

PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN CHO BÀI TOÁN ĐÀN NHÓT TUYẾN TÍNH TỰA TÍNH

Trịnh Anh Ngọc¹

1. Giới thiệu

Bài toán tựa tĩnh của lý thuyết đàn nhót tương tự như bài toán trong trường hợp đàn hồi ngoại trừ quan hệ ứng suất – biến dạng được thay bởi

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(0)\varepsilon_{kl}(\mathbf{u}(t)) - \int_0^t \frac{C_{ijkl}(t-s)}{\partial s} \varepsilon_{kl}(\mathbf{u}(s))ds, \quad (1)$$

trong đó $\mathbf{u} = (u_i(\mathbf{x}, t))$ là trường chuyển dịch, $\underline{\sigma} = (\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t))$ là trường tenxơ ứng suất, $\underline{\varepsilon} = (\varepsilon_{ij}(\mathbf{x}, t))$ là tenxơ biến dạng, xác định từ chuyển dịch nhờ hệ thức

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (2)$$

$\mathbf{C} = (C_{ijkl}(\mathbf{x}, t))$ là tenxơ chùng ứng suất thỏa các điều kiện đối xứng

$$C_{ijkl} = C_{jikl}, C_{ijkl} = C_{ijlk}, C_{ijkl} = C_{klij}. \quad (3)$$

Với vật liệu đàn nhót ứng xử tức thời là đàn hồi [3], nghĩa là tồn tại hằng số $c_0 > 0$ sao cho

$$C_{ijkl}(0)\xi_{ij}\xi_{kl} > c_0\xi_{ij}\xi_{ij}. \quad (4)$$

Để đơn giản cách viết, như trong phương trình (1), thường ta không ghi rõ sự phụ thuộc của các đại lượng vào biến không gian \mathbf{x} và cả biến thời gian t nếu không gây ngộ nhận.

Trong khoảng thời gian $I = [0, T]$, xét vật thể đàn nhót tuyến tính chiếm miền $\Omega \subset R^d$ ($d=1,2,3$) là tập mở bị chặn với biên $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ chính quy, giả thiết $meas(\Gamma_D) > 0$. Lực tác dụng lên vật gồm: lực thể tích $\mathbf{f} = (f_i(\mathbf{x}, t))$ $\mathbf{x} \in \Omega$, $t \in [0, T]$; lực mặt $\mathbf{g} = (g_i(\mathbf{x}, t))$, $\mathbf{x} \in \Gamma_N$, $t \in [0, T]$. Trên phần biên Γ_D vật được giữ cố định. Bài toán tựa tĩnh của lý thuyết đàn nhót tuyến tính được phát biểu như sau: Tìm hàm $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ thỏa

$$-\sigma_{ij,j} = f_i \quad \text{trong} \quad \Omega \times I, \quad (5)$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{trong} \quad \Gamma_D \times I, \quad (6)$$

¹ TS. – Trường ĐH KHTN TP. HCM

$$\sigma_{ij}n_j = g_i \quad \text{trong} \quad \Gamma_N \times I, \quad (7)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \quad \text{trong} \quad \Omega, \quad (8)$$

trong đó ứng suất $\underline{\sigma}$ liên hệ với chuyển dịch \mathbf{u} thông qua (1) và (2).

