TÍNH GIẢI ĐƯỢC CỦA BÀI TOÁN BIÊN CỘNG HƯỞNG CHO MỘT LỚP PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN BẬC KHÔNG NGUYÊN

LÊ CÔNG NHÀN*, LÊ XUÂN TRƯỜNG**

TÓM TẮT

Bằng cách sử dụng định lí dạng continuation của Mawhin, chúng tôi thiết lập các điều kiện đủ cho sự tồn tại ít nhất một nghiệm của bài toán giá trị biên cho một lớp phương trình vi phân phi tuyến bậc không nguyên.

Từ khóa: trùng bậc, phương trình vi phân bậc không nguyên, cộng hưởng.

ABSTRACT

Solvability of boundary value problem at resonance for a class of fractional differential equations

By using the Mawhin's continuation theorem we establish the sufficient conditions for the existence of at least one solution of a boundary value problem for a class of nonlinear differential equations of fractional order.

Keywords: coincidence degree, fractional differential equation, resonance.

1. Giới thiệu

Cho $\theta \in (1,2)$, và α, β, γ, η là các số thực cho trước. Trong bài báo này, chúng tối nghiên cứu sự tồn tại nghiệm cho lớp phương trình vi phân phi tuyến bậc không nguyên có dạng

$$D^{\theta}u(t) = f\big(t, u(t)\big),\ t \in \big(0,1\big), \tag{1.1}$$

kết hợp với các điều kiện biên phi địa phương

$$\begin{cases} \alpha u(0) + u'(0) = \beta\int_0^1 u(s)ds, \\ u(1) + \beta u'(1) = \eta\int_0^1 u(s)ds, \end{cases} \tag{1.2}$$

trong đó $f:[0,1]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ là một hàm số liên tục. Bài toán (1.1) - (1.2) có thể được đưa về phương trình dạng toán tử

$$Lu = Nu \tag{1.3}$$

với L (tương ứng, N) là một ánh xạ tuyến tính (tương ứng, phi tuyến) giữa hai không gian Banach X và Z mà chúng ta sẽ chọn sau.

---

* ThS, Trường Đại học An Giang; *Email: lcnhanmathagu@gmail.com*
** TS, Trường Đại học Kinh tế TPHCM

Trong vài thập niên qua, có khá nhiều bài báo đề cập đến các bài toán biên mà nó có thể đưa về dạng (1.3). Trong hầu hết các kết quả như thế, L thường là một toán tử vi phân bậc nguyên hoặc không nguyên; khả đảo (trường hợp không cộng hưởng) hoặc không khả đảo (trường hợp cộng hưởng). Cụ thể hơn, đọc giả có thể xem [4, 5] cho trường hợp không cộng hưởng và [1, 3, 7, 8, 10] cho trường hợp cộng hưởng.

Mục đích của bài báo này là nghiên cứu tính chất giải được của bài toán giá trị biên (1.1) – (1.2) trong trường hợp cộng hưởng bằng cách sử dụng Định lí dạng continuation của Mawhin trong khuôn khổ của lí thuyết trùng bậc. Điểm mới của bài báo là chúng tôi chứng minh tính chất Fredholm của toán tử vi phân kết hợp với các điều kiện biên không thông qua việc xây dựng trước các phép chiếu. Hơn nữa, việc xây dựng các phép chiếu P, Q nhằm tìm toán tử giả ngược cũng được thực hiện một cách tổng quát cho các trường hợp khác nhau liên quan đến số chiều của nhân, Ker(L).

2. Kết quả chuẩn bị

Phép tính vi tích phân bậc không nguyên

Chúng tôi bắt đầu mục này bằng việc giới thiệu một số khái niệm và kết quả cơ bản liên quan đến phép tính vi phân và tích phân bậc không nguyên (xem chi tiết hơn trong [6]).

Định nghĩa 2.1. Tích phân Riemann-Liouville bậc $\nu > 0$ của một hàm số $\varphi : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ được định nghĩa bởi

$$I^\nu \varphi(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{\nu-1}}{\Gamma(\nu)} \varphi(s)ds, t > 0,$$

nếu tích phân ở vế phải xác định từng điểm trên $(0,\infty)$.

Rõ ràng, toán tử tích phân I^α là tuyến tính, bị chặn từ $C[0,1]$ vào chính nó. Hơn nữa ta có

$$\|I^\nu \varphi\|_\infty \le k_\nu \|\varphi\|_\infty, \quad \varphi \in C[0,1], \tag{2.1}$$

với $k_\nu = \dfrac{1}{\Gamma(\nu+1)}$.

Định nghĩa 2.2. Đạo hàm Caputo bậc $\nu > 0$ của hàm số $\varphi : (0,1) \to \mathbb{R}$ được xác định bởi

$$D^\nu \varphi(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\nu)} \int_0^t (t-s)^{n-\nu-1} \varphi^{(n)}(s)ds,$$

trong đó n là số nguyên nhỏ nhất lớn hơn hoặc bằng ν, nếu tích phân ở vế phải xác định từng điểm trên $(0,\infty)$.

