PHÂN LOẠI LỚP CÁC MD-ĐẠI SỐ NĂM CHIỀU VỚI IDEAL DẪN XUẤT GIAO HOÁN BỐN CHIỀU

Lê Anh Vũ*

1. Lịch sử vấn đề

1.1 MD-đại số là gì ? Tại sao cần nghiên cứu lớp MD-đại số ?

Xuất phát điểm của vấn đề mà chúng tôi quan tâm là bài toán *mô tả cấu trúc các C*-đại số bằng phương pháp K-hàm tử.*

Năm 1943, I. Gelfand và A. Naimark [3] đưa ra khái niệm C*-đại số. Các C*-đại số nhanh chóng tìm thấy nhiều ứng dụng trong Toán học cũng như trong Vật lí, Cơ học. Tuy nhiên, chính vấn đề mô tả cấu trúc C*-đại số trong trường hợp tổng quát lại rất phức tạp và cho đến nay vẫn còn là bài toán mở.

Năm 1974, Đỗ Ngọc Diệp [2] đã *sử dụng các K-hàm tử đồng điều của Brown-Douglas-Fillmore (còn gọi là K-hàm tử BDF) để đặc trưng C*-đại số* C*(**Aff**$\mathbb{R}$) của nhóm các phép biến đổi Affine trên đường thẳng thực $\mathbb{R}$. Bởi thế phương pháp mô tả cấu trúc C*-đại số bằng các K-hàm tử BDF còn gọi là *phương pháp của Đỗ Ngọc Diệp* (*Diep's method*). Năm 1975, J. Rosenberg [7] đã sử dụng phương pháp này để mô tả C*-đại số C*(**Aff**$\mathbb{C}$) của nhóm các phép biến đổi Affine trên đường thẳng phức $\mathbb{C}$ và C*-đại số của một vài nhóm Lie giải được khác. Năm 1977, Đỗ Ngọc Diệp [2] đã cải tiến phương pháp của mình để đặc trưng các C*-đại số kiểu I bằng các mở rộng lặp nhiều tầng. Đến lúc này, các K-hàm tử BDF dường như không còn thích hợp với việc mô tả C*-đại số của các nhóm Lie khác cũng như các C*-đại số khác nữa. Một cách tự nhiên nảy sinh hai vấn đề lớn.

– **Vấn đề 1** : *Tổng quát hoá các K-hàm tử BDF theo cách nào đó để có thể mô tả được một lớp rộng hơn các C*-đại số.*

* PGS.TS, Khoa Toán – Tin học Trường ĐHSP Tp.HCM

– **Vấn đề 2** : *Đi tìm lớp các C*-đại số hoặc lớp các nhóm Lie mà C*-đại số của chúng có khả năng mô tả được bằng các K-hàm tử mở rộng.*

Năm 1980, G. G. Kasparov [4] đã nghiên cứu vấn đề thứ nhất và thành công trong việc tổng quát hoá các K-hàm tử BDF thành các *K-song hàm tử toán tử* (còn gọi là các *KK-hàm tử*) vừa đồng điều vừa đối đồng điều. Ngay sau đó, Kasparov đã sử dụng các KK-hàm tử của mình để mô tả C*-đại số C*($\mathbf{H_3}$) của nhóm Heisenberg $\mathbf{H_3}$.

Vấn đề thứ hai có liên quan mật thiết với một phương pháp nổi tiếng và đóng vai trò then chốt trong lí thuyết biểu diễn nhóm Lie – đó là *phương pháp quĩ đạo* do Kirillov khởi xướng vào năm 1962. Năm 1980, chính phương pháp quĩ đạo của Kirillov đã gợi ý để Đỗ Ngọc Diệp đề nghị xét lớp các *MD-đại số* và *MD-nhóm*. Lớp này rất đơn giản về phương diện phân tầng các K-quĩ đạo nên nói chung C*-đại số của chúng có thể mô tả được nhờ các KK-hàm tử.

