VỀ MỘT PHƯƠNG TRÌNH PARABOLIC CHỨA TÍCH CHẬP

Trần Minh Thuyết*, Nguyễn Thanh Sang†

1. Mở đầu

Trong bài này, trước tiên xét bài toán

$$\frac{\partial C_1}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial C_1}{\partial x} + q_1(x,t)C_1\right) + \mu_2 C_1 = \gamma_1(x,t) + (\gamma_2 * C_1)(x,t),\ 0 < x < 1,\ 0 < t < T, \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C_1}{\partial x}(0,t) + q_1(0,t)C_1(0,t) = 0,\ 0 < t < T, \\ \dfrac{\partial C_1}{\partial x}(1,t) + q_1(1,t)C_1(1,t) = 0,\ 0 < t < T, \end{cases} \tag{1.2}$$

$$C_1(x,0) = C_1^0(x),\ \ 0 < x < 1, \tag{1.3}$$

trong đó phương trình (1.1) chứa tích chập

$$(\gamma_2 * C_1)(x,t) = \int_0^t \gamma_2(t-r)C_1(x,r)dr, \tag{1.4}$$

với $\mu_2 > 0$ là hằng số cho trước và $q_1, C_1^0, \gamma_1, \gamma_2$ là các hàm cho trước sẽ được giả thuyết sau. Bài toán (1.1)-(1.4) có liên quan đến bài toán khuếch tán trong hoá học (xem [1-3, 6, 7] và các tài liệu tham khảo trong đó), mà mấu chốt vấn đề về mặt toán học dẫn đến bài toán sau.

Cho $\Omega = (0,1)$, ta đặt $Q_T = \Omega \times (0,T), 0 < T < \infty$. Xét bài toán : Tìm (C_1, C_2) thỏa cặp bài toán sau :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C_1}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial C_1}{\partial x} + q_1(x,t)C_1\right) = R_1(C_1,C_2),\ \ 0 < x < 1, 0 < t < T, \\ \dfrac{\partial C_1}{\partial x}(0,t) + q_1(0,t)C_1(0,t) = 0,\ 0 < t < T, \\ \dfrac{\partial C_1}{\partial x}(1,t) + q_1(1,t)C_1(1,t) = 0,\ 0 < t < T, \\ C_1(x,0) = C_1^0(x),\ \ 0 < x < 1, \end{cases} \tag{1.5}$$

* TS. Trường ĐH Kinh tế Tp. HCM
† ThS. Trường CĐ Cộng đồng Kiên Giang

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C_2}{\partial t} = R_2(C_1, C_2), \quad 0 < x < 1,\ 0 < t < T, \\ C_2(x,0) = C_2^0(x), \quad 0 < x < 1, \end{cases} \tag{1.6}$$

trong đó, q_1, C_1^0, C_2^0 cho trước, các số hạng $R_1(C_1, C_2)$, $R_2(C_1, C_2)$ có dạng cụ thể

$$\begin{cases} R_1(C_1,C_2) = \mu_1 - \mu_2 C_1 + \mu_3 C_2, \\ R_2(C_1,C_2) = \overline{\mu}_1 + \overline{\mu}_2 C_1 - \overline{\mu}_3 C_2, \\ \mu_i > 0,\ \overline{\mu}_i > 0,\ i = 1,2,3 \ \text{la cac hang so döông.} \end{cases} \tag{1.7}$$

Bằng cách khử ẩn hàm C_2 từ (1.5) - (1.7), ta thu được bài toán (1.1) - (1.4), trong đó

$$\begin{cases} \gamma_1(x,t) = \mu_1 + \mu_3 \dfrac{\overline{\mu}_1}{\overline{\mu}_3}\left(1 - \exp(-\overline{\mu}_3 t)\right) + \mu_3 \exp(-\overline{\mu}_3 t) C_2^0(x), \\ (\gamma_2 * C_1)(x,t) = \displaystyle\int_0^t \gamma_2(t-r) C_1(x,r)\,dr, \\ \gamma_2(t) = \mu_3 \overline{\mu}_2 \exp(-\overline{\mu}_3 t). \end{cases} \tag{1.8}$$