***Bổ đề 2.3* (xem [6]-Bổ đề 2.22).** Cho $n > 0$ và n là số nguyên nhỏ nhất lớn hơn hoặc bằng n. Nếu $\varphi \in AC^n[0,1]$ hoặc $\varphi \in C^n[0,1]$ thì $I^n\varphi$ tồn tại với hầu hết $t \in [0,1]$ và

$$\left(I^n\left(D^n\varphi\right)\right)(t) = \varphi(t) - \sum_{i=0}^{n-1}\frac{\varphi^{(i)}(0)}{i!}t^i, \quad \text{h.h. } t \in [0,1].$$

Ở đây $AC^n[0,1]$ là không gian gồm các hàm φ có đạo hàm đến cấp $n-1$ trên $[0,1]$ sao cho $\varphi^{(n-1)}$ liên tục tuyệt đối trên $[0,1]$.

Một số kết quả của lí thuyết trùng bậc

Cho X và Z là hai không gian Banach.

Định nghĩa 2.4. Cho $L : \mathrm{dom}(L) \subset X \to Z$ là một toán tử tuyến tính. L được gọi là một toán tử Fredholm chỉ số 0 nếu các điều kiện sau được thỏa:

a) $\mathrm{Ker}\,L$ có số chiều hữu hạn;
b) $\mathrm{Im}\,L$ đóng trong Z và có đối chiều hữu hạn thỏa $\mathrm{codim}\,\mathrm{Im}L = \dim\mathrm{Ker}L < \infty$.

Nếu L là toán tử Fredholm chỉ số 0 thì tồn tại các phép chiếu liên tục $P : X \to X$ và $Q : Z \to Z$ sao cho

$$\mathrm{Im}P = \mathrm{Ker}L, \quad \mathrm{Ker}Q = \mathrm{Im}L, \quad X = \mathrm{Ker}L \oplus \mathrm{Ker}P, \quad Z = \mathrm{Im}L \oplus \mathrm{Im}Q.$$

Ngoài ra hạn chế của L trên $\mathrm{dom}(L) \cap \mathrm{Ker}P$, $L_P : \mathrm{dom}(L) \cap \mathrm{Ker}P \to \mathrm{Im}L$ là ánh xạ khả đảo và kí hiệu $K_P := \left(L|_{\mathrm{dom}(L)\cap\mathrm{Ker}P}\right)^{-1}$. Ngược suy rộng của L được kí hiệu là $K_{P,Q}$ và được xác định bởi

$$K_{P,Q} = K_P(I - Q).$$

Mặt khác, với mỗi đẳng cấu $J : \mathrm{Im}Q \to \mathrm{ker}L$, ánh xạ $JQ + K_{P,Q} : Z \to \mathrm{dom}(L)$ cũng là một đẳng cấu và

$$\left(JQ + K_{P,Q}\right)^{-1}u = \left(L + J^{-1}P\right)u, \ \forall u \in \mathrm{dom}(L).$$

Tiếp theo, cho Ω là một tập con mở, bị chặn của X.

Định nghĩa 2.5. Cho L là một toán tử Fredholm chỉ số 0. Ánh xạ $N : \overline{\Omega} \to Z$ được gọi là $L-$ compact trên $\overline{\Omega}$ nếu các điều kiện sau được thỏa:

a) $QN : \overline{\Omega} \to Z$ là ánh xạ liên tục và $QN\left(\overline{\Omega}\right)$ bị chặn;
b) $K_{P,Q}N : \overline{\Omega} \to X$ là ánh xạ hoàn toàn liên tục (liên tục và compact) trên $\overline{\Omega}$.

Hơn nữa, ta nói rằng N là L – hoàn toàn liên tục nếu nó là L – compact trên mỗi tập bị chặn trong X.

Ta lưu ý rằng nếu L là toán tử Fredholm chỉ số 0 và N là ánh xạ L – compact trong $\overline{\Omega}$ thì sự tồn tại nghiệm của phương trình $Lu = Nu$, $u \in \overline{\Omega}$ tương đương với ánh xạ F có điểm bất động trong $\overline{\Omega}$, trong đó

$$F := P + \left(JQ + K_{P,Q}\right)N.$$

Việc kiểm tra sự tồn tại điểm bất động của F có thể được thực hiện bằng cách áp dụng Định lí sau đây (xem Mawhin – [8]).

Định lí 2.6. Cho $\Omega \subset X$ là một tập mở, bị chặn; L là một toán tử Fredholm chỉ số 0, và N là một ánh xạ L – compact trên $\overline{\Omega}$. Giả sử các điều kiện sau đây thỏa mãn:

i. $Lu \neq \lambda Nu$ với mỗi $(u,\lambda) \in ((\mathrm{dom}(L) \setminus \mathrm{Ker}L) \cap \partial\Omega) \times (0,1)$;

ii. $QNu \neq 0$ với mỗi $u \in \mathrm{Ker}L \cap \partial\Omega$;

iii. với một đẳng cấu $J : \mathrm{Im}Q \to \mathrm{Ker}L$ nào đó, ta có $\deg\left(JQN|_{\mathrm{Ker}L}; \Omega \cap \mathrm{Ker}L, Q\right) \neq 0$,

trong đó $Q : Z \to Z$ là phép chiếu như trên.