Giả sử G là một nhóm Lie thực giải được n chiều (n là một số tự nhiên dương). G được gọi là một *MDn-nhóm* nếu các K-quĩ đạo của nó hoặc là không chiều hoặc có chiều là một hằng số k (chẵn) nào đó không vượt quá n. Khi k = n thì G còn được gọi là một $\overline{MDn}$*-nhóm*. Đại số Lie(G) của mỗi MDn-nhóm (tương ứng $\overline{\text{MDn}}$-nhóm) được gọi là một *MDn-đại số* (tương ứng $\overline{MDn}$*-đại số*). Rõ ràng lớp $\overline{\text{MD}}$ là con của lớp MD. Đến đây, một bài toán lớn được đặt ra là *phân loại các MD-đại số đồng thời mô tả C*-đại số của các MD-nhóm bằng phương pháp KK-hàm tử.*

Năm 1984, Hồ Hữu Việt [8] đã phân loại triệt để các $\overline{\text{MD}}$-đại số. Lớp này chỉ gồm các đại số Lie giao hoán $\mathbb{R}^n$, đại số Lie(**Aff**$\mathbb{R}$) và đại số Lie(**Aff**$\mathbb{C}$). Ngay sau đó, Hồ Hữu Việt đã dùng phương pháp KK-hàm tử để mô tả C*($\widetilde{\text{Aff}}\,\mathbb{C}$) của $\widetilde{\text{Aff}}\,\mathbb{C}$, ở đó $\widetilde{\text{Aff}}\,\mathbb{C}$ là phủ phổ dụng của nhóm **Aff**$\mathbb{C}$. Như vậy, cùng với các kết quả có trước của Đỗ Ngọc Diệp và Rosenberg, bài toán đối với các $\overline{\text{MD}}$-đại số và $\overline{\text{MD}}$-nhóm xem như đã được giải quyết triệt để.

Thế còn các MD-đại số và MD-nhóm thì sao ? Đáng tiếc là đối với chúng, vấn đề trở nên phức tạp hơn nhiều. Chú ý rằng mọi nhóm (tương ứng đại số) Lie thực giải được không quá 3 chiều đều là MD-nhóm (tương ứng MD-đại số), hơn nữa chúng đã được liệt kê hết từ lâu trong lí thuyết đại số Lie. Bởi vậy, chúng ta chỉ cần bắt đầu từ các MDn-đại số và MDn-nhóm với $n \geq 4$.

Ngoài ra, chúng ta quan tâm nghiên cứu các MD-nhóm và MD-đại số còn do sự kiện quan trọng sau đây : đối với mỗi MD-nhóm, họ các K-quĩ đạo chiều cực đại của nó tạo thành một *phân lá đo được* theo nghĩa của A. Connes [1]. Các phân lá này được gọi là các *MD-phân lá* liên kết với các MD-nhóm đã xét. Phân lá là khái niệm xuất xứ từ lí thuyết các phương trình vi phân nhưng kể từ công trình của G. Reeb [6] năm 1952, lí thuyết các phân lá đã trở thành một nhánh thuộc lĩnh vực Tô pô – Hình học và nhanh chóng phát triển. Năm 1982, nghiên cứu các đa tạp phân lá, A. Connes [1] đưa ra khái niệm phân lá đo được và gắn mỗi phân lá đo được với một C*-đại số mà được gọi là *C*-đại số của phân lá* đó. Lập tức nẩy sinh câu hỏi là liệu các *C*-đại số phân lá có thích hợp với phương pháp KK-hàm tử hay không* ? Câu trả lời là khẳng định. Năm 1985, A. M. Torpe [9] đã dùng các KK-hàm tử để mô tả thành công C*-đại số của các phân lá Reeb trên xuyến 2 chiều. Đến đây, lại xuất hiện thêm bài toán *mô tả C*-đại số của các MD-phân lá*.

