,\ \forall h_2 > 0,$

trong ño C la hang so döông ñoc lap vôi $h_1,\ h_2$.

Ñònh lí 3. Gia sö co cac gia thiet $(H_1)-(H_3)$ ñung. Ta gia sö them rang.

(H_4'') Ton tai cac hang so $a_3,\ b_3 < 2^{2-p}$, sao cho

$$\begin{cases} \left(f_1(r,y,z) - f_1(r,y_1,z_1) \right)(y-y_1) \le a_3 |y-y_1|^p, \\ \left(f_2(r,y,z) - f_1(r,y_1,z_1) \right)(y-y_1) \le b_3 |z-z_1|^p, \end{cases}$$

$\forall y, y_1, z, z_1 \in \mathbb{R}$, a.e. $r \in \Omega$.

Khi ñoi

(i) Nếu $0 < h_1 < \tilde{h}_1,\ \ 0 < h_2 < \tilde{h}_2$ thì

(j) $\left| u_1(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2)(1) \right| \le \left| u_1(h_1, h_2)(1) \right|$,

(jj) $\left| u_2(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2)(1) \right| \le \left| u_2(h_1, h_2)(1) \right|$,

(jjj) $\left| u_1(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2)(1) \right|^2 + \left| u_2(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2)(1) \right|^2 \le \left| u_1(h_1, h_2)(1) \right|^2 + \left| u_2(h_1, h_2)(1) \right|^2$.

(ii) $\sup\limits_{h_1>0,\ h_2>0} \left(\left| u_1(h_1, h_2)(1) \right|^2 + \left| u_2(h_1, h_2)(1) \right|^2 \right) = \left| u_1^{(0)}(1) \right|^2 + \left| u_2^{(0)}(1) \right|^2$.

Chöing minh. Chöing minh ñònh lí 1, 2 töông töi nhö trong [4] nein chuing toii boi qua.

TAI LIEU THAM KHAO

[1]. R.A. Adams (1975), Sobolev Spaces, Academic press, New York.

[2]. Daiwen Huang, Yongqing Li (2005), Multiplicity of solutions for a noncooperative p-Laplacian elliptic system in $\mathbb{R}^N$, J. Differential Equations, **215**, 206 – 223

[3]. Nguyein Thanh Long, Buii Tiein Duing, Train Minh Thuyeit (2000), On a nonlinear boundary value problem for a nonlinear ordinary differential operator in weighted Sobolev spaces, Z. Anal. Anw. **19**, No.4, 1035-1046.

[4]. Nguyein Thanh Long, Buii Tiein Duing, Nguyein Hoii Nghóa, Train Minh Thuyeit (2001), On a nonlinear boundary value problem with a mixed nonhomogeneous condition: Asymptotic behavior of a solution, Demonstratio Math. **34**, No.3, 609-618.

[5]. Nguyein Thanh Long, Alain Phaim Ngoic Ñònh (1995), Periodic solutions of a nonlinear parabolic equation associated with the penetration of a magnetic field into subtance, Computers Math. Applic. **30**, No.1, 63-78.

[6]. Nguyen Thanh Long, E.L. Ortiz, Alain Pham Ngoc Ñònh (1995), On the existence of a solution of a boundary value problem for a nonlinear Bessel equation on an unbounded interval, Proc. Royal Irish Acad. **95 A**, No.2, 237-247.

[7]. Nguyen Thanh Long, E.L. Ortiz, Alain Pham Ngoc Ñònh (1996), A nonlinear Bessel differential equation associated with Cauchy conditions, Computers Math. Applic. **31**, No.10, 131-139.

[8]. Nguyen Thanh Long, Tran Van Lang (1996), The problem of buckling of a nonlinearli bar immersed in a fluid, Vietnam J. Math. **24**, No.2, 131-142.

[9]. J. L. Lions (1969), Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non-lineaires, Dunod-Gauthier-Villars, Paris.

[10]. Nguyen Hoi Nghóa, Nguyen Thanh Long (1998), On a nonlinear boundary value problem with a mixed nonhomogeneous condition, Vietnam J. Math. **26**, No.4, 301-309.

Tom tat

Ve mot he elliptic p- Laplace trong khong gian Sobolev co trong

Chung toi nghien cöu bai toan bien phi tuyen sau

$$\frac{-1}{r^{\gamma}}\frac{d}{dr}\left(r^{\gamma}\left|u_i'(r)\right|^{p-2}u_i'(r)\right)+\left|u_i(r)\right|^{p-2}u_i(r)=f_i\left(r,u_1(r),u_2(r)\right),\ 0<r<1, \tag{1}$$

$$\left|u_i'(1)\right|^{p-2}u_i'(1)+h_iu_i(1)=g_i, \tag{2}$$

$$\left|\lim_{r\to 0_+} r^{\gamma/p}u_i'(r)\right|<+\infty,\ (i=1,\ 2), \tag{3}$$

trong ño $\gamma=N-1,\ \ p\geq 2,\ \ h_1>0,\ h_2>0,\ \ g_1,\ g_2$ la cac hang so cho tröôc va $f_1,\ f_2$ la cac ham cho tröôc. Trong bai nay, chung toi dung phöông phap Galerkin va compact trong cac khong gian Sobolev co trong thích hôp ñe chöng minh sö ton tai va duy nhat nghiem (u_1,u_2) cua bai toan (1)-(3). Sau ño, Chung toi cung nghien cöu dang ñieu tiem can cua nghiem $\left(u_1(h_1,h_2),\ u_2(h_1,h_2)\right)$ phu thuoc vao (h_1,h_2) khi $h_1\to 0_+,\ h_2\to 0_+$.

Abstract :

On the elliptic p- Laplace system in weighted Sobolev spaces

We study the following nonlinear boundary value problem.

$$\frac{-1}{r^{\gamma}}\frac{d}{dr}\left(r^{\gamma}\left|u_i'(r)\right|^{p-2}u_i'(r)\right)+\left|u_i(r)\right|^{p-2}u_i(r)=f_i\left(r,u_1(r),u_2(r)\right),\ 0<r<1, \quad (1)$$

$$\left|u_i'(1)\right|^{p-2}u_i'(1)+h_iu_i(1)=g_i, \quad (2)$$

$$\left|\lim_{r\to 0_+} r^{\gamma/p}u_i'(r)\right|<+\infty,\ (i=1,\ 2), \quad (3)$$

where $\gamma=N-1,\quad p\geq 2,\quad h_1>0, h_2>0,\quad g_1,\ g_2$ are given constants, $f_1,\ f_2$ are given functions. In this paper, we use the Galerkin and compactness method in Sobolev spaces with appropriate weight to prove the existence and a unique solution (u_1,u_2) of the problem (1)-(3). Afterwards, we also study the asymptotic behavior of the solution $\left(u_1(h_1,h_2),\ u_2(h_1,h_2)\right)$ depending on (h_1,h_2) as $h_1\to 0_+,\ h_2\to 0_+$.