Khi đó phương trình Lu = Nu có nghiệm trong Ω.

Những kết quả chi tiết và sâu sắc hơn về lí thuyết trùng bậc, người đọc có thể xem trong [2, 8].

3. Dạng toán tử của Bài toán (1.1)-(1.2)

Để nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của Bài toán ban đầu bằng cách sử dụng Định lí dạng continuation của Mawhin (Định lí 2.6), chúng tôi giới thiệu các không gian $Z = C[0,1]$, với chuẩn sup thông thường, $\|\cdot\|_\infty$, và $X = C^1[0,1]$, được trang bị chuẩn

$$\|u\| = \max\left\{\|u\|_\infty, \|u'\|_\infty\right\}.$$

Đặt

$$X_0 := \{u \in AC^2[0,1] : D^q u \in Z\}.$$

Khi đó, ta định nghĩa toán tử $L : \mathrm{dom}(L) \subset X \to Z$ bởi $Lu := D^q u$, trong đó

$$\mathrm{dom}(L) = \left\{u \in X_0 : \alpha u(0) + u'(0) = \beta \int_0^1 u(s)ds, \quad u(1) + \gamma u'(1) = \eta \int_0^1 u(s)ds\right\}.$$

Ngoài ra, ta cũng xét ánh xạ $N : X \to Z$, được xác định bởi

$$Nu(t) = f\left(t, u(t)\right), \quad t \in [0,1].$$

Khi đó, việc tìm nghiệm của Bài toán (1.1)–(1.2) có thể chuyển về việc tìm nghiệm của phương trình toán tử $Lu = Nu$. Dưới đây ta sẽ chỉ ra các tính chất của L và N nhằm áp dụng được Định lí 3.6.

Tính chất Fredholm của toán tử L

Từ Bổ đề 2.3 ta suy ra

c) $u \in X_0 \Leftrightarrow u(t) = u(0) + u'(0)t + I^q Lu(t), t \in [0,1].$ (3.1)

Do đó, với bất kì $u \in X_0$, các điều kiện biên, $\alpha u(0) + u'(0) = \beta \int_0^1 u(s)ds$ và

$u(1) + \gamma u'(1) = \eta \int_0^1 u(s)ds$,

tương đương với

$$A.\begin{bmatrix} u(0) \\ u'(0) \end{bmatrix} = B(Lu)$$

trong đó

- $A = \begin{bmatrix} \alpha - \beta & 1 - \beta/2 \\ 1 - \eta & 1 + \gamma - \eta/2 \end{bmatrix}$
- $B : Z \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ là ánh xạ tuyến tính liên tục được xác định bởi

$$B(z) = D\begin{bmatrix} I^{q+1}z(1) & I^q z(1) & I^{q-1}z(1) \end{bmatrix}^T, \ z \in Z, \quad (3.2)$$

với $D = \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 \\ \eta & -1 & -\gamma \end{bmatrix}$

Vậy $\operatorname{dom}(L)$ có thể được viết lại như sau

$$\operatorname{dom}(L) = \left\{ u \in X_0 : u(t) = u(0) + u'(0)t + I^q Lu(t),\ A.\begin{bmatrix} u(0) \\ u'(0) \end{bmatrix} = B(Lu) \right\}.$$

Bằng các phép lí luận thông thường, ta có thể chỉ ra rằng

$$\operatorname{Ker}L = \{u \in X : u(t) = c_1 + c_2 t,\ (c_1, c_2) \in \operatorname{Ker}A\} \cong \operatorname{Ker}(A),$$

và

$$\operatorname{Im}L = \{z \in Z : B(z) \in \operatorname{Im}(A)\}.$$

Lemma 3.1. Cho $B : Z \to \mathbb{R}^2$ là toán tử tuyến tính liên tục được xác định bởi (3.2). Các khẳng định sau thỏa mãn

a) $|B(z)|_{\mathbb{R}^2} \le \|D\|_* \|z\|_\infty$, với mọi $z \in Z$.

b) $\operatorname{Im}B = \operatorname{Im}D$,

trong đó $|\cdot|_{\mathbb{R}^2}$ và $\|\cdot\|_*$ là các kí hiệu chuẩn tương ứng trong $\mathbb{R}^2$ và $M_{2\times 3}(\mathbb{R})$.

Chứng minh. Ta xét toán tử $\mathcal{I}: Z \to \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$\mathcal{I}(z) = \begin{bmatrix} I^{q+1}z(1) & I^q z(1) & I^{q-1}z(1) \end{bmatrix}^T.$$