Có nhiều phương pháp giải số bài toán biên tựa tĩnh. Một trong các phương pháp thông dụng là phương pháp đặt cơ sở trên phép biến đổi Laplace và nguyên lý tương ứng của lý thuyết đàn nhớt tuyến tính [5]. Trong một số trường hợp đặc biệt bài toán nhận được bằng phương pháp này có dạng tương tự bài toán của lý thuyết đàn hồi cổ điển, điều này thu hút sự chú ý của nhiều nhà tính toán số. Tuy nhiên, như đã biết, bài toán biến đổi ngược Laplace là một bài toán không chính do đó độ chính xác của kết quả phụ thuộc vào rất nhiều yếu tố. Một cách tiếp cận khác là áp dụng phép rời rạc hóa theo biến không gian dựa trên phát biểu biến phân “nửa yếu”, bằng cách này bài toán dẫn về một hệ phương trình tích phân Volterra loại hai. Sau đó áp dụng phương pháp chọn điểm (collocation method) giải hệ phương trình tích phân này. S. Shawetal., trong [6], đã áp dụng phương pháp phân tử hữu hạn để xấp xỉ bài toán theo biến không gian, với thời gian tác giả xấp xỉ số hạng tích phân bằng phép cầu phương. Vấn đề sai số được tác giả dẫn theo [1]. Gần đây hơn, trong [7], S. Shaw đưa cách tiếp cận rời rạc cả không gian lẫn thời gian bằng phương pháp phân tử hữu hạn trên cơ sở công thức biến phân đầy đủ. Cách làm này dẫn đến một công thức xấp xỉ khác (với quy tắc cầu phương cổ điển) số hạng tích phân. Trong bài này chúng tôi áp dụng cách tiếp cận thứ hai để giải gần đúng bài toán (5)-(7) kết hợp với (1), (2). Cách rời rạc hóa theo biến không gian tương tự như [6,7], nhưng ở đây, chúng tôi đặc biệt quan tâm đến cách xấp xỉ theo biến thời gian. Phép cầu phương được thực hiện bằng các công thức khác nhau, có chú ý đến sai số của công thức và sự tiện lợi khi cài đặt trên máy tính. Phần còn lại của bài được tổ chức như sau: Mục 2 trình bày công thức biến phân nửa yếu và bài toán xấp xỉ phân tử hữu hạn theo biến không gian. Mục 3 giới thiệu các công thức tích phân số để xấp xỉ bài toán trong Mục 2 theo biến thời gian. Một thí số được cho trong mục 4 để minh họa cách áp dụng và đánh giá (theo quan điểm thực hành) phương pháp.

2. Rời rạc hóa theo biến không gian

2.1. Phát biểu biến phân nửa yếu

Ký hiệu $\mathbf{H}^1(\Omega) = (H^1(\Omega))^d$ không gian Hilbert với tích trong

$$(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = (w_i, v_i)_{H^1(\Omega)}$$

và chuẩn tương ứng $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot, \cdot)}$.

Đưa vào không gian các hàm thử

$$H = \{v \in \mathbf{H}^1(\Omega) \mid v = 0 \text{ trên } \Gamma_D\}.$$

Cố định $t \in I$, nhân phương trình (5) với $\mathbf{v} \in H$ bất kỳ, nhờ quan hệ ứng suất – biến dạng (1), sau một số biến đổi ta được bài toán phân nửa yếu:

Tìm hàm $\mathbf{u}(t) \in L(0, T; H)$ thỏa

$$A(\mathbf{u}(t), \mathbf{v}) = L(t; \mathbf{v}) + \int_0^t B(t, s; \mathbf{u}(s), \mathbf{v}) ds \tag{9}$$

với mọi $\mathbf{v} \in H$, trong đó

$$A(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} C_{ijkl}(0) \varepsilon_{kl}(\mathbf{w}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) d\Omega, \tag{10}$$

$$B(t, s; \mathbf{w}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \frac{\partial C_{ijkl}(t-s)}{\partial s} \varepsilon_{kl}(\mathbf{w}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) d\Omega, \tag{11}$$

$$L(t; \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} d\Gamma. \tag{12}$$

Như một hệ quả của định lý 7.2, [2], tr. 189, ta có định lý sau.

Định lý 1. *Dưới các giả thiết:*

(i) *Các thành phần tenxơ chùng ứng suất $C_{ijkl}(t)$ là hàm đơn điệu giảm theo t ($t \in I$), có đạo hàm theo cấp một theo t thuộc $L^1(0, T, L^\infty(\Omega))$; hơn nữa, tồn tại hằng số c_1 sao cho*

$$C_{ijkl}(t) \xi_{ij} \xi_{kl} > c_1 C_{ijkl}(0) \xi_{ij} \xi_{kl} \tag{13}$$

với mọi tenxơ đối xứng (ξ_{ij}) ;

(ii) $\mathbf{f} \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$ và $\mathbf{g} \in L^1(0, T; L^2(\Gamma_N))$.

Thì bài toán (10) tồn tại và duy nhất nghiệm.

