TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH
TẠP CHÍ KHOA HỌC
KHOA HỌC GIÁO DỤC
Tập 15, Số 1 (2018): 60-67
ISSN: 1859-3100

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE
EDUCATION SCIENCE
Vol. 15, No. 1 (2018): 60-67

Email: tapchikhoahoc@hcmue.edu.vn; Website: http://tckh.hcmue.edu.vn

DẠY HỌC HÀM SỐ LOGISTIC♣ Ở MĨ

Nguyễn Trung Hiếu*

[1] *Trường Trung học thực hành Sài Gòn*

Ngày nhận bài: 08-8-2017; ngày nhận bài sửa: 18-9-2017; ngày duyệt đăng: 22-01-2018

TÓM TẮT

Mô hình tăng trưởng logistic được đề xuất bởi Verhulst vào năm 1838 và được lặp lại bởi Pearl và Reed vào năm 1920. Khi ấy nó được xem là một "luật" *của sự tăng trưởng dân số thực tế. Nó được sử dụng để thay thế mô hình tăng trưởng mũ trong việc dự báo dân số. Sau đó, mô hình toán học này còn được ứng dụng trong nhiều ngành khoa học khác như vật lí, địa lí, hóa học… Vì lí do đó, mà dạy học hàm số logistic ngày càng xuất hiện nhiều trong chương trình dạy học của nhiều nước trên thế giới. Trong bài báo này, chúng tôi giới thiệu việc dạy học hàm số logistic ở bậc trung học ở Mĩ. Nghiên cứu của chúng tôi dựa trên thuyết nhân học của Chevallard (1985).*

Từ khóa: dạy học hàm số logistic, hàm số logistic, mô hình logistic, thuyết nhân học.

ABSTRACT

Teaching logistic function in the USA

Logistic growth model had been proposed by Verhulst in 1838 and reiterated by Pearl and Reed in 1920. At that time, logistic growth model was called a "law" of real population growth. It was used to replace the exponential growth model in predicting population. Later on, this model is also applied in many other sciences such as: physics, geography, chemistry… Therefore, teaching logistic function is increasingly appearing in curriculum of many countries. In this article, we introduce the teaching of logistic function in high schools in the USA. Our research based on the anthropologic theory of Chevallard (1985).

Keywords: logistic function, teaching logistic, logistic model, anthropologic theory.

1. Tại sao hàm số logistic được lựa chọn và những khái niệm có liên quan.

Ở Việt Nam, hàm số logistic tuy thực sự tồn tại trong thể chế dạy học Sinh học, nhưng hoàn toàn không được đề cập trong thể chế dạy học Toán. Cụ thể, chương trình Sinh học đề xuất hai hàm số dùng để mô hình hóa sự tăng trưởng của quần thể là: Hàm số mũ (ứng với mô hình tăng trưởng mũ) và hàm số logistic (ứng với mô hình tăng trưởng logistic). Trong khi ở thể chế dạy học Toán chỉ đề cập đến mô hình tăng trưởng mũ. Đồng thời theo sự khẳng định của sách giáo viên (SGV) Sinh học 12 nâng cao:

Đây là điều kiện giả định vì không tồn tại trong thực tế […] Kiểu tăng trưởng trong điều kiện môi trường không bị giới hạn là không có thực […] Đó là kiểu tăng trưởng theo tiềm năng với đường cong hình chữ J (mô hình tăng trưởng mũ). (SGV Sinh học 12 nâng cao, 2009, tr.284 – 285).