Rõ ràng, từ định nghĩa của B ta suy ra $B = D \circ \mathcal{I}$. Khi đó, kết luận a) trong Bổ đề được suy ra dễ dàng từ tính chất tuyến tính liên tục của $\mathcal{I}$. Để chứng minh b) ta chỉ cần chứng minh $\mathcal{I}$ là một toàn ánh. Thật vậy, với $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, ta sẽ chỉ ra rằng tồn tại

$$z_0(t) = c_1 + c_2(1-t) + c_3(1-t)^2 \in Z$$

với $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ sao cho $\mathcal{I}(z_0) = x$. Với z_0 xác định như trên, ta có

$$\mathcal{I}(z_0) = C \cdot \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}^T,$$

trong đó C là ma trận cho bởi

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{\Gamma(q+1)}\frac{1}{q+1} & \frac{1}{\Gamma(q+1)}\frac{1}{q+2} & \frac{1}{\Gamma(q+1)}\frac{1}{q+3} \\ \frac{1}{\Gamma(q)}\frac{1}{q} & \frac{1}{\Gamma(q)}\frac{1}{q+1} & \frac{1}{\Gamma(q)}\frac{1}{q+2} \\ \frac{1}{\Gamma(q-1)}\frac{1}{q-1} & \frac{1}{\Gamma(q-1)}\frac{1}{q} & \frac{1}{\Gamma(q-1)}\frac{1}{q+1} \end{bmatrix}$$

Dễ thấy rằng hệ phương trình tuyến tính $C \cdot \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}^T = x$ có nghiệm. Từ đó, ta suy ra $\mathcal{I}$ là toàn ánh. Vậy $\operatorname{Im}B = \operatorname{Im}D$. $\square$

Trong bài báo này, ta chỉ xét Bài toán (1.1) – (1.2) trong trường hợp cộng hưởng, tức là $\dim \operatorname{Ker}A \geq 1$. Do đó $\operatorname{Im}A \cap \operatorname{Im}D$ là không gian con thực sự của $\mathbb{R}^2$ nên tồn tại $\{w_i : i = 1,..,m\}$, với $m \in \{1,2\}$ là cơ sở trực chuẩn của phần bù trực giao của $\operatorname{Im}A \cap \operatorname{Im}D$ trong $\operatorname{Im}B$. Và lúc này ta có thể biểu diễn lại tập ảnh của L như sau:

$$\operatorname{Im}(L) = \{z \in Z : \langle B(z), w_i \rangle = 0, i = 1,...,m\},$$

trong đó kí hiệu $\langle \cdot \rangle$ chỉ tích vô hướng trong $\mathbb{R}^2$.

Mặt khác, vì $w_i \in \operatorname{Im}B = \operatorname{Im}D$ với mỗi $i \in \{1,...,m\}$ và ma trận C khả nghịch nên tồn tại $x_i = (x_1^i, x_2^i, x_3^i) \in \mathbb{R}^3$ sao cho $(DC)x_i = w_i$. Ta xét

$$z_i(t) = x_1^i + x_2^i(1-t) + x_3^i(1-t)^2,$$

thì $z_i \in Z$ và $B(z_i) = DC(x_i) = w_i$. Hơn nữa, do tính chất tuyến tính của toán tử B và hệ $\{w_i : i = 1,...,m\}$ độc lập tuyến tính nên ta suy ra $\{z_i : i = 1,...,m\}$ cũng là hệ độc lập tuyến tính trong Z.

Bổ đề sau đây cho ta điều kiện đủ để toán tử L là một toán tử Fredholm chỉ số không.

Bổ đề 3.2. Giả sử rằng $\dim(\mathrm{Im}A + \mathrm{Im}D) = \dim(\mathbb{R}^2)$. Khi đó L là một toán tử Fredholm chỉ số không.

Chứng minh. Ta chú ý rằng, vì $\mathrm{Ker}L \cong \mathrm{Ker}A$ nên $\mathrm{Ker}L$ là một không gian con hữu hạn chiều. Và do B là toán tử tuyến tính liên tục nên $\mathrm{Im}L$ là tập đóng. Vậy ta chỉ cần chứng minh $\mathrm{codim}\,\mathrm{Im}L = \dim\mathrm{Ker}L$.

Thật vậy, xét toán tử tuyến tính $Q : Z \to Z$ xác định bởi

$$Q(z) = \sum_{i=1}^{m} \langle B(z), w_i\rangle z_i, \quad z \in Z.$$

Khi ta có thể dễ dàng kiểm tra được Q là một phép chiếu. Ngoài ra, do B là toán tử tính tuyến tính liên tục nên Q liên tục. Hơn nữa, ta có

$$z \in \mathrm{Ker}Q \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{m} \langle B(z), w_i\rangle z_i = 0 \Leftrightarrow \langle B(z), w_i\rangle = 0, \forall i \Leftrightarrow z \in \mathrm{Im}L.$$

Điều này có nghĩa là $\mathrm{Ker}Q = \mathrm{Im}L$. Vậy ta suy ra

$$\begin{aligned}
&\mathrm{codim}\,\mathrm{Im}L = \mathrm{codim}\,\mathrm{Ker}Q = \dim\mathrm{Im}Q\\
&= \dim\mathrm{Im}D - \dim(\mathrm{Im}A \cap \mathrm{Im}D)\\
&= \dim(\mathrm{Im}A + \mathrm{Im}D) - \dim\mathrm{Im}A\\
&= \dim\mathbb{R}^2 - \dim\mathrm{Im}A = \dim\mathrm{Ker}A = \dim\mathrm{Ker}L.
\end{aligned}$$

Vậy L là toán tử Fredholm chỉ số 0. ∎

Cuối cùng ta lưu ý rằng, với điều kiện của Bổ đề 3.2, ta cũng suy ra

$$\dim\mathrm{Ker}L = \dim\mathrm{Im}Q = m,$$

và $\mathrm{Im}Q = \mathrm{span}\{z_i : i = 1,...,m\}$$.