2.2. Bài toán xấp xỉ phần tử hữu hạn – Hệ phương trình tích phân Volterra loại hai

Phân hoạch miền Ω thành ne phần tử hữu hạn tuyến tính (n -đơn hình) trong R^d . Mỗi phần tử hữu hạn có $d+1$ nút. Chuyển dịch nút α

$$\mathbf{q}_\alpha = \{q_{1\alpha}, \dots, q_{d\alpha}\}^T \quad (\alpha = 1, \dots, d+1). \tag{14}$$

Vectơ chuyển dịch phần tử

$$\{\mathbf{q}\} = \{\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_\alpha\}^T. \tag{15}$$

Các hàm dạng

$$\mathbf{N}_\alpha = \lambda_\alpha \mathbf{I}_n, \tag{16}$$

trong đó λ_α là tọa độ trọng tâm, \mathbf{I}_d là ma trận đơn vị cấp d . Ma trận hàm dạng của phần tử:

$$[\mathbf{N}] = [\mathbf{N}_1, \dots, \mathbf{N}_{d+1}]. \tag{17}$$

Trong phần tử tương ứng, vectơ chuyển dịch \mathbf{u} được xấp xỉ bởi

$$\mathbf{u} = [\mathbf{N}]\{\mathbf{q}\}. \tag{18}$$

Vectơ biến dạng phần tử $\mathbf{e} = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \gamma_{23}, \gamma_{13}, \gamma_{12}]^T$,

$$\mathbf{e} = D_\varepsilon \mathbf{u} = [\mathbf{E}]\{\mathbf{q}\}, \tag{19}$$

trong đó $[\mathbf{E}] = D_\varepsilon[\mathbf{N}]$ với D_ε là toán tử đạo hàm

$$D_\varepsilon = \begin{pmatrix} \partial_1 & 0 & 0 \\ \partial_2 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_3 & \partial_3 \\ \partial_3 & \partial_2 & 0 \\ 0 & \partial_1 & 0 \\ \partial_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Vectơ ứng suất phần tử $\mathbf{s} = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}]^T$,

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= [\mathbf{D}(0)]\mathbf{e}(t) - \int_0^t \frac{\partial [\mathbf{D}(t-s)]}{\partial s} \mathbf{e}(s) ds \\ &= [\mathbf{D}(0)][\mathbf{E}]\{\mathbf{q}(t)\} - \int_0^t \frac{\partial [\mathbf{D}(t-s)]}{\partial s} [\mathbf{E}]\{\mathbf{q}(s)\} ds \end{aligned} \tag{21}$$

trong đó $[\mathbf{D}]$ là ma trận các hàm chùng ứng suất suy từ tenxơ \mathbf{C} .

Từ các công thức trên ta đưa vào ma trận độ cứng của phần tử e

$$[\mathbf{K}(t)]^e = \int_{\Omega^e} [\mathbf{E}]^{eT} [\mathbf{D}(t)] [\mathbf{E}]^e d\Omega. \tag{22}$$

Ma trận

$$[\mathbf{G}(t-s)]^e = \frac{\partial [\mathbf{K}(t-s)]^e}{\partial s} \tag{23}$$

liên quan đến ảnh hưởng của lịch sử biến dạng, gọi là ma trận di truyền phần tử.

Vectơ tải phần tử:

$$\{\mathbf{p}\}^e = \int_{\Omega^e} [\mathbf{N}]^{eT} \mathbf{f}^e d\Omega + \int_{\Gamma_N^e} [\mathbf{N}]^{eT} \mathbf{g}^e d\Gamma. \quad (24)$$

Bằng cách “lắp ghép” và từ (10) ta được bài toán xấp xỉ phần tử hữu hạn: Tìm hàm vectơ $t \mapsto \{\mathbf{q}(t)\}$ thỏa phương trình tích phân Volterra loại hai

$$[\mathbf{K}(0)]\{\mathbf{q}(t)\} = \{\mathbf{p}(t)\} + \int_0^t \mathbf{G}(t-s)\{\mathbf{q}(s)\}ds, \quad (25)$$

trong đó $[\mathbf{K}(t)], [\mathbf{G}(t)], \{\mathbf{q}\}, \{\mathbf{p}\}$ lần lượt là các ma trận và các vectơ toàn cục.