Bài báo gồm 3 phần. Trong phần 1, với các điều kiện $C_1^0 \in L^2(\Omega)$, $q_1 \in C(\overline{Q_T})$, $\gamma_1 \in L^2(Q_T)$, $\gamma_2 \in L^2(0,T)$, $\mu_2 > 0$, cùng với một số điều kiện khác, chúng tôi chứng minh sự tồn tại và duy nhất của nghiệm yếu toàn cục của bài toán (1.1)-(1.4). Chứng minh được dựa vào phương pháp Faedo-Galerkin liên kết với các đánh giá tiên nghiệm cùng với kĩ thuật hội tụ yếu và về tính compact. Trong phần 2, với điều kiện đầu $C_1^0 \in H^1(\Omega)$, $q_1 \in C^1(\overline{Q_T})$, $\gamma_1, \gamma_1' \in L^2(Q_T)$, $\gamma_2 \in H^1(0,T)$, $\mu_2 > 0$, cùng với một số điều kiện khác, chúng tôi chứng minh nghiệm thu được của bài toán (1.1)-(1.4) có tính trơn tốt hơn, cụ thể là $C_1 \in L^\infty(0,T;H^1) \cap L^2(0,T;H^2) \cap C^0([0,T];H^1) \cap H^1(Q_T)$, $C_1' \in L^2(Q_T)$. Cuối cùng, trong phần 3, với điều kiện đầu $C_1^0 \in L^2(\Omega)$, $C_1^0 \geq 0$, *a.e.* $x \in \Omega$. cùng với một số điều kiện khác, chúng tôi chứng minh được rằng tồn tại một nghiệm địa phương của bài toán (1.1)-(1.4) cũng không âm trên $\Omega \times (0,T)$.

2. Các kết quả

Đầu tiên, ta đặt các kí hiệu sau : $\Omega = (0,1)$, $Q_T = \Omega \times (0,T)$, $T > 0$, và bỏ qua định nghĩa các không gian hàm thông dụng : $C^m(\overline{\Omega})$, $L^p(\Omega)$, $H^m(\Omega), W^{m,p}(\Omega)$, $L^p(0,T;X)$, $1 \le p \le \infty$. Để cho gọn, ta kí hiệu lại như sau : $L^p(\Omega) = L^p$, $H^m(\Omega) = H^m = W^{m,2}$, $W^{m,p}(\Omega) = W^{m,p}$. Các định nghĩa này có thể xem trong [4, 5]. Ta cũng dùng các kí hiệu $u(t), u'(t) = u_t(t) = \dot{u}(t)$, $u''(t) = u_{tt}(t) = \ddot{u}(t), u_x(t) = \nabla u(t)$, $u_{xx}(t) = \Delta u(t)$ lần lượt để chỉ $u(x,t)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)$, $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$.

Ta thành lập các giả thiết :

(H_1) $\quad C_1^0 \in L^2 = L^2(0,1)$,

(H_2) $\quad q_1 \in C(\overline{Q_T})$,

(H_3) $\quad \gamma_1 \in L^2(Q_T)$,

(H_4) $\quad \gamma_2 \in L^2(0,T)$.

Nghiệm yếu của bài toán (1.1) - (1.4) được thành lập từ bài toán biến phân :

Tìm $C_1 \in L^\infty(0,T;L^2) \cap L^2(0,T;H^1)$ sao cho :

$$\frac{d}{dt}\langle C_1(t),v\rangle + a(t,C_1(t),v) + \mu_2\langle C_1(t),v\rangle = \langle \gamma_1(t),v\rangle + \langle (\gamma_2 * C_1)(t),v\rangle, \quad \forall v \in H^1(0,1), \tag{2.1}$$

$$C_1(0) = C_1^0, \tag{2.2}$$

trong đó

$$a(t,C_1,v) = \int_0^1 \left(\frac{\partial C_1}{\partial x}(x) + q_1(x,t)C_1(x) \right) \frac{\partial v}{\partial x}(x)dx, \quad C_1,\ v \in H^1(0,1), \tag{2.3}$$

$$\langle \gamma_1(t),v\rangle = \int_0^1 \gamma_1(x,t)v(x)dx, \quad v \in L^2(0,1). \tag{2.4}$$

Khi đó ta có định lí sau đây.