Nghịch đảo suy rộng của toán tử L

Trong phần này, ta xây dựng phép chiếu P và toán tử nghịch đảo suy rộng $K_{P,Q}$ của L. Trước hết ta chú ý rằng với mỗi ma trận $A \in M_2(\mathbb{R})$, ta có $P_A = I_2 - A^+A$ là một phép chiếu liên tục từ $\mathbb{R}^2$ vào $\operatorname{Ker}A$, trong đó I_2 là ma trận đơn vị cấp hai và A^+ kí hiệu ma trận giả nghịch đảo Moore-Penrose của ma trận A.

Trước hết, ta xét toán tử tuyến tính $P : X \to X$ xác định bởi

$$Pu(t) = [1 \quad t]P_A\begin{bmatrix} u(0) & u'(0)\end{bmatrix}^T, \quad u \in X.$$

Khi đó ta có thể chứng minh P là một phép chiếu liên tục trên X. Hơn nữa, ta có

$$\operatorname{Ker}P = \left\{u \in X : \begin{bmatrix} u(0) & u'(0)\end{bmatrix}^T = A^+A\begin{bmatrix} u(0) & u'(0)\end{bmatrix}^T\right\}.$$

Tiếp theo, xét $K_P : \operatorname{Im}L \to \operatorname{dom}(L) \cap \operatorname{Ker}P$ được cho bởi

$$(K_P z)(t) = [1 \quad t]A^+B(z) + I^q z(t), \quad z \in \operatorname{Im}L.$$

Ta lưu ý rằng, K_P được xác định tốt và là một toán tử tuyến tính. Kết quả dưới đây chỉ ra rằng $K_P(I – Q)$ là toán tử ngược suy rộng của L.

Bổ đề 3.3. Ta có

$$K_P = \left(L|_{\operatorname{dom}(L)\cap \operatorname{Ker}P}\right)^{-1}.$$

Hơn nữa, K_P là toán tử tuyến tính bị chặn thỏa mãn đánh giá

$$\|K_P z\| \le \left(1 + 2\|A^+\|_* \|D\|_*\right)\|z\|_\infty,$$

với mọi $z \in \operatorname{Im}L$.

Chứng minh.

Với $z \in \operatorname{Im}L$, từ định nghĩa của toán tử L và K_P, ta dễ dàng thấy rằng $(LK_P)(z)(t) = z(t)$ với mọi $t \in [0,1]$. Mặt khác, với mỗi $u \in \operatorname{dom}(L) \cap \operatorname{Ker}P$, ta có

$$B(Lu) = A\begin{bmatrix} u(0) & u'(0)\end{bmatrix}^T$$

do $u \in \operatorname{dom}(L)$. Từ đây suy ra

$$\begin{aligned}(K_P L)(u)(t) &= [1 \quad t]A^+B(Lu) + I^q Lu(t)\\ &= u(t) - [1 \quad t]\begin{bmatrix} u(0) & u'(0)\end{bmatrix}^T + [1 \quad t]A^+B(Lu)\\ &= u(t) - [1 \quad t]P_A\begin{bmatrix} u(0) & u'(0)\end{bmatrix}^T = u(t) - Pu(t) = u(t),\end{aligned}$$

trong đó ta sử dụng giả thiết $u \in \operatorname{Ker}P$ cho đẳng thức cuối cùng. Vì vậy

$$K_P = \left(L|_{\operatorname{dom}(L)\cap \operatorname{Ker}P}\right)^{-1}.$$

Phần còn lại của định lí được chứng minh bằng một số đánh giá thông thường. $\square$

Tính chất L – compact của thành phần phi tuyến

Trước hết ta có kết quả sau. Chứng minh của nó có thể được thực hiện các lí luận thông thường.

Bổ đề 3.4. Giả sử Ω là một tập bị chặn trong $C[0,1]$. Khi đó $\{I^q z(t) : z \in \Omega\}$ và $\{I^{q-1} z(t) : z \in \Omega\}$ là các họ đồng liên tục trong $C[0,1]$.

Bây giờ, ta sẽ chứng minh tính chất L – compact của ánh xạ phi tuyến N.

Bổ đề 3.5. Giả sử $f : [0,1] \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục. Khi đó toán tử $N : X \to Z$ xác định bởi $Nu(t) = f(t, u(t))$, với $t \in [0,1]$ là L-hoàn toàn liên tục.

Chứng minh. Trước hết, ta chứng minh $QN : X \to Z$ là liên tục và $QN(\overline{\Omega})$ bị chặn, với Ω là một tập con bị chặn bất kì của X. Thật vậy, do tính liên tục của hàm f, ta suy ra $N : X \to Z$ là toán tử liên tục và do đó toán tử $QN : X \to Z$ liên tục bởi vì nó là hợp của các toán tử liên tục của Q và N.