* Email: *nguyenhieu0510@gmail.com*

SGV này cũng khẳng định sự tăng trưởng theo hàm số logistic mới là sự tăng trưởng thực tế. Trong khi đó, theo sách giáo khoa (SGK) Giải tích 12 nâng cao (2014): "Nhiều hiện tượng tăng trưởng của tự nhiên và xã hội, chẳng hạn sự tăng dân số, cũng được tính theo công thức $S = Ae^{rt}$ (3). Vì vậy, công thức (3) còn được gọi là công thức tăng trưởng mũ" (tr.96). Và việc SGK áp dụng công thức này cho hàng loạt các bài toán thực tế về tăng trưởng dân số đã dẫn đến những đáp án có được từ mô hình toán học này lại chưa phù hợp với thực tế. Như vậy, hoàn toàn không có sự kết nối giữa Toán học và Sinh học; nó làm cho hai môn học trở nên xa rời nhau, thậm chí là gây nên sự khó khăn cho học sinh trong việc học hai môn học trên. Trong bài báo này, chúng tôi sẽ làm rõ tiến trình dạy học khái niệm hàm số logistic ở Mĩ. Và các kết quả có được sẽ như một cơ sở tham chiếu để nghiên cứu tính khả thi cho việc dạy – học hàm số logistic trong chương trình Toán phổ thông ở nước ta.

Ở Mĩ, khái niệm hàm số logistic được đưa vào chương trình toán học bậc trung học phổ thông sau khi học sinh đã được học các khái niệm cơ bản của giải tích. Nghiên cứu của chúng tôi cho thấy hàm số logistic được đưa vào nhằm các mục đích: Gắn toán học với thực tiễn (hóa học, sinh học, vật lí, địa lí...), khắc phục các nhược điểm của mô hình tăng trưởng mũ không còn phù hợp, rèn luyện phương pháp mô hình hóa toán học.

Để làm rõ tiến trình đưa vào khái niệm hàm số logistic, chúng tôi lựa chọn giáo trình hiện hành và thông dụng *Precalculus Graphical, Numerical, Algebraic (8^{th} edition)* do Franklin D. Demana chủ biên.

2. Sự trình bày hàm số logistic và mô hình logistic trong giáo trình Precalculus.

Tiến trình dạy học hàm số logistic và mô hình của nó trong giáo trình Precalculus được tóm tắt như sau: **Hàm tăng trưởng mũ → Hàm logistic (đồng nhất với hàm tăng trưởng logistic) → Hàm sigmoid (hàm logistic cơ bản $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$) → Mô hình logistic (đồng nhất với mô hình tăng trưởng logistic).**

Như vậy, hàm số logistic được định nghĩa trước khi giới thiệu về mô hình logistic. Ngoài ra, tác giả đã đồng nhất giữa hàm tăng trưởng logistic và hàm logistic: "Trừ khi có quy định khác, **tất cả hàm số logistic** trong cuốn sách này sẽ là hàm tăng trưởng logistic" (pp.258), dẫn đến sự đồng nhất hai mô hình toán học tương ứng được xây dựng bởi chúng.

Giáo trình giải thích vì sao cần thiết phải nghiên cứu hàm số này (lí do tồn tại) như sau:

Hàm số này, mặc dù có liên hệ với hàm mũ e^x, nhưng không thể được tạo ra từ e^x bằng các phép biến đổi, phép lấy đối xứng, và lấy thêm tiệm cân ngang hay sự kéo dãn theo phương dọc và phép co. Vì thế chúng tôi cho hàm logistic này một sự giới thiệu chính thức (Demana, 2011, pp.258).

Từ lí do đó, giáo trình định nghĩa về hàm số logistic cơ bản: $f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$:

Hàm cơ bản: **Hàm số logistic**

$f(\mathrm{x})=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$

Miền xác định: Tất cả các số thực.

Miền giá trị: $(0,1)$.

Hàm liên tục.

Hàm tăng trên miền xác định.

Hàm đối xứng qua điểm $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$, không phải hàm chẵn cũng không phải hàm lẻ.

Bị giới hạn trên và dưới.

Không có cực trị địa phương.

Tiệm cận ngang: $y=0$ và $y=1$

Không có tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$. (Demana, 2011, pp.258).