Đó chính là các lí do cơ bản để chúng ta quan tâm nghiên cứu lớp các MD-đại số và MD-nhóm.

1.2 Các kết quả trước đây liên quan trực tiếp đến bài báo

– *Giải quyết triệt để lớp MD4. Cụ thể là phân loại tất cả các MD4-đại số, mô tả hình học K-biểu diễn của các MD4-nhóm liên thông bất khả phân, phân loại tô pô tất cả các MD4-phân lá đồng thời mô tả tất cả các C*-đại số của các MD4-phân lá bằng phương pháp KK-hàm tử* ([10], [11], [12]).

– *Phân loại các MD5-đại số với ideal dẫn xuất giao hoán chiều không quá 3, mô tả hình học K-biểu diễn của các MD5-nhóm liên thông bất khả phân tương ứng và xét các MD5-phân lá tương ứng với các MD5-nhóm đã xét* ([13], [14], [15], [16]).

1.3 Tóm tắt kết quả chính của bài báo

Bài báo sẽ cho một *phân loại (chính xác đến đẳng cấu đại số Lie) tất cả các MD5-đại số với ideal dẫn xuất giao hoán 4 chiều*.

Trước khi phát biểu và chứng minh kết quả chính, chúng ta sẽ nhắc lại một số khái niệm có liên quan để bạn đọc tiện theo dõi.

2. Nhắc lại vài khái niệm và tính chất cơ bản

2.1 Biểu diễn phụ hợp, K-biểu diễn và dạng song tuyến Kirillov

2.1.1. Biểu diễn phụ hợp

Cho G là một nhóm Lie tuỳ ý và Γ là đại số Lie của nó. Giả sử G tác động lên Γ bởi $\mathrm{Ad} : G \longrightarrow \mathrm{Aut}\Gamma$ được định nghĩa như sau :

$$\mathrm{Ad}(g) := (L_g.R_{g^{-1}})_* : \mathbf{\Gamma} \longrightarrow \mathbf{\Gamma},\ \forall g \in \mathbf{G};$$

trong đó L_g (tương ứng $R_{g^{-1}}$) là phép tịnh tiến trái (tương ứng, phải) của **G** theo phần tử $g \in \mathbf{G}$ (tương ứng, $g^{-1} \in \mathbf{G}$). Tác động Ad còn gọi là *biểu diễn phụ hợp* của **G** trong **Γ**.

2.1.2. Biểu diễn đối phụ hợp

Kí hiệu Γ* là không gian đối ngẫu của Γ. Khi đó biểu diễn Ad cảm sinh ra tác động $K : G \longrightarrow \mathrm{Aut}\Gamma^*$ của G lên Γ* theo cách sau đây :

$$\langle K(g)F, X\rangle := \langle F, \mathrm{Ad}(g^{-1})X\rangle,\ \forall F \in \mathbf{\Gamma^*},\ \forall X \in \mathbf{\Gamma},\ \forall g \in \mathbf{G};$$

ở đó với mỗi $F \in \mathbf{\Gamma^*}$, $X \in \mathbf{\Gamma}$, kí hiệu $\langle F, X\rangle$ chỉ giá trị của dạng tuyến tính $F \in \mathbf{\Gamma^*}$ tại trường vectơ (bất biến trái) $X \in \mathbf{\Gamma}$. Tác động K được gọi là *K-biểu diễn* hay *biểu diễn đối phụ hợp* của **G** trong **Γ***. Mỗi quĩ đạo ứng với K-biểu diễn được gọi là *K-quĩ đạo* hay *quĩ đạo Kirillov* của **G** (trong **Γ***). Như vậy, K-quĩ đạo Ω_F chứa phần tử F được cho bởi

$$\Omega_F := \{ K(g)F \ / \ g \in \mathbf{G} \}.$$

Mỗi K-quĩ đạo của G luôn là một G-đa tạp vi phân thuần nhất với số chiều chẵn và trên đó có thể đưa vào một cấu trúc symplectric tự nhiên (tương thích với tác động của G) cảm sinh bởi dạng song tuyến tính phản xứng Kirillov.