Định lí 2.1. *Giả sử rằng các giả thiết* (H_1)-(H_4) *đúng. Khi đó bài toán* (1.1)-(1.4) *có duy nhất một nghiệm yếu* $C_1 \in L^\infty(0,T;L^2) \cap L^2(0,T;H^1)$.

Chứng minh Định lí 2.1. Chứng minh được dựa vào phương pháp Faedo – Galerkin liên kết với các đánh giá tiên nghiệm cùng với kĩ thuật hội tụ yếu và về tính compact. Chi tiết chứng minh có thể tìm thấy trong [8].

Nếu tăng cường thêm các giả thiết về điều kiện đầu $C_1^0 \in H^1(\Omega)$, cùng với một số điều kiện khác, chúng tôi chứng minh được rằng nghiệm thu được của bài toán (1.1) – (1.4) có tính trơn tốt hơn.

Ta thành lập bổ sung các giả thiết sau đây :

(H_1') $\quad C_1^0 \in H^1 = H^1(\Omega)$,

(H_2') $\quad q_1 \in C^1(\overline{Q}_T)$,

(H_3') $\quad \gamma_1, \gamma_1' \in L^2(Q_T)$,

(H_4') $\quad \gamma_2 \in H^1(0,T)$.

Khi đó ta có định lí sau.

Định lí 2.2. *Giả sử rằng các giả thiết* $(H_1') - (H_4')$ *đúng. Khi đó bài toán* (1.1)-(1.4) *có duy nhất nghiệm yếu* $C_1 \in L^\infty(0,T;H^1)$, *sao cho* $C' \in L^2(Q_T)$.

Chú thích. Thật ra định lí 2.2 cho nghiệm tốt hơn, cụ thể nghiệm C_1 của bài toán (1.1)-(1.4) sẽ thỏa thêm các tính chất sau :

$$C_1 \in L^\infty(0,T;H^1) \bigcap L^2(0,T;H^2) \bigcap C^0([0,T];H^1) \bigcap H^1(Q_T),\ C' \in L^2(Q_T). \qquad (2.5)$$

Chứng minh định lí 2.2. Chi tiết chứng minh có thể tìm thấy trong [8].

Phần tiếp theo sau để nhận được nghiệm $C_1(x,t) \geq 0$, ta cần tăng cường thêm giả thiết thích hợp.

Trước hết ta xét bài toán (1.1)-(1.4) với $\gamma_2 = 0$, sau đó sẽ xét trường hợp $\gamma_2(t) \geq 0$ và γ_2 không đồng nhất bằng không.

Ta xét bài toán (1.1)-(1.4) dưới đây tương ứng với $\gamma_2 = 0$, và với giả sử rằng

(H_1'') $\quad C_1^0 \in L^2(\Omega),\ C_1^0(x) \geq 0$ *a.e.* $x \in \Omega$,

(H_2'') $\quad q_1 \in C(\overline{Q}_T)$,

(H_3'') $\quad \gamma_1 \in L^2(Q_T),\ \gamma_1(x,t) \geq 0$ *a.e.* $(x,t) \in Q_T$.

Khi đó ta có định lí sau đây.

Định lí 2.3. *Giả sử rằng các giả thiết* $(H_1^{//})$ - $(H_3^{//})$ *đúng. Khi đó bài toán* (1.1)-(1.4) *có duy nhất một nghiệm yếu* $C_1 \in L^2(0,T;H^1)\cap L^\infty(0,T;L^2)$ *và* $C_1(x,t) \geq 0$ *a.e.* $(x,t) \in Q_T$.

Chứng minh định lí 2.3. Chi tiết chứng minh có thể tìm thấy trong [8].