Như vậy, toàn bộ 6 thuộc tính đặc trưng cơ bản của hàm logistic đã được đề cập (xem chú thích). Và từ sự trình bày đối với hàm cơ bản, giáo trình đã quy nạp các đặc trưng này cho toàn bộ các hàm logistic (hàm tăng trưởng logistic được đồng nhất với hàm logistic):

Tất cả các hàm tăng trưởng logistic có đồ thị như đồ thị của hàm logistic cơ bản và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=c$ với c là giới hạn của sự tăng trưởng. Tất cả các hàm logistic đều bị giới hạn bởi hai đường tiệm cận ngang $y=0$ và $y=c$, và có miền giá trị (0;c). Mặc dù, mỗi hàm số logistic thì đối xứng qua điểm có tung độ $y=c/2$, tâm đối xứng này không phải lúc nào cũng là giao điểm của đồ thị với trục Oy. (Demana, 2011, pp.259).

Trong đoạn trích trên, giáo trình đã nhấn mạnh điểm đối xứng của hàm số logistic hoàn toàn không phải là giao điểm của hàm số với trục Oy, bởi chỉ đối với hàm logistic dạng $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$ thì ta được trường hợp đặc biệt, là điểm uốn sẽ nằm trên trục Oy. Vì lí do đó, mà ngay sau trình bày định nghĩa về hàm số logistic, giáo trình đã đưa ra ví dụ minh họa. Ví dụ này là bài toán toán học liên quan đến kiểu nhiệm vụ (KNV): "Xác định y - giao điểm của hàm logistic". Sự tồn tại của KNV này theo chúng tôi là để làm sáng tỏ cho nhận định về giao điểm với trục Oy của hàm số không đồng nhất với điểm đối xứng: "Ví dụ 6: Tìm y – giao điểm của hàm số $f(x)=\dfrac{8}{1+3.0,7^{x}}$. Lời giải của giáo trình: y - giao điểm là: $f(0)=\dfrac{8}{1+3.0,7^{0}}=\dfrac{8}{4}=2$" (Demana, 2011, pp.259).

Có ba biểu thức hàm số logistic được giáo trình Precalculus đề cập. Trong đó, hai biểu thức xuất hiện trong định nghĩa quy ước về hàm tăng trưởng logistic: "Lấy a, b, c và k là những hằng số dương, với $b<1$. **Một hàm tăng trưởng logistic** theo x là một hàm được viết dưới dạng sau: $f(x)=\dfrac{c}{1+a.b^{x}}$ hoặc $f(x)=\dfrac{c}{1+a.e^{-kx}}$ với hằng số c được gọi là giới hạn tăng trưởng" (Demana, 2011, pp.258). Trong khi biểu thức còn lại xuất hiện trong phần bài tập, sau khi được học về mô hình tăng trưởng logistic: $f(x)=1+\tanh(\mathrm{x})$ với $\tanh(x)=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$. Ngoài ra, phương trình $y=\dfrac{c}{1+a.e^{-kx}}$ còn được gọi là hồi quy logistic trong Precalculus.

Giáo trình Precalculus cũng nhấn mạnh "ba hàm số có quan hệ họ hàng với nhau: hàm mũ, hàm logistic và hàm logarit" (pp.252). Vậy giảng dạy hàm số logistic cần gắn liền với việc dạy học hàm số mũ và hàm số logarit. Đối với Precalculus, hàm mũ và số e được giới thiệu trước còn khái niệm logarit lại được giảng dạy sau. Ngoài ra, giáo trình cũng đã chỉ ra khái niệm loại của khái niệm hàm số logistic, là hàm số siêu việt. Như vậy, hàm số logistic sẽ mang những thuộc tính đặc trưng khác biệt hoàn toàn với các thuộc tính đặc trưng của hàm đại số. Trong giáo trình này, tồn tại 9 tổ chức toán học (TCTH) liên quan đến 9 kiểu nhiệm vụ (KNV) sau:

Bảng thống kê số lượng bài tập phân theo các KNV trong giáo trình Precalculus

Kí hiệu KNV	**Tên**	**Số lượng**	
		Bài toán toán học	**Bài toán ngoài phạm vi toán học**
T_1	Dùng máy tính để vẽ đồ thị hàm số logistic cho trước	6	0
T_2	Xác định một hoặc nhiều đặc trưng của một hàm số logistic được cho trước bằng biểu thức $f(x)=\dfrac{c}{1+a.e^{-kx}}$.	8	4
T_3	Xác định giao điểm của hàm số logistic được cho bằng biểu thức với trục Oy	4	4
T_4	Xác định giá trị tung độ của một điểm thuộc hàm logitsic khi biết trước giá trị hoành độ của nó	0	6
T_5	Lập biểu thức hàm số logistic khi biết trước giá trị đầu, giới hạn tăng trưởng và điểm đi qua	6	0
T_6	Lập biểu thức hàm số logistic khi biết trước đồ thị của nó	4	0
T_7	Lập mô hình hồi quy hàm số logistic biểu diễn cho một bảng dữ liệu thực tế bằng máy tính hoặc phần mềm vẽ hình	0	5
T_8	Giải phương trình logistic có dạng $\dfrac{c}{1+a.e^{-kx}}=b$ với a, b, c, k là hằng số cho trước	2	8
T_9	Lựa chọn mô hình logistic hay mô hình hàm mũ trong việc biểu diễn một bảng dữ liệu thực tế nhằm đưa ra được dự đoán tốt nhất	0	2

Từ các TCTH điểm kể trên, chúng tôi nhóm chúng lại thành hai TCTH địa phương:

➢ Nhóm 1: Gồm các tổ chức toán học mà kĩ thuật của chúng được lí giải từ công nghệ: Định nghĩa hàm số logistic (bao gồm các TCTH liên quan đến KNV từ T_2 đến T_6).

➢ Nhóm 2: Gồm các tổ chức toán học điểm mà yếu tố công nghệ để lí giải và biện minh không nằm ở phần đặc trưng của tri thức, mà phụ thuộc vào sự trình bày của giáo trình Precalculus về ba bước xây dựng hàm số[1] từ một bảng dữ liệu (bao gồm các TCTH liên quan đến các KNV T_7 và T_9).

Theo thuyết nhân học, tư tưởng của quan điểm sinh thái là một tri thức không thể tồn tại một cách độc lập, mà nó phải tồn tại trong mối quan hệ với các tri thức khác. Với tư tưởng đó, chúng tôi tiến hành phân tích hàm số logistic trong Precalculus theo quan điểm sinh thái.

Hàm số logistic xuất hiện lần đầu trong giáo trình Precalculus ở chương 1. Khi đó, hàm số logistic ra đời với vai trò là một trong mười hai hàm số cơ bản: "Khi bạn tiếp tục học về toán, bạn sẽ thấy mười hai hàm số cơ bản được đề cập ở đây sẽ được nhắc đến liên tục" (Demana, 2011, pp.99). Như vậy, vào thời điểm này, hàm logistic được giới thiệu vì tính phổ biến của nó trong toán học chứ không vì một lí do nào khác. Ở nơi lưu trú này, nó được dùng như một công cụ tường minh để mô hình hóa toán học các vấn đề thực tế. Các KNV vào thời điểm đó cũng chỉ là các KNV T_1, T_2, T_4, T_7, T_9. Hầu hết các KNV (T_1, T_4, T_7, T_9) chỉ có một bài tập và chúng được trình bày chung trong một dự án. Ngoài ra, hàm sigmoid còn được sử dụng để làm nền cơ bản xây dựng họ các hàm số: $y = \frac{c}{1+ae^{-bt}}$.

Để tồn tại hàm số logistic cần phải có các mắt xích dinh dưỡng như: định nghĩa về số e, hàm số mũ, khái niệm giới hạn nhằm lí giải cho tính liên tục của hàm số, sự tồn tại hai tiệm cận $y=0$ và $y=1$. Tiến xa hơn là sự tham gia của CNTT trong việc xét tính đơn điệu của hàm số (giáo trình Precalculus coi trọng cách **tiếp cận hình học** thông qua đồ thị hàm số). Cụ thể, các mắt xích dinh dưỡng vào thời điểm này tác động lên hàm số logistic như sau:

- Về định nghĩa, số e hoàn toàn không được trình bày (về sau được trình bày ở chương 3). Mặc dù vậy, KNV T_4 vẫn thực hiện được bằng yếu tố CNTT.
- Trong khi đó, tính liên tục và tiệm cận của hàm logistic được định nghĩa một cách tường minh. Kĩ thuật giải quyết các KNV "Xét tính liên tục" và "Xác định tiệm cận" được đưa về việc xác định giới hạn của hàm số. CNTT đóng vai trò là công cụ minh họa và kiểm chứng cho các lời giải được đưa ra bằng việc tính giới hạn hàm số. Bên cạnh các mắt xích

---

[1] "Cho một tập các điểm dữ liệu có dạng (x, y), để xây dựng một công thức mà nó xấp xỉ phù hợp trong việc biểu diễn y như là một hàm số của x:

a) Tạo một biểu đồ phân tán của các điểm dữ liệu.

b) Xác định từ hình dạng của biểu đồ để xem liệu các điểm có gần khớp với đồ thị của một trong các loại hàm quen thuộc không (đường thẳng, parabol, hàm bậc ba, hàm sin...)

c) Chuyển đổi hàm cơ bản được xác định ở bước trước để tương thích với những điểm gần với xấp xỉ tốt nhất." (Demana, 2011, pp.143) dinh dưỡng đảm bảo cho sự tồn tại của hàm số logistic, ta có thể thấy KNV T_7 và T_9 cần đến sự tham gia của hồi quy tuyến tính.

Ngoài sự hiện diện đó, hàm số logistic còn có mặt trong chương 3: Hàm mũ, hàm logistic và hàm logarit. Trong chương này, hàm logistic đóng vai trò vừa là một đối tượng toán học được nghiên cứu, vừa là công cụ được vận dụng để giải quyết các bài toán thực tế. Lí do cần đến sự tồn tại của hàm số này là bởi vai trò công cụ của nó: xây dựng mô hình logistic trong các bài toán tăng trưởng dân số có điều kiện. Giáo trình đưa ra nhận định: "Một hàm số logistic thường là một mô hình thích hợp cho sự tăng trưởng có hạn chế" (Demana, 2011, pp.261). Sự khác biệt giữa hàm số logistic và hàm số mũ cũng được chỉ ra, đó là: hàm logistic được dùng để mô hình hóa sự tăng trưởng có giới hạn, còn hàm mũ thì mô hình hóa sự tăng trưởng dân số không hạn chế. Vào thời điểm ấy, số e đã được định nghĩa, hàm mũ cũng đã được xây dựng một cách tường minh. Các KNV xuất hiện một cách đầy đủ vào thời điểm này. Tuy nhiên, khái niệm logarit vẫn chưa được đề cập. Điều này ảnh hưởng đến kĩ thuật giải quyết KNV T_8. Vai trò các mắt xích dinh dưỡng vào thời điểm này cụ thể như sau:

- Mô hình tăng trưởng mũ[2] là mắt xích dinh dưỡng quan trọng nhất, vì nó là lí do cho sự tồn tại của hàm logistic. Đồng thời, nó cũng là sự lí giải cho tính chất: "Mô hình logistic ban đầu tăng trưởng theo mô hình tăng trưởng mũ, nhưng đến một thời điểm nhất định nào đó thì sự tăng trưởng bắt đầu chậm lại".
- Số e được định nghĩa tường minh, cùng sự trình bày về định lí: "Những hàm số mũ và số e"[3] là hai mắt xích dinh dưỡng đảm bảo cho sự tồn tại của dạng hàm $f(x) = \dfrac{c}{1 + a.b^x}$. Bên cạnh đó, sự tồn tại dạng hàm này cho phép giải quyết KNV T_5 và T_6.
- Logarit đóng vai trò quan trọng trong việc xây dựng lên hàm số logistic. Thật vậy cả Pearl và Reed, Verhulst đều sử dụng nó để thiết lập hàm số này. Tuy nhiên, việc sử dụng CNTT đã làm mờ đi các bước thực hiện quá trình này. Nó hiển nhiên giúp việc thiết lập hàm số nhanh và chính xác hơn rất nhiều, nhưng cũng đồng thời làm giảm đi vai trò của logarit đối với sự tồn tại của hàm số logistic. Sự không tham gia của logarit làm cho KNV T_8 được chuyển về dạng toán tương giao đồ thị - chỉ có thể sử dụng CNTT để giải quyết. Sau khi được học logarit, thì kĩ thuật giải quyết này bị loại bỏ, và được thay thế bằng kĩ thuật sử dụng logarit. Đồng thời, KNV T_2 rất cần đến công cụ logarit để giải quyết vấn đề tìm tọa độ điểm uốn của hàm logistic. Như vậy, có thể nói trong Precalculus, logarit không phải điều kiện tồn tại của hàm số logistic. Nó chỉ là một công cụ giúp giải quyết KNV liên quan tới việc giải phương trình mà thôi.