2.1.3. Dạng song tuyến tính Kirillov

Với mỗi $F \in \Gamma^*$, ta xác định dạng B_F như sau

$$B_F(X, Y) := \langle F, [X, Y] \rangle, \forall X, Y \in \Gamma.$$

Hiển nhiên B_F là dạng song tuyến tính phản xứng vì móc Lie có tính chất đó.

Kí hiệu $\mathbf{G}_F$ là cái ổn định hoá của F dưới tác động K của **G** trong Γ^*, tức là

$$\mathbf{G}_F := \{g \in \mathbf{G} \ / \ K(g)F = F\}.$$

Đặt $\Gamma_F := \text{Lie}(\mathbf{G}_F)$ là đại số Lie của $\mathbf{G}_F$. Đại số Lie Γ_F và dạng song tuyến tính Kirillov B_F có quan hệ mật thiết với nhau, hơn nữa chúng rất có ích trong việc xác định số chiều của K-quĩ đạo Ω_F chứa F.

2.1.4. Mệnh đề [5] *Hạt nhân của B_F và số chiều của Ω_F được cho bởi các hệ thức sau đây* :

$$\text{Ker}B_F = \Gamma_F \text{ và } \dim\Omega_F = \dim\Gamma - \dim\Gamma_F. \ \square$$

2.2 Các MD-nhóm và MD-đại số

2.2.1. Định nghĩa. Giả sử G là một nhóm Lie thực giải được n chiều (n là một số tự nhiên dương nào đó). G được gọi là một *MDn-nhóm* nếu các K-quĩ đạo của nó hoặc là không chiều hoặc có chiều là một hằng số k (chẵn) nào đó không vượt quá n.

2.2.2. Định nghĩa. Đại số Lie của mỗi MDn-nhóm được gọi là một *MDn-đại số*.

2.2.3. Mệnh đề [8] *Điều kiện cần để đại số Lie giải được Γ thuộc lớp MD-đại số là ideal dẫn xuất thứ hai*

$$\Gamma^2 := [\Gamma^1, \Gamma^1] = [[\Gamma, \Gamma], [\Gamma, \Gamma]]$$

của nó giao hoán. $\square$

Chú ý rằng điều kiện cần nêu trên không phải là điều kiện đủ. Nói một cách khác, có những đại số Lie giải được với ideal dẫn xuất thứ hai giao hoán, thậm chí triệt tiêu nhưng vẫn không phải là MD-đại số. Tuy nhiên, nhờ điều kiện này, để phân loại các MD-đại số, ta chỉ cần xét các đại số Lie giải được với Γ^2 giao hoán. Nói riêng có thể xét lớp con các đại số Lie giải được với Γ^2 triệt tiêu, tức là ideal dẫn xuất thứ nhất Γ^1 giao hoán. Gần đây, trong **[Vu4]**, **[Vu5]**, **[Vu-Tr]**, **[Vu-Th]** tác giả đã xét các MD5-đại số với ideal dẫn xuất thứ nhất giao hoán không quá 3 chiều. Bài này sẽ phân loại nốt các MD5-đại số với $\mathbf{\Gamma^1}$ giao hoán 4 chiều.