Lấy một tập con bị chặn Ω của X và đặt $R = \sup\limits_{u \in \overline{\Omega}} \|u\|$. Lại do tính liên tục của f, ta suy ra tồn tại hằng số dương C_R sao cho

$$|Nu(t)| = |f(t, u(t))| \le C_R$$

với mọi $t \in [0,1]$, $u \in \overline{\Omega}$. Suy ra $N(\Omega)$ bị chặn trong Z. Mặt khác, do Q là một phép chiếu tuyến tính liên tục nên $QN(\Omega)$ bị chặn trong Z.

Tiếp theo, ta chứng minh $K_P(I - Q)N : \overline{\Omega} \to X$ là toán tử compact liên tục. Rõ ràng tính liên tục của toán tử $K_{P,Q}N = K_P(I - Q)N$ được suy ra từ tính liên tục của các toán tử N, Q và K_P. Vì vậy để kết thúc chứng minh ta cần chứng tỏ rằng $K_{P,Q}N(\overline{\Omega})$ là tập compact tương đối trong X. Với $u \in \overline{\Omega}$, ta có

$$K_{P,Q}Nu(t) = [1 \quad t]A^+B((I - Q)Nu) + I^q(I - Q)Nu(t)$$

và

$$(K_{P,Q}Nu)'(t) = [0 \quad 1]A^+B((I - Q)Nu) + I^{q-1}(I - Q)Nu(t).$$

Đặt $z(t) = (I - Q)Nu(t)$ thì z bị chặn trong Z, bởi vì $(I - Q)N(\overline{\Omega})$ bị chặn. Theo Bổ đề 3.4, ta suy ra $\{I^q(I - Q)Nu : u \in \overline{\Omega}\}$ và $\{I^{q-1}(I - Q)Nu : u \in \overline{\Omega}\}$ đồng liên tục. Do đó $\{K_{P,Q}Nu : u \in \overline{\Omega}\}$ và $\{(K_{P,Q}Nu)' : u \in \overline{\Omega}\}$ đồng liên tục trong $C[0,1]$.

Theo Định lí Arzela-Ascoli thì $K_{P,Q}N\left(\overline{\Omega}\right)$ là tập compact tương đối trong X. Bổ đề được chứng minh xong. $\square$

4. Kết quả chính

Trong phần này ta đưa ra điều kiện đủ cho tính tồn tại nghiệm của bài toán (1.1) – (1.2). Trước hết, ta thiết lập các giả thiết thông thường về tính bị chặn của thành phần phi tuyến.

(H1) Tồn tại các hàm không âm $a, b \in Z$ thỏa $\|a\|_\infty < 1/C$ sao cho

$|f(t,u)| \le a(t)|u| + b(t),$ với mọi $t \in [0,1]$ và $u, v \in \mathbb{R}$, ở đây

$$C = 1 + 2\|A^+\|_*\|D\|_* + 2\left[\frac{1}{\Gamma(q)} + \frac{1}{\Gamma(q+1)}\right]\|P_A\|_*;$$

(H2) Tồn tại hằng số dương M_1 sao cho với mỗi $u \in \mathrm{dom}(L)$ thỏa

$\max\left\{|u^{(i)}(t)| : i = 0,1\right\} > M_1,$ với mọi $t \in [0,1]$ thì $B(Nu) \notin \mathrm{Im}A$;

(H3) Tồn tại hằng số dương M_2 sao cho với mọi $c_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1,\dots,m)$ thỏa

$$\sum_{i=1}^{m} |c_i| > M_2$$

thì $c_i\left\langle B \circ N\left(\sum_{i=1}^{m} c_i x_i\right), w_i\right\rangle < 0,$ hoặc $c_i\left\langle B \circ N\left(\sum_{i=1}^{m} c_i x_i\right), w_i\right\rangle > 0$, với mọi i.

Ta có các Bổ đề sau.

Bổ đề 4.1. Đặt $\Omega_1 = \{u \in \mathrm{dom}(L) \setminus \mathrm{Ker}L : Lu = \lambda Nu, \lambda \in (0,1)\}$. Khi đó Ω_1 là một tập bị chặn.

Chứng minh. Với $u \in \Omega_1$, khi đó tồn tại $\lambda \in (0,1)$ sao cho $Lu = \lambda Nu$. Suy ra $Nu \in \mathrm{Im}L = \mathrm{Ker}Q$ hay

$$QNu(t) = \sum_{k=1}^{m} \langle B(Nu), w_k\rangle z_k(t) = 0, \quad \forall t \in [0,1].$$

Do $\{z_k : k = 1,\dots,m\}$ là hệ độc lập tuyến tính trong Z nên ta được

$\langle B(Nu), w_k\rangle = 0$, với mọi $k = 1,\dots,m$. Suy ra $B(Nu) \in \mathrm{Im}A \cap \mathrm{Im}D$ và do đó $B(Nu) \in \mathrm{Im}A$. Theo giả thiết (H2) thì tồn tại $t_0 \in [0,1]$ sao cho

$$\max\left\{|u^{(k)}(t_0)| : k = 0,1\right\} \le M_1.$$

Mặt khác ta lại có

$$u(t_0) = u(0) + u'(0)t_0 + \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^{t_0}(t_0 - s)^{q-1}Lu(s)ds,$$

$$u'(t_0) = u'(0) + \frac{1}{\Gamma(q-1)}\int_0^{t_0}(t_0 - s)^{q-2}Lu(s)ds.$$

Từ đây suy ra

$$|u'(0)| \le M_1 + \frac{1}{\Gamma(q)}\|Lu\|_\infty ,$$

$$|u(0)| \le 2M_1 + \left(\frac{1}{\Gamma(q)} + \frac{1}{\Gamma(q+1)}\right)\|Lu\|_\infty .$$