Phần tiếp theo, ta sẽ xét bài toán (1.1)-(1.4) với trường hợp $\gamma_2(t) \geq 0$ và γ_2 không đồng nhất bằng không. Để nhận được nghiệm $C_1(x,t) \geq 0$ của bài toán (1.1)-(1.4), ta cần tăng cường thêm giả thiết sau đây.

$(H_1^{//})$ $C_1^0 \in L^2(\Omega)$, $C_1^0(x) \geq 0$ *a.e.* $x \in \Omega$,

$(H_2^{//})$ $q_1 \in C(\overline{Q}_T)$,

$(H_3^{//})$ $\gamma_1 \in L^2(Q_T)$, $\gamma_1(x,t) \geq 0$ *a.e.* $(x,t) \in Q_T$,

$(H_4^{//})$ $\gamma_2 \in L^2(0,T)$, $\gamma_2(t) \geq 0$ a.e. $t \in (0,T)$.

Khi đó ta có định lí sau đây.

Định lí 2.4. *Giả sử rằng các giả thiết* $(H_1^{//})$ - $(H_4^{//})$ *đúng. Khi đó tồn tại* $T > 0$ *sao cho bài toán* (1.1)-(1.4) *có duy nhất một nghiệm yếu* $C_1 \in L^2(0,T;H^1)\cap L^\infty(0,T;L^2)$ *và* $C_1(x,t) \geq 0$ *a.e.* $(x,t) \in Q_T$.

Chứng minh. Ta thiết lập một dãy hàm $\{u_m\}$ như sau :

i/ Cho trước $u_0(x,t) \equiv 0$.

ii/ Giả sử $u_{m-1} \in L^2(0,T;H^1)\cap L^\infty(0,T;L^2)$, ta xét bài toán tìm $u_m \in L^2(0,T;H^1)\cap L^\infty(0,T;L^2)$, là nghiệm yếu của bài toán

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_m}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u_m}{\partial x} + q_1(x,t)u_m\right) + \mu_2 u_m = \gamma_1(x,t) \\ \qquad\qquad + (\gamma_2 * u_{m-1}^+)(x,t), \; 0 < x < 1, \; 0 < t < T, \\ \dfrac{\partial u_m}{\partial x}(0,t) + q_1(0,t)u_m(0,t) = 0, \quad 0 < t < T, \\ \dfrac{\partial u_m}{\partial x}(1,t) + q_1(1,t)u_m(1,t) = 0, \quad 0 < t < T, \\ u_m(x,0) = C_1^0(x), \quad 0 < x < 1, \\ u_{m-1}^+ = \max\{0, u_{m-1}\} = \dfrac{1}{2}\left(|u_{m-1}| + u_{m-1}\right). \end{cases} \tag{2.6}$$

Khi đó C_1^0, q_1, và hàm $\tilde{\gamma}_1(x,t) = \gamma_1(x,t) + (\gamma_2 * u_{m-1}^+)(x,t) \geq 0$, lần lượt thỏa các giả thiết $(H_1^{//})$, $(H_2^{//})$, $(H_3^{//})$. Áp dụng định lí 2.3 cho bài toán (1.1)-(1.4) tương ứng với $\gamma_2 = 0$, và $\gamma_1(x,t)$ thay cho $\tilde{\gamma}_1(x,t) = \gamma_1(x,t) + (\gamma_2 * u_{m-1}^+)(x,t)$, ta có duy nhất một $u_m \in L^2(0,T;H^1) \cap L^\infty(0,T;L^2)$, $u_m(x,t) \geq 0$ trong $Q_T = (0,1)\times(0,T)$ là nghiệm yếu của bài toán (2.6).

Ta sẽ chứng minh rằng dãy hàm $\{u_m\}$ hội tụ mạnh về nghiệm $C_1(x,t)$ của bài toán (1.1)-(1.4) (theo một chuẩn thích hợp).

Khi đó, dĩ nhiên ta cũng có $C_1(x,t) \geq 0$ a.e. $(x,t) \in Q_T$.