3. Kết quả chính

3.1 Các kí hiệu

Từ đây về sau, $\mathbf{\Gamma}$ sẽ là kí hiệu để chỉ một đại số Lie thực giải được 5 chiều. Ta luôn chọn một cơ sở thích hợp $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ trong $\mathbf{\Gamma}$. Lúc đó, với tư cách là một không gian vectơ 5 chiều, $\mathbf{\Gamma} \equiv \mathbb{R}^5$. Không gian đối ngẫu của $\mathbf{\Gamma}$ được kí hiệu là $\mathbf{\Gamma^*}$. Ta cũng có đồng nhất thức $\mathbf{\Gamma^*} \equiv \mathbb{R}^5$ với cơ sở đối ngẫu $(X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*, X_5^*)$ của cơ sở $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$. Đối với các MD5-đại số với ideal dẫn xuất giao hoán 4 chiều, ta có định lí phân loại sau.

3.2 Định lí

Giả sử Γ là một MD5-đại số với $\Gamma^1 := [\Gamma, \Gamma] \cong \mathbb{R}^4$ (đại số Lie giao hoán 4 chiều).

– *Nếu $\mathbf{\Gamma}$ khả phân thì nó có dạng $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{h} \oplus \mathbb{R}$, ở đó $\mathbf{h}$ là một MD4-đại số.*

– *Nếu $\mathbf{\Gamma}$ bất khả phân thì ta luôn có thể chọn được một cơ sở thích hợp $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ trong $\mathbf{\Gamma}$ sao cho $\mathbf{\Gamma^1} = \langle X_2, X_3, X_4, X_5 \rangle \cong \mathbb{R}^4$, $ad_{X_1} \in End(\Gamma^1)(\cong Mat_4(\mathbb{R}))$, và $\mathbf{\Gamma}$ đẳng cấu với một và chỉ một trong các đại số Lie dưới đây.*

1. $\mathbf{\Gamma_{5,4,1(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)}}$ **:**

$$ad_{X_1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \; \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}, \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_1.$$

2. $\mathbf{\Gamma_{5,4,2(\lambda_1,\lambda_2)}}$ **:** $$ad_{X_1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \; \lambda_1, \lambda_2, \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}, \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

3. $\Gamma_{5,4,3(\lambda)}$: $ad_{X_1} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.

4. $\Gamma_{5,4,4(\lambda)}$: $ad_{X_1} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.

5. $\Gamma_{5,4,5}$: $ad_{X_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

6. $\Gamma_{5,4,6(\lambda_1,\lambda_2)}$: $ad_{X_1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $\lambda_1, \lambda_2, \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}, \lambda_1 \neq \lambda_2$.

7. $\Gamma_{5,4,7(\lambda)}$: $ad_{X_1} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.

8. $\Gamma_{5,4,8(\lambda)}$: $ad_{X_1} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.

9. $\Gamma_{5,4,9(\lambda)}$: $ad_{X_1} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.

10. $\Gamma_{5,4,10}$ **:** $ad_{X_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

11. $\Gamma_{5,4,11\,(\lambda_1,\lambda_2,\varphi)}$ **:**

$$ad_{X_1} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}; \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \lambda_1 \neq \lambda_2, \varphi \in (0,\pi).$$

12. $\Gamma_{5,4,12\,(\lambda,\varphi)}$ **:** $ad_{X_1} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}; \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \varphi \in (0,\pi).$

13. $\Gamma_{5,4,13\,(\lambda,\varphi)}$ **:** $ad_{X_1} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}; \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \varphi \in (0,\pi).$

14. $\Gamma_{5,4,14\,(\lambda,\mu,\varphi)}$ **:** $ad_{X_1} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -\mu \\ 0 & 0 & \mu & \lambda \end{bmatrix}; \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \mu > 0, \varphi \in (0,\pi).$

3.3 Phép chứng minh của định lí

3.3.1. Bổ đề

Mỗi đại số Lie thực 5 chiều Γ *với ideal dẫn xuất thứ nhất* Γ^1 *giao hoán 4 chiều đều là MD5-đại số.*