Định lý 2. *Dưới các giả thiết của định lý 1, bài toán nửa rời rạc (25) tồn tại và duy nhất nghiệm.*

3. Rời rạc hóa theo biến thời gian

3.1. Các công thức cầu phương

Để giải phương trình (25) ta tính xấp xỉ tích phân ở vế phải phương trình

$$\int_0^t \mathbf{G}(t-s)\{\mathbf{q}(s)\}ds,$$

nghĩa là, rời rạc hóa phương trình này theo biến thời gian. Chia khoảng thời gian I thành nt khoảng con bằng lưới

$$\tau = \{0 = t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1} < \dots < t_{m+1} = T\}, \quad \Delta t_i = t_{i+1} - t_i. \quad (26)$$

Có nhiều phương pháp xấp xỉ nhưng đơn giản hơn cả là quy tắc cầu phương

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \mathbf{G}(t-s)\{\mathbf{q}(s)\}ds \approx \Delta t_j ((1-\theta)[\mathbf{G}(t-t_j)]\{\mathbf{q}(t_j)\} + \theta[\mathbf{G}(t-t_{j+1})]\{\mathbf{q}(t_{j+1})\}), \quad (27)$$

trong đó $\theta \in [0,1]$, các trường hợp đặc biệt: quy tắc Euler ($\theta = 0$), quy tắc Euler lùi ($\theta = 1$), quy tắc hình thang ($\theta = 1/2$). Theo [4], cấp của sai số trong quy tắc cầu phương với $\theta = 0$ và $\theta = 1$ là Δt , và bằng Δt^3 khi $\theta = 1/2$.

3.2. Bài toán xấp xỉ không-thời gian

Từ công thức (27), phương trình (25) có thể rời rạc thành bài toán: Tìm dãy các vectơ $\{\mathbf{q}(t_j)\}$, $j = 1, 2, \dots, nt + 1$ sao cho, với mọi $n \in \{1, 2, \dots, nt + 1\}$

$$[\mathbf{K}^{(n)}]\{\mathbf{q}(t_{n+1})\} = \{\mathbf{p}(t_{n+1})\} + \sum_{j=1}^{n-1} \Delta t_j [\mathbf{I} - \theta][\mathbf{G}(t_{n+1} - t_j)]\{\mathbf{q}(t_j)\} + \theta[\mathbf{G}(t_{n+1} - t_{j+1})]\{\mathbf{q}(t_{j+1})\} \quad (28)$$

trong đó

$$[\mathbf{K}^{(n)}] = [\mathbf{K}(0)] - \theta \Delta t_n [\mathbf{G}(0)]. \quad (29)$$

Định lý 3. Dưới các giả thiết của định lý 1, với $\Delta t = \max \Delta t_i$ đủ bé, hệ phương trình (28) có nghiệm duy nhất.

Công thức cầu phương (27) với $\theta = 1/2$ có sai số bé hơn hai công thức còn lại. Tuy nhiên, về phương diện tính toán thì công thức (27) với $\theta = 0$ lại có lợi hơn do $[\mathbf{K}^{(n)}] = [\mathbf{K}(0)]$ với mọi n . Khi đó việc tính nghịch đảo (giải phương trình) chỉ thực hiện một lần là đủ, trong khi với hai công thức còn lại ở mỗi bước tính (xác định $\{\mathbf{q}(t_j)\}$) ta phải tính ma trận nghịch đảo $[\mathbf{K}^{(n)}]^{-1}$. Có thể thoát khỏi khó khăn này nếu bước thời gian là đều.

3.3. Áp dụng

Phương pháp xấp xỉ trình bày trong các mục trên được áp dụng cho bài toán phẳng đối xứng trục.

4. Bài toán - Nghiệm giải tích

Cho ống trụ đàn nhót đẳng hướng tiết diện ngang hình vành khăn bán kính $a, b (a < b)$. Hệ tọa độ trụ có trục z trùng với trục ống. Dưới áp suất $p(t)$ trên thành trong, $-\sigma_{rr}(a, t) = p(t)$, ống chỉ biến dạng theo hướng kính $u_r(r, t) = u(r, t), u_\theta \equiv 0$. Thành ngoài giữ cố định $u(b, t) = 0$.