[2] Mô hình tăng trưởng mũ: $y = ae^{rx}; a > 0, r > 0$.

[3] "Bất kể hàm số mũ $f(x) = ab^x$ đều có thể viết được dưới dạng $f(x) = A.e^{kx}$ với k là một hằng số thực được chọn sao cho thích hợp" (Demana, 2011, pp.257)

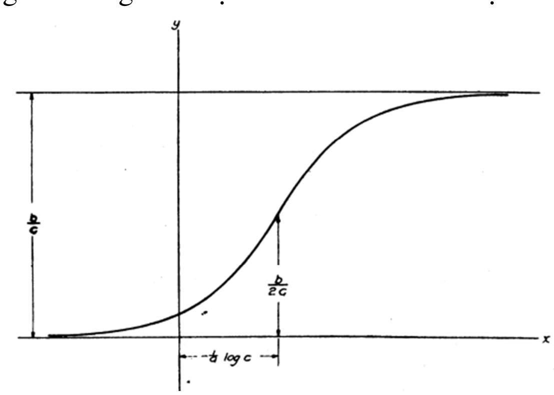
- Giới hạn vẫn là mắt xích dinh dưỡng quan trọng cho sự tồn tại của hàm số logistic. Vai trò và ý nghĩa của nó tương tự trong nơi lưu trú ban đầu.
- Mắt xích dinh dưỡng đạo hàm hoàn toàn bị bỏ qua. Nó dẫn đến việc một số tính chất của hàm logistic được lí giải thông qua CNTT với các tính chất như điểm uốn, tính biến thiên, cực trị địa phương. Sự không tham gia của nguyên hàm cũng cản trở việc giáo trình Precalculus trình bày việc xây dựng biểu thức hàm logistic như trong lịch sử.

3. Kết luận.

Từ việc trình bày lí thuyết và hệ thống bài tập trong giáo trình Precalculus của Demana cho thấy, hầu hết các bài toán đều là các bài toán thuộc phạm vi ngoài toán học. Điều này thể hiện vai trò mạnh mẽ của mô hình hóa toán học trong dạy học ở Mĩ và ít thấy trong dạy học ở Việt Nam. Mô hình phân rã logistic hoàn toàn bị loại bỏ khỏi hệ thống bài tập. Ngoài ra, hàm logistic còn được đồng nhất với hàm tăng trưởng logistic.

Mặt khác, logarit không phải là mắt xích dinh dưỡng ảnh hưởng đến sự tồn tại của hàm số logistic, mà nó chỉ đóng vai trò công cụ trong kĩ thuật giải quyết KNV T_8. Vì thế, việc giới thiệu hàm số logistic trước hay sau khái niệm logarit đều không ảnh hưởng đến sự tồn tại của hàm. Nghiên cứu cho thấy các mắt xích đạo hàm, nguyên hàm và phương trình vi phân đều không tham gia trong việc xây dựng hàm số logistic. Điều này dẫn đến việc hàm số logistic được định nghĩa theo quy ước và hoàn toàn không được chứng minh. CNTT được xem như là một công cụ đắc lực trong việc giải quyết nhiều KNV. Tuy nhiên, nó cũng làm mất đi tầm ảnh hưởng của logarit đối với việc xây dựng hàm số logistic.