Đặt $w_m = u_{m+1} - u_m$, khi đó w_m là nghiệm yếu của bài toán

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w_m}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial w_m}{\partial x} + q_1(x,t)w_m\right) + \mu_2 w_m \\ \qquad\qquad = \left(\gamma_2 * (u_m^+ - u_{m-1}^+)\right)(x,t), \quad 0 < x < 1,\ 0 < t < T, \\ \dfrac{\partial w_m}{\partial x}(0,t) + q_1(0,t)w_m(0,t) = 0, \quad 0 < t < T, \\ \dfrac{\partial w_m}{\partial x}(1,t) + q_1(1,t)w_m(1,t) = 0, \quad 0 < t < T, \\ w_m(x,0) = 0, \quad 0 < x < 1, \\ w_m \in L^2(0,T;H^1) \cap L^\infty(0,T;L^2). \end{cases} \tag{2.7}$$

Nhân phương trình thứ nhất của (2.7) bởi w_m, tích phân từng phần theo biến x, và dùng điều kiện biên $(2.7)_{2,3}$, sau đó tích phân từng phần theo biến t, và sắp xếp lại, ta có

$$\begin{aligned} &\|w_m(t)\|^2 + 2\int_0^t \left\|\frac{\partial w_m}{\partial x}(s)\right\|^2 ds + 2\mu_2 \int_0^t \|w_m(s)\|^2 ds \\ &\quad = -2\int_0^t ds \int_0^1 q_1(x,s) w_m(s) \frac{\partial w_m}{\partial x}(s) dx \\ &\quad + 2\int_0^t \left\langle \left(\gamma_2 * (u_m^+ - u_{m-1}^+)\right)(s), w_m(s)\right\rangle ds = \tilde{I}_1 + \tilde{I}_2. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Ta lần lượt đánh giá hai tích phân bên vế phải của (2.8) như sau

Đánh giá tích phân $\widetilde{I}_1 = -2\int_0^t ds \int_0^1 q_1(x,s) w_m(s) \frac{\partial w_m}{\partial x}(s) dx.$

$$\left|\widetilde{I}_1\right| \le \int_0^t \|q_1(s)\|_{L^\infty}^2 \|w_m(s)\|^2 ds + \int_0^t \left\|\frac{\partial w_m}{\partial x}(s)\right\|^2 ds. \tag{2.9}$$

Đánh giá tích phân $\widetilde{I}_2 = 2\int_0^t \left\langle \left(\gamma_2 * (u_m^+ - u_{m-1}^+)\right)(s), w_m(s)\right\rangle ds.$

$$\left|\widetilde{I}_2\right| \le \int_0^t \left\|\left(\gamma_2 * (u_m^+ - u_{m-1}^+)\right)(s)\right\|^2 ds + \int_0^t \|w_m(s)\|^2 ds. \tag{2.10}$$

Sử dụng các bất đẳng thức sau

$$\left|x^+ - y^+\right| \le |x-y|, \quad \forall\, x, y \in R, \tag{2.11}$$

$$\|(\gamma_2 * w)(t)\|^2 \le \int_0^t |\gamma_2(\tau)|^2 d\tau \int_0^t \|w(\tau)\|^2 d\tau, \ \ \forall w \in L^2(Q_T), \ \forall \gamma_2 \in L^2(0,T), \tag{2.12}$$

ta đánh giá số hạng thứ nhất của vế phải (2.10) như sau

$$\int_0^t \left\|\left(\gamma_2 * (u_m^+ - u_{m-1}^+)\right)(s)\right\|^2 ds \le T\|\gamma_2\|_{L^2(0,T)}^2 \int_0^t \|w_{m-1}(\tau)\|^2 d\tau. \tag{2.13}$$

Do đó ta đánh giá $\widetilde{I}_2$ nhờ vào (2.10), (2.13)

$$\left|\widetilde{I}_2\right| \le T\|\gamma_2\|_{L^2(0,T)}^2 \int_0^t \|w_{m-1}(\tau)\|^2 d\tau + \int_0^t \|w_m(s)\|^2 ds. \tag{2.14}$$