3.3.2. Chứng minh bổ đề

Giả sử Γ là một đại số Lie thực 5 chiều với $\Gamma^1 = \mathbb{R}^4$. Hiển nhiên là ta luôn chọn được một cơ sở $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ thích hợp trong Γ sao cho

$$\boldsymbol{\Gamma}^{\mathbf{1}} = < X_2, X_3, X_4, X_5 > \cong \mathbb{R}^4, \ \mathrm{ad}_{X_1} \in \mathrm{End}(\boldsymbol{\Gamma}^{\mathbf{1}}) \cong Mat_4(\mathbb{R}).$$

Giả sử $\mathrm{ad}_{X_1} = (a_{ij})_4$; i, j ∈ {2, 3, 4, 5}. Lấy phần tử

$$\mathrm{F} = \alpha_1 X_1^* + \alpha_2 X_2^* + \alpha_3 X_3^* + \alpha_4 X_4^* + \alpha_5 X_5^* \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)$$

bất kì của không gian đối ngẫu $\Gamma^* \equiv \mathbb{R}^5$ với cơ sở đối ngẫu $(X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*, X_5^*)$ của cơ sở $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$. Xét K-quĩ đạo Ω_F chứa F. Ta cần chứng tỏ rằng Ω_F hoặc không chiều, hoặc có chiều là một hằng số chẵn nào đó không vượt quá 4. Theo mệnh đề **2.1.4**, ta có $\mathrm{KerB}_F = \boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{F}}$ và $\dim\Omega_F = \dim\boldsymbol{\Gamma} - \dim\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{F}}$.

Nhớ rằng $\mathrm{KerB}_F = \{U \in \Gamma \,/ < F, [U, X_i] > = 0 \,;\, i = 1, 2, 3, 4, 5\}$. Do đó ta có

$$U = a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 + a_4 X_4 + a_5 X_5 \equiv (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in \mathrm{KerB}_F$$

$\Leftrightarrow < F, [U, X_i] > = 0$; i = 1, 2, 3, 4, 5

$\Leftrightarrow B(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)^T = \mathbf{0}$;

ở đó $(.)^T$ chỉ phép lấy chuyển vị ma trận, còn B là ma trận sau đây

$$B = \begin{pmatrix} <F,[X_1,X_1]> & <F,[X_2,X_1]> & <F,[X_3,X_1]> & <F,[X_4,X_1]> & <F,[X_5,X_1]> \\ <F,[X_1,X_2]> & <F,[X_2,X_2]> & <F,[X_3,X_2]> & <F,[X_4,X_2]> & <F,[X_5,X_2]> \\ <F,[X_1,X_3]> & <F,[X_2,X_3]> & <F,[X_3,X_3]> & <F,[X_4,X_3]> & <F,[X_5,X_3]> \\ <F,[X_1,X_4]> & <F,[X_2,X_4]> & <F,[X_3,X_4]> & <F,[X_4,X_4]> & <F,[X_5,X_4]> \\ <F,[X_1,X_5]> & <F,[X_2,X_5]> & <F,[X_3,X_5]> & <F,[X_4,X_5]> & <F,[X_5,X_5]> \end{pmatrix}.$$

Suy ra $\dim\Omega_F = \dim\boldsymbol{\Gamma} - \dim\boldsymbol{\Gamma}_{\mathbf{F}} = \mathrm{rank}(B)$. Tính toán trực tiếp ta được

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\sum_{i=2}^{5} a_{i2}\alpha_i & -\sum_{i=2}^{5} a_{i3}\alpha_i & -\sum_{i=2}^{5} a_{i4}\alpha_i & -\sum_{i=2}^{5} a_{i5}\alpha_i \\ \sum_{i=2}^{5} a_{i2}\alpha_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sum_{i=2}^{5} a_{i3}\alpha_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sum_{i=2}^{5} a_{i4}\alpha_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sum_{i=2}^{5} a_{i5}\alpha_i & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dễ thấy rằng rank(B) $\in \{0, 2\}$. Do đó Ω_F chỉ hoặc không chiều hoặc 2 chiều. Vậy Γ là một MD5-đại số. □