Các kết quả phân tích trên sẽ giúp ích trong việc tiến hành phân tích thể chế dạy học Sinh học và Toán học Việt Nam. Cụ thể, các kết quả này sẽ làm cơ sở tham chiếu cho việc nghiên cứu sự trình bày của thể chế dạy học Sinh học Việt Nam, và đã mang lại cho học sinh những hiểu biết nào về hàm logistic. Các mắt xích dinh dưỡng nào của hàm số logistic có tồn tại trong thể chế dạy học Toán Việt Nam? Hàm số logistic đóng vai trò như thế nào trong thể chế dạy học Toán Việt Nam? Từ đó, chúng tôi tiến hành xem xét về khả năng có thể dạy học mô hình tăng trưởng logistic trong Sinh học liên môn với Toán học như hình dưới đây:



Hình Hàm số logistic được vẽ bởi Pearl và Reed (1920)

** Chú thích: Sáu đặc trưng cơ bản của hàm số logistic*

- Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$. Miền giá trị nằm trong khoảng (0; M) với M là hằng số lớn hơn 0.
- Không giao với trục Ox và chỉ giao với trục Oy tối đa tại một điểm.
- Có hai tiệm cận ngang là y = 0 và y = M.
- Hàm số luôn tăng hoặc luôn giảm.
- Có một điểm uốn và giá trị tung độ của điểm uốn này bằng một nửa giá trị của M.
- Hàm số liên tục và có đồ thị là một đường cong trơn.

❖ ***Tuyên bố về quyền lợi:*** *Tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.*

❖ ***Lời cảm ơn:***
Tác giả chân thành cảm ơn TS Trần Anh Dũng đã góp ý để bài báo được hoàn thiện.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Đoàn Quỳnh (tổng chủ biên) và Nguyễn Huy Đoan. (chủ biên) (2014). *Giải tích 12 nâng cao*. NXB Giáo dục.

Lê Văn Tiến. (2005). *Phương pháp dạy học môn Toán ở trường phổ thông (các tình huống dạy học điển hình)*. NXB Đại học Quốc gia TP Hồ Chí Minh.

Vũ Văn Vụ (tổng chủ biên). Nguyễn Như Hiền – Vũ Đức Lưu. (đồng chủ biên) (2009). *Sinh học 12 nâng cao SGV*. NXB Giáo dục.

Bessot Annie, Comiti Claude, Lê Thị Hoài Châu và Lê Văn Tiến. (2009). *Những yếu tố cơ sở của didactic toán (song ngữ Việt – Pháp)*. NXB Đại học Quốc gia TP Hồ Chí Minh.

Clapham C., Nicholson J. (2009). *The concise Oxforrd dictionary of Mathematics fourth edition*. Oxford University Press.

Demana F.D., Waits B.K., Foley G.D., Kennedy D. (2011). *Precalculus Graphical, Numerical, Algebraic (8th edition)*. Pearson Education, Inc.

Raymond P. and Lowell J.R. (1920). On the rate of growth of the population of the United states since 1790 and its mathematical representation. *Proceedings of the National Academy of sciences of the United States of America*, 6(6), 275 - 288.

♣ Christopher Clapham and James Nicholson (2009), *The concise Oxforrd dictionary of Mathematics fourth edition,* Oxford University Press: "Hàm số **logistic** (đường cong **logistic**) **("Hàm số" và "đường cong" không đồng nhất)** Đường cong có dạng $y=\frac{k}{1+e^{a-bx}}$, với $b>0$ và thường thì $k>0$. Nó có hai tiệm cận ngang là $y=0$, $y=k$ và có giao điểm tại $\left(0;\frac{k}{1+e^{a}}\right)$ và cung cấp một mô hình tốt để mô tả sự tăng trưởng dân số với dân số bị hạn chế trong giới hạn bão hòa". (tr.491). Nguyên gốc: "**Logistic function (logistic curve)** The curve where $y=\frac{k}{1+e^{a-bx}}$, where $b>0$ and usually $k>0$. It has horizontal asymptotes at $y=0$, $y=k$ and intercept at $\left(0;\frac{k}{1+e^{a}}\right)$ and provides a good model to describe population growth where saturation constraints exist" (pp.491).