Kết hợp (2.8), (2.9), (2.14), ta suy ra

$$Z_m(t) \le T\|\gamma_2\|_{L^2(0,T)}^2 \int_0^T \|w_{m-1}(\tau)\|^2 d\tau + \int_0^t \left(1 + \|q_1(s)\|_{L^\infty}^2\right) Z_m(s) ds, \tag{2.15}$$

trong đó

$$Z_m(t) = \|w_m(t)\|^2 + \int_0^t \left\|\frac{\partial w_m}{\partial x}(s)\right\|^2 ds + 2\mu_2 \int_0^t \|w_m(s)\|^2 ds. \tag{2.16}$$

Do bổ đề Gronwall, ta thu được từ (2.15) rằng

$$Z_m(t) \le T^2 \|\gamma_2\|_{L^2(0,T)}^2 \exp\left[\int_0^T \left(1 + \|q_1(s)\|_{L^\infty}^2\right) ds\right] \|w_{m-1}(\tau)\|_{L^\infty(0,T;L^2)}^2. \tag{2.17}$$

Chú ý rằng $W_1(T) = L^\infty(0,T;L^2) \cap L^2(0,T;H^1)$, là không gian Banach đối với chuẩn

$$\|w\|_{W_1(T)} = \|w\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \left\|\frac{\partial w}{\partial x}\right\|_{L^2(0,T;L^2)}. \tag{2.18}$$

Chúng ta cần bổ đề sau.

Bổ đề 2.5. *Trong không gian* $W_1(T)$, *chuẩn* (2.18) *tương đương với chuẩn*

$$\|w\|_* = \|w\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|w\|_{L^2(0,T;H^1)}. \tag{2.19}$$

Chứng minh bổ đề 2.5. Chứng minh bổ đề 2.5 không khó khăn, chi tiết chứng minh có thể tìm thấy trong [8].

Trở lại chứng minh Định lí 2.4, ta chọn $T > 0$ sao cho

$$k_T = T\|\gamma_2\|_{L^2(0,T)} \exp\left[\frac{1}{2}\int_0^T \left(1 + \|q_1(s)\|_{L^\infty}^2\right) ds\right] < 1. \tag{2.20}$$

Đặt

$$\sigma_m = \|w_m\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \left\|\frac{\partial w_m}{\partial x}\right\|_{L^2(0,T;L^2)} = \|w_m\|_{W_1(T)}. \tag{2.21}$$

Từ (2.17), ta suy ra

$$\sigma_m \le k_T \sigma_{m-1}. \tag{2.22}$$

Từ đây ta suy ra rằng

$$\|u_m - u_{m+p}\|_{W_1(T)} \le \frac{\sigma_0}{1-k_T} k_T^m, \text{ với mọi } m, p = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.23}$$

Như vậy $\{u_m\}$ là dãy Cauchy trong $W_1(T)$, do đó tồn tại $u \in W_1(T)$ sao cho

$$u_m \to u \tag{2.24}$$

trong $W_1(T)$, mạnh.

Từ các bất đẳng thức (2.11) và (2.12), ta suy ra từ (2.24), rằng

$$\gamma_2 * u_{m-1}^+ \to \gamma_2 * u^+ \text{ trong } L^\infty(0,T;L^2), \text{ mạnh.} \tag{2.25}$$

Qua giới hạn trong dạng biến phân của (2.7), nhờ vào (2.24) và (2.25), ta thu được u là nghiệm yếu của bài toán

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + q_1(x,t)u\right) + \mu_2 u = \gamma_1(x,t) \\ \qquad\qquad + (\gamma_2 * u^+)(x,t), \quad 0 < x < 1,\ 0 < t < T, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) + q_1(0,t)u(0,t) = 0, \quad 0 < t < T, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,t) + q_1(1,t)u(1,t) = 0, \quad 0 < t < T, \\ u(x,0) = C_1^0(x), \quad 0 < x < 1. \end{cases} \tag{2.26}$$

Do $u_m(x,t) \geq 0$ trong Q_T và từ (2.24) ta suy ra rằng $u(x,t) \geq 0$ trong Q_T, do đó $u = u^+$ trong Q_T. Cũng từ đây ta suy ra u là nghiệm yếu của bài toán (1.1)-(1.4). Từ tính duy nhất nghiệm ta suy ra $C_1(x,t) = u(x,t) \geq 0$ *a.e.* $(x,t) \in Q_T$.