Trạng thái biến dạng: $\varepsilon_{rr}(r, t) = \frac{\partial u}{\partial r}, \varepsilon_{\theta\theta}(r, t) = \frac{u}{r}$. Giả thiết vật liệu là đồng nhất đẳng hướng, quan hệ ứng suất – biến dạng cho

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}(r, t) &= \lambda(0) \frac{u}{r} + (\lambda(0) + 2\mu(0)) \frac{\partial u}{\partial r} \\ &\quad - \int_0^t \frac{\partial \lambda(t-s)}{\partial s} \frac{u(s)}{r} + \frac{\partial(\lambda(t-s) + 2\mu(t-s))}{\partial s} \frac{\partial u(s)}{\partial r} ds \\ \sigma_{\theta\theta}(r, t) &= \lambda(0) \frac{\partial u}{\partial r} + (\lambda(0) + 2\mu(0)) \frac{u}{r} \\ &\quad - \int_0^t \frac{\partial \lambda(t-s)}{\partial s} \frac{\partial u(s)}{\partial r} + \frac{\partial(\lambda(t-s) + 2\mu(t-s))}{\partial s} \frac{u(s)}{r} ds \end{aligned}$$

trong đó

$$\lambda(t) = K - \frac{2}{3} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad \mu(t) = G_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Phương trình chuyển động tựa tĩnh:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0.$$

Bằng phương pháp biến đổi Laplace ta có nghiệm giải tích của bài toán (trường chuyển dịch):

$$u(r, t) = \frac{p(b^2 - r^2)}{2Ka} - \frac{G_0(c^2 + 1/3)}{K + G_0(c^2 + 1/3)} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \frac{K}{K + G_0(c^2 + 1/3)} \frac{t}{\tau}$$

trong đó $c = b/a$. Tính toán trực tiếp ta thu được ứng suất vòng $\sigma_{\theta\theta}(b, t)$ tại $r = b$.

$$\sigma_{\theta\theta}(b, t) = -p \frac{G_0(1 + c^2)}{K + G_0(c^2 + 1/3)} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \frac{K}{K + G_0(c^2 + 1/3)} \frac{t}{\tau}$$

Các kết quả này được dùng để so sánh với giá trị xấp xỉ tìm được bằng phương pháp trình bày ở đây.

4.1. Áp dụng phương pháp xấp xỉ

Đưa vào không gian các hàm thử:

$$H = \{v \mid v \in H^1(a, b), v(b) = 0\}$$

với tích vô hướng

$$(w, v) = \int_a^b w(r)v(r)rdr,$$

ta có bài toán biến phân: tìm hàm $u(t) \in H$ thỏa

$$A(u(t), v) = L(t; v) + \int_0^t B(t, s; u(s), v) ds$$

với mọi $v \in H$. Ở đây

$$A(w, v) = \int_a^b w(r) \left(v \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial u}{\partial r} \right) r dr + (\lambda(0) + 2\mu(0)) \int_a^b \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{uv}{r} r dr$$

$$B(t, s; W, v) = \int_a^b \left(\frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial u(s)}{\partial r} \right) \frac{\partial(\lambda(t-s) + 2\mu(t-s))}{\partial s} + \frac{u(s)v}{r}$$

$$L(t; v) = av(a)p(t).$$

Công thức phần tử hữu hạn tuyến tính. Phần tử $[r_1, r_2]$

$$[N] = \frac{1}{l} [r_2 - r, r - r_1], \quad l = r_2 - r_1, \quad [E] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 1 \\ 1 & (r-r_1)/r \end{bmatrix} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ l & (r-r_1)/r \end{bmatrix}$$

$$[D(t)] = \begin{bmatrix} \lambda(t) + 2\mu(t) & \lambda(t) \\ \lambda(t) & \lambda(t) + 2\mu(t) \end{bmatrix}, \quad [K(t)] = \int_{r_1}^{r_2} [E]^T [D(t)] [E] r dr,$$

$$[G(t-s)] = \frac{\partial}{\partial s} \int_{r_1}^{r_2} [E]^T [D(t-s)] [E] r dr,$$

$$\{p(t)\} = \begin{cases} ap(t) \\ 0 \end{cases}, \text{ nếu } r_1 = a, \text{ và } \{p(t)\} = \begin{cases} 0 \\ p(t) \end{cases}, \text{ nếu khác.}$$

4.2. Kết quả số – đánh giá

Tính toán số được thực hiện với dữ liệu cụ thể: $a = 1, b = 2, c = \frac{b}{a} = 2$;