Từ định nghĩa của toán tử P, ta suy ra

$$\|Pu\| \le 2\|P_A\|_* \max\{|u(0)|,|u'(0)|\}$$

$$\le 2\|P_A\|_*\left[2M_1 + \left(\frac{1}{\Gamma(q)} + \frac{1}{\Gamma(q+1)}\right)\|Lu\|_\infty\right]$$

$$\le 2\|P_A\|_*\left[2M_1 + \left(\frac{1}{\Gamma(q)} + \frac{1}{\Gamma(q+1)}\right)\|Nu\|_\infty\right].$$

Mặt khác do $(I - P)u \in \mathrm{dom}(L) \cap \mathrm{Ker}P$ và sử dụng Bổ đề 3.3 ta suy ra

$$\|(I - P)u\| = \|K_P L(I - P)u\| = \|K_P Lu\|$$

$$\le \left(1 + 2\|A^+\|_*\|D\|_*\right)\|Lu\|_\infty$$

$$\le \left(1 + 2\|A^+\|_*\|D\|_*\right)\|Nu\|_\infty .$$

Kết hợp các đánh giá trên ta có

$$\|u\| \le \|Pu\| + \|(I - P)u\| \le 4M_1\|P_A\|_* + C\|Nu\|_\infty ,$$

trong đó $C = 1 + 2\|A^+\|_*\|D\|_* + 2\left[\frac{1}{\Gamma(q)} + \frac{1}{\Gamma(q+1)}\right]\|P_A\|_*$. Mặt khác, từ định nghĩa của toán tử N và giả thiết (H1) ta suy ra

$$\|Nu\|_\infty \le \|a\|_\infty \cdot \|u\|_\infty + \|b\|_\infty .$$

Bằng cách kết hợp hai bất đẳng thức ngay ở trên ta thu được

$$\|u\| \le \frac{4M_1\|P_A\|_* + C\|b\|_\infty}{1 - C\|a\|_\infty}.$$

Vì vậy Ω_1 bị chặn trong X. ■

Bổ đề 4.2. Tập hợp $\Omega_2 = \{u \in \operatorname{Ker}L : Nu \in \operatorname{Im}L\}$ là một tập con bị chặn trong X.

Chứng minh. Lấy $u \in \Omega_2$ thì u có dạng $u(t) = c_1 + c_2 t$, với $(c_1, c_2) \in \operatorname{Ker}A$ và $Nu \in \operatorname{Im}L$. Bằng lí luận tương tự như trong chứng minh Bổ đề 4.1 ta suy ra tồn tại $t_0 \in [0,1]$ sao cho

$$\max\{|u(t_0)|, |u'(t_0)|\} \le M_1.$$

Từ đây ta suy ra c_1 và c_2 bị chặn trong $\mathbb{R}$. Vì vậy bổ đề được chứng minh. ■

Bổ đề 4.3. Xét các tập hợp

$$\Omega_3 = \{u \in \operatorname{Ker}L : -\lambda u + (1-\lambda)JQNu = 0, \lambda \in [0,1]\}$$

và

$$\Omega_3^+ = \{u \in \operatorname{Ker}L : \lambda u + (1-\lambda)JQNu = 0, \lambda \in [0,1]\},$$

ở đây $J : \operatorname{Im}Q \to \operatorname{Ker}L$ là một đẳng cấu tuyến tính xác định bởi

$$J\left(\sum_{i=1}^{m} c_i z_i\right) = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i,$$

với $\{x_i : i = 1,\dots,m\}$ là cơ sở của $\operatorname{Ker}L$ và $\{z_i : i = 1,\dots,m\}$ là cơ sở của $\operatorname{Im}Q$. Khi đó Ω_3 và Ω_3^+ là các tập hợp bị chặn trong X nếu các điều kiện

$$c_i \left\langle B \circ N\left(\sum_{i=1}^{m} c_i x_i\right), w_i \right\rangle < 0,$$

và $c_i \left\langle B \circ N\left(\sum_{i=1}^{m} c_i x_i\right), w_i \right\rangle > 0$ tương ứng được thỏa.

Chứng minh. Giả sử điều kiện $c_i \left\langle B \circ N\left(\sum_{i=1}^{m} c_i x_i\right), w_i \right\rangle < 0,$ được thỏa với mọi i.