Định lí 2.4 được chứng minh hoàn tất.

Chú thích. Bên cạnh bài toán (1.5)- (1.7) đã được trình bày trong bài báo này, vẫn còn tồn tại bài toán mở (1.5), (1.6), với các số hạng $R_1(C_1, C_2)$, $R_2(C_1, C_2)$ là phi tuyến có dạng

$$\begin{cases} R_1(C_1,C_2) = \mu_1 - \mu_2 C_1 + \mu_3 C_2 - \mu_4 C_1 C_2, \\ R_2(C_1,C_2) = \overline{\mu}_1 + \overline{\mu}_2 C_1 - \overline{\mu}_3 C_2 - \overline{\mu}_4 C_1 C_2, \end{cases} \tag{2.27}$$

$\mu_i > 0,\ \overline{\mu}_i > 0,\ i = 1, 2, 3, 4$ là các hằng số dương [3].

Chúng tôi vẫn tiếp tục tìm kiếm thêm công cụ thích hợp để giải bài toán này hứa hẹn cho thêm một số kết quả về bài toán này trong thời gian sắp tới.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] R. Alexandre, Alain Phạm Ngọc Định, A. Simon, Nguyễn Thành Long (2003), *A mathematical model for the evaporation of a liquid fuel droplet inside an infinite vessel*, Nonlinear Analysis and Application : to V. Lakshmikantham on his 80th birthday. Vol. **1**, **2**, 117-140, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht.

[2] R. Alexandre, Nguyễn Thành Long, Alain Phạm Ngọc Định**,** *A mathematical model for the evaporation of a liquid fuel droplet, subject to nonlinear contraints*, Applied Mathematics and Computation (to appear).

[3] R. Bader, W. Mers (2001), *Local existance result of the single dopant diffusion including cluster reactions of high order*, Abstract and Applied Analysis, 6 (1) 13–14.

[4] H. Brézis (1983), *Analyse fonctionnelle, Théorie et Applications*, Masson Paris.

[5] J.L. Lions (1969), *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites nonlinéaires*, Dunod; Gauthier – Villars, Paris.

[6] Đỗ Công Khanh (2001), *Giải tích Toán học và các áp dụng*, mã số 1.3.11/98, đề tài nghiên cứu Khoa học Cơ bản giai đoạn 1998-2000, Báo cáo nghiệm thu.

[7] Nguyễn Thành Long (2007), *Phương trình vi phân và hệ động lực*, mã số 100106, đề tài nghiên cứu Khoa học Cơ bản giai đoạn 2006 – 2008, Báo cáo định kì kết quả thực hiện đề tài.

[8] Nguyễn Thanh Sang (2007), *Phương trình parabolic chứa tích chập*, Luận văn Thạc sĩ, Khoá 11, Đại học Cần Thơ.

Tóm tắt

Về một phương trình parabolic chứa tích chập

Chúng tôi xét bài toán biên và ban đầu cho phương trình parabolic tuyến tính

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C_1}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial C_1}{\partial x} + q_1(x,t)C_1\right) + \mu_2 C_1 = \gamma_1(x,t) \\ \qquad\qquad + \displaystyle\int_0^t \gamma_2(t-r)C_1(x,r)dr,\ 0 < x < 1,\ 0 < t < T, \\ \dfrac{\partial C_1}{\partial x}(0,t) + q_1(0,t)C_1(0,t) = 0,\ 0 < t < T, \\ \dfrac{\partial C_1}{\partial x}(1,t) + q_1(1,t)C_1(1,t) = 0,\ 0 < t < T, \\ C_1(x,0) = C_1^0(x), 0 \le x \le 1, \end{cases} \tag{1}$$