3.3.3. Chứng minh định lí

Bây giờ phép chứng minh định lí dựa vào phân loại đồng dạng của ma trận thực cấp bốn ad_{X_1}. Chú ý rằng trong dạng chuẩn tắc của ma trận ad_{X_1}, ta luôn có thể đổi cơ sở một cách thích hợp để cho một trong các giá trị riêng thực hoặc mô đun của giá trị riêng phức của ad_{X_1} bằng một. Từ đó ta nhận được đúng 14 dạng khác nhau của ad_{X_1} như đã liệt kê trong định lí 3.2. Hơn nữa hai đại số ứng với hai dạng khác nhau của ad_{X_1} không đẳng cấu. Định lí 3.2 được chứng minh hoàn toàn. □

3.4 Nhận xét

Nhắc lại rằng, mỗi đại số Lie thực **Γ** xác định duy nhất một nhóm Lie liên thông đơn liên **G** sao cho Lie(**G**) = **Γ**. Do đó ta cũng nhận được 14 họ MD5-nhóm liên thông đơn liên tương ứng với các MD5-đại số được liệt kê trong định lí **3.2**. Chẳng hạn, $\mathbf{G} = \mathbf{G}_{5,4,1}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ là MD5-nhóm liên thông đơn liên tương ứng với MD5-đại số $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}_{5,4,1}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Các họ MD5-nhóm này đều bất khả phân. Trong bài báo khác, chúng tôi sẽ mô tả K-biểu diễn của 14 họ các MD5-nhóm này và xét họ các MD5-phân lá tương ứng với chúng.

3.5 Vài bài toán mở cần tiếp tục nghiên cứu

3.5.1. Đối với tất cả các MD5-đại số và MD5-nhóm liên thông đơn liên đã xét, cần phân loại tô pô các MD5-phân lá tương ứng và mô tả C*-đại số của các kiểu MD5-phân lá không phải phân thớ bằng phương pháp KK-hàm tử.

3.5.2. Xây dựng lượng tử hoá biến dạng trên các MD5-nhóm đã phân loại.

3.5.3. Phân loại các MD5-đại số với ideal dẫn xuất thứ nhất không giao hoán để hoàn thành việc phân loại triệt để toàn bộ lớp MD5-đại số.

3.5.4. Giải quyết các vấn đề tương tự như đã làm cho các MD5-đại số và MD5-nhóm đã xét cho các MD5-đại số và MD5-nhóm còn lại.

3.5.5. Tiếp tục xét lớp MDn với $n \geq 6$ đồng thời xét trường hợp n tổng quát.

Một số kết quả tiếp theo bài báo của tác giả liên quan đến các vấn đề nêu ở **3.5.1** và **3.5.2** sẽ được đăng ngay trong quyển tạp chí này, đó là các bài của Dương Minh Thành và bài của tác giả cùng với Dương Quang Hòa.

Lời cảm ơn : Kết quả chính của bài này đã được tác giả báo cáo tại Hội thảo quốc tế lần thứ hai về Đại số và Tổ hợp (ICAC–07) ở Bắc kinh, Trung quốc trong các ngày 6-10 tháng 7 năm 2007. Tác giả hân hạnh được cám ơn Ban tổ chức Hội thảo, đặc biệt là giáo sư Shangzhi Li đã tài trợ cho tác giả tham dự và đọc báo cáo tại Hội thảo.

TÀI LIỆUTHAM KHẢO

[1]. A. Connes (1982), A Survay of Foliations and Operator Algebras, *Proc. Symp. Pure Math.*, 38, 512 – 628, Part I.

[2]. Do Ngoc Diep (1999), Method of Nocommutative Geometry for Group C^*-algeras, Chapman and Hall/ CRC Press Research Notes in Mathematics Series, #416.

[3]. I. Gelfand and A. Naimark (1943), On the imbedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space, *Mat. Sbornik*, 12, 197 -213 (In Russian).