Khi đó với $u \in \Omega_3$ thì $u \in \operatorname{Ker}L$ nên tồn tại $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,\dots,m$ sao cho $u = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i$ và tồn tại $\lambda \in [0,1]$ sao cho

$$-\lambda\left(\sum_{i=1}^{m} c_i x_i\right) + (1-\lambda)JQN\left(\sum_{i=1}^{m} c_i x_i\right) = 0.$$

Suy ra

$$\lambda J^{-1}\left(\sum_{i=1}^{m} c_i x_i\right) = (1-\lambda) QN\left(\sum_{i=1}^{m} c_i x_i\right)$$

Và do đó ta có

$$\lambda\left(\sum_{i=1}^{m} c_i z_i\right) = (1-\lambda)\sum_{i=1}^{m}\left\langle B \circ N\left(\sum_{i=1}^{m} c_i x_i\right), w_i\right\rangle z_i.$$

Do tính độc lập tuyến tính của hệ $\{z_i : i = 1,...,m\}$ ta suy ra

$$\lambda c_i = (1-\lambda)\left\langle B \circ N\left(\sum_{i=1}^{m} c_i x_i\right), w_i\right\rangle$$

với mọi i. Nếu $\lambda = 1$ thì $c_i = 0$ với mọi $i \in \{1,...,m\}$. Trong trường hợp này rõ ràng Ω_3 bị chặn. Nếu $\lambda \in [0,1)$ và giả sử rằng $\sum_{i=1}^{m} |c_i| > M_2$ thì theo giả thiết ta suy ra điều mâu thuẫn

$$0 \le \lambda c_i^2 = (1-\lambda) c_i \left\langle B \circ N\left(\sum_{i=1}^{m} c_i x_i\right), w_i\right\rangle < 0,$$

với $i \in \{1,...,m\}$. Vì vậy $\sum_{i=1}^{m} |c_i| \le M_2$ và do đó Ω_3 bị chặn trong X. Trường hợp còn lại được chứng minh tương tự. Vậy bổ đề được chứng minh. $\square$

Định lí 4.4. Giả sử rằng các điều kiện (H1) – (H3) được thỏa. Khi đó bài toán (1.1) – (1.3) có ít nhất một nghiệm trong X.

Chứng minh. Chúng ta sẽ kiểm tra các điều kiện của Định lí 2.6 được thỏa. Lấy Ω là một tập mở, bị chặn trong X sao cho $\bigcup_{i=1}^{3} \overline{\Omega_i} \subset \Omega$. Rõ ràng L là toán tử Fredholm chỉ số không do Bổ đề 3.2 và N là toán tử L-compact trên $\overline{\Omega}$ do Bổ đề 3.5. Hơn nữa, các điều kiện i và ii của Định lí 2.6 được thỏa do các Bổ đề 4.1 và Bổ đề 4.2. Vì vậy, ta chỉ cần kiểm tra điều kiện iii. Để chứng minh điều này, ta sử dụng tính bất biến của đồng luân. Xét ánh xạ $H : [0,1] \times X \to X$,

$$H(\lambda, u) = \pm\lambda u + (1-\lambda) JQNu.$$

Theo Bổ đề 4.2 thì $H(\lambda, u) \ne 0$ với mọi $(\lambda, u) \in [0,1] \times (\operatorname{Ker} L \cap \partial\Omega)$. Vì vậy ta có

$$\deg(JQN; \Omega \cap \operatorname{Ker} L, 0) = \deg(H(0,\cdot); \Omega \cap \operatorname{Ker} L, 0)$$

$$= \deg(H(1,\cdot); \Omega \cap \operatorname{Ker} L, 0)$$

$$= \deg(\pm I; \Omega \cap \operatorname{Ker}L, 0) = \pm 1 \neq 0.$$

Vậy định lí được chứng minh. W

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. W. Feng, J. R. L. Webb (1997), "Solvability of three-point boundary value problems at resonance", *Nonlinear Analysis*, 30(6), pp.3227-3238.
2. R. E. Gaines, J. Mawhin (1977), *Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations,* Springer-Verlag, Berlin.
3. C. P. Gupta (1995), "Existence theorems for a second order m-point boundary value problem at resonance", *Int. J. Math. Sci.,* 18(4), pp.705-710.
4. X. Han (2007), "Positive solutions for a three-point boundary-value problem at resonance", *J. Math. Anal. Appl.*, 336, pp.556-568.
5. V.A. Il'in, E.I. Moiseev (1987), "Nonlocal boundary value problem of the first kind for a Sturm-Liouville operator", *J. Diff. Equations*, 23, pp.803-810.
6. A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo (2006), *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, Amsterdam.
7. N. Kosmatov (2012), "A singular non-local problem at resonance", *J. Math. Anal. Appl.*, 394, pp. 425-431.
8. J. Mawhin (1979), *Topological Degree Methods in Nonlinear Boundary Value Problems,* American Math. Soc., Providence.
9. P. D. Phung, L. X. Truong (2014), "On the existence of a three point boundary value problem at resonance in R^n", *J. Math. Anal. Appl.*, 416, pp. 522-533.
10. X. Zhang, M. Feng, W. Ge (2009), "Existence result of second-order differential equations with integral boundary conditions at resonance", *J. Math. Anal. Appl.*, 353, pp. 311-319.

(Ngày Tòa soạn nhận được bài: 02-11-2015; ngày phản biện đánh giá: 16-12-2015; ngày chấp nhận đăng: 22-12-2015)