trong đó $\mu_2 > 0$ là một hằng số cho trước và $q_1, C_1^0, \gamma_1, \gamma_2$ $\mu_2 > 0$ là các hằng số cho trước. Bài báo gồm 3 phần. Trong phần 1, với các điều kiện $C_1^0 \in L^2(\Omega)$, $q_1 \in C(\overline{Q_T})$, $\gamma_1 \in L^2(Q_T)$, $\gamma_2 \in L^2(0,T)$, $\mu_2 > 0$, chúng tôi chứng minh sự tồn tại và duy nhất của nghiệm yếu toàn cục của bài toán (1). Chứng minh được dựa vào phương pháp Faedo-Galerkin và phương pháp compact yếu. Trong phần 2, với $q_1 \in C^1(\overline{Q_T})$, $\gamma_1, \gamma_1' \in L^2(Q_T)$, $\gamma_2 \in H^1(0,T)$, $\mu_2 > 0$, chúng tôi chứng minh nghiệm duy nhất $C_1 \in L^\infty(0,T;H^1) \cap L^2(0,T;H^2) \cap C^0([0,T];H^1) \cap H^1(Q_T)$, $C_1' \in L^2(Q_T)$,

nếu điều kiện đầu $C_1^0 \in H^1(\Omega)$, với một số điều kiện khác. Cuối cùng, trong phần 3, với điều kiện đầu $C_1^0 \in L^2(\Omega)$, $C_1^0 \geq 0$, *a.e.* $x \in \Omega$. cùng với một số điều kiện khác, chúng tôi cũng thu được một nghiệm không âm C_1 của bài toán (1) nếu ta giả sử rằng $C_1^0 \in L^2(\Omega)$, $C_1^0 \geq 0$, *a.e.* $x \in \Omega$.

Abstract

On a parabolic equation involving convolution

We consider the initial-boundary value problem for the linear parabolic equation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C_1}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial C_1}{\partial x} + q_1(x,t)C_1\right) + \mu_2 C_1 = \gamma_1(x,t) \\ \qquad\qquad + \displaystyle\int_0^t \gamma_2(t-r)C_1(x,r)dr, \ 0 < x < 1, 0 < t < T, \\ \dfrac{\partial C_1}{\partial x}(0,t) + q_1(0,t)C_1(0,t) = 0, \ 0 < t < T, \\ \dfrac{\partial C_1}{\partial x}(1,t) + q_1(1,t)C_1(1,t) = 0, \ 0 < t < T, \\ C_1(x,0) = C_1^0(x), 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \tag{1}$$

where $\mu_2 > 0$ is given constant and $q_1, C_1^0, \gamma_1, \gamma_2$ are given functions.

In this paper, we consider three main parts. In Part 1, under conditions $C_1^0 \in L^2(\Omega)$, $q_1 \in C(\overline{Q_T})$, $\gamma_1 \in L^2(Q_T)$, $\gamma_2 \in L^2(0,T)$, $\mu_2 > 0$, we prove a theorem of existence and uniqueness of a weak solution C_1 of problem (1). The proof is based on the Faedo-Galerkin method and the weak compact method. For the case of $q_1 \in C^1(\overline{Q_T})$, $\gamma_1, \gamma_1' \in L^2(Q_T)$, $\gamma_2 \in H^1(0,T)$, $\mu_2 > 0$, in Part 2, we prove that the unique solution C_1 belongs to $L^\infty(0,T;H^1) \cap L^2(0,T;H^2) \cap C^0([0,T];H^1) \cap H^1(Q_T)$, with $C_1' \in L^2(Q_T)$, if we make the assumption that $C_1^0 \in H^1(\Omega)$, and some others. Finally, in Part 3 we obtain a non-negative solution C_1 of the problem (1) if we make the assumption that $C_1^0 \in L^2(\Omega)$, $C_1^0 \geq 0$, *a.e.* $x \in \Omega$.