[4]. G. G. Kasparov (1981), The operator K-functor and extensions of C*-algebras, *Math. USSR Izvestija*, 16, No 3, 513 – 572.

[5]. A. A. Kirillov (1976), Elements of the Theory of Prepresentations, *Springer – Verlag*, Berlin – Heidenberg – New York.

[6]. G. Reeb (1952), Sur certains proprie'te's topologiques de varie'te's feuillete'es, Actualite' *Sci. Indust*. 1183, Hermann, Paris.

[7]. J. Rosenberg (1976), The C*-algebras of some real p-adic solvable groups, *Pacific J. Math*, 65, No 1, 175 – 192.

[8]. V. M. Son et H. H. Viet (1984), Sur la structure des C*-algebres d'une classe de groupes de Lie, *J. Operator Theory*, 11, 77 – 90.

[9]. A.M. Torpe (1985), K-theory for the Leaf Space of Foliations by Reeb Component, *J. Func. Anal.*, 61, 15-71.

[10]. Le Anh Vu (1990), On the Structure of the C*- algebra of the Foliation Formed by the K–orbits of Maximal Dimension of the Real Diamond Group, *J. Operator Theory*, 24, 227 – 238.

[11]. Le Anh Vu (1990), On the Foliations Formed by the Generic K– orbits of the MD4–Groups, *Acta Math.Vietnam*, N^0 2, 39 – 55.

[12]. Le Anh Vu (1993), Foliations Formed by Orbits of Maximal Dimension in the Co– adjoint Representation of a Class of Solvable Lie Groups, *Vest. Moscow Uni., Math. Bulletin*, Vol. 48, N^0 3, 24 – 27.

[13]. Le Anh Vu (2003), Foliations Formed by K – orbits of Maximal Dimension of Some MD5–Groups, *East–West Journal of Mathematics*, Vol. 5, N^O 3, pp. 159 – 168.

[14]. Le Anh Vu (2005), On a subclass of 5-dimensional Lie Algebras Which have 3-dimensional Commutative Derived Ideals, *East-West J. Math*, 7 N^o 1, 13-22.

[15]. Lê Anh Vũ, Nguyễn Công Trí (2006), Vài ví dụ về các MD5-đại số và các MD5-phân lá đo được liên kết với các MD5-nhóm tương ứng, *Tạp chí Khoa học Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh*, 42 N^o 8, 14-32.

[16]. Le Anh Vu, Duong Minh Thanh (2006), The Geometry of K-orbits of a Subclass of MD5-groups and Foliations Formed by Their Generic K-orbits,

Contributions in Math. And App., Proceeding of the International Conference in Math. And App., December 2005, Bangkok, Thailand, A special Volume Published by East-West J. Math., 169-184.

Tóm tắt

Phân loại lớp các MD-Đại số năm chiều
với Ideal dẫn xuất giao hoán bốn chiều

Bài báo này xét một lớp con các MD5-đại số, tức là các đại số Lie thực giải được 5 chiều mà nhóm Lie liên thông, đơn liên tương ứng chỉ có các quĩ đạo trong biểu diễn đối phụ hợp (K-quĩ đạo) hoặc không chiều hoặc chiều cực đại. Kết quả cơ bản mà bài báo đưa ra là phân loại (chính xác đến đẳng cấu đại số Lie) tất cả các MD5-đại số với ideal dẫn xuất giao hoán 4 chiều.

Abstract

Classification of 5-dimensional md-algebras which
have 4-dimensional commutative derived ideals

The paper presents a subclass of the class of MD5–algebras, i.e., five dimensional solvable Lie algebras that K-orbits of corresponding connected and simply connected Lie groups are orbit of zero or maximal dimension. The article is about the classification (exact to an isomorphism) of all 5-dimensional MD–algebras which have 4-dimensional commutative derived ideal.