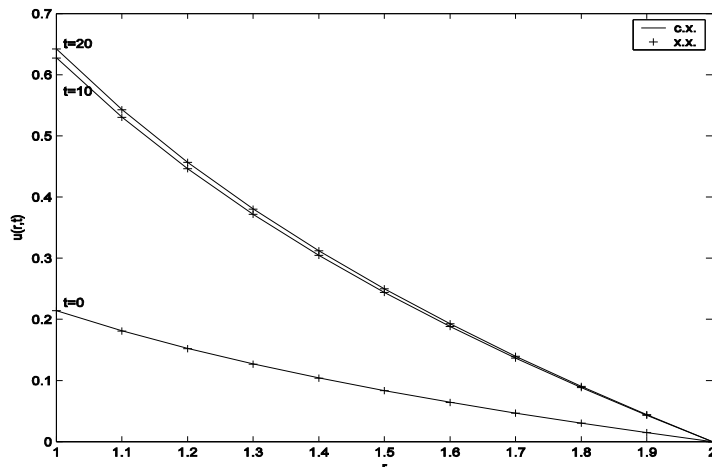
$$\lambda(t) = K - \frac{2}{3} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad \mu(t) = G_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \text{ trong đó}$$

$$K = 2.3333, G_0 = 1.0769, \tau = 1.$$

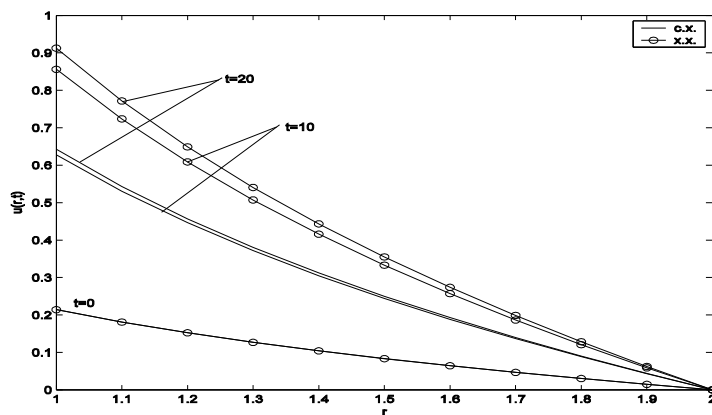
Tính toán số theo quy tắc hình thang, $\theta = 1/2$, cho kết quả rất tốt. Với bước lưới không gian $h = 0.1$, bước thời gian $\Delta t = 0.1$ sai số giữa nghiệm xấp xỉ và nghiệm chính xác chỉ cỡ 10^{-4} . Trên hình 1 là các đường cong chuyển dịch (c.x.) và nghiệm xấp xỉ (x.x.) của nó với $t/\tau = 0; 10; 20$.

Kết quả tính toán khi dùng quy tắc Euler lùi, $\theta = 1$, tuy ổn định nhưng sai số ở những thời điểm lâu dài là khá lớn (cỡ 10^{-1}) do sự tích tụ của sai số làm tròn (hình 2). Với quy tắc Euler, $\theta = 0$, kết quả là không ổn định.

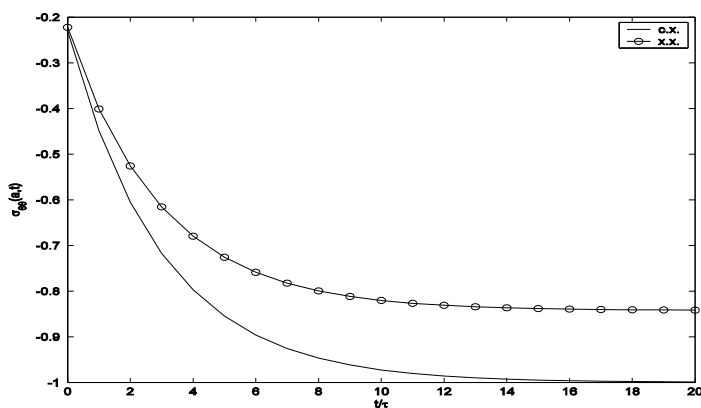
Dùng công thức (21) có thể nhận được ứng suất xấp xỉ. Hình 3 cho kết quả xấp xỉ (theo quy tắc hình thang) ứng suất vòng tại $r = b$, $\sigma_{\theta\theta}(b, t)$, so với ứng suất chính xác. Sai số cực đại cỡ 10^{-1} .



Hình 1: kết quả tính số với nghiệm chính xác theo quy tắc hình thang



Hình 2: Kết quả tính số với nghiệm chính xác theo quy tắc Euler lùi



Hình 3: Kết quả tính ứng suất $\sigma_{\theta\theta}(b,t)$ so với giá trị chính xác theo quy tắc hình thang

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. D.M. Bedivan and G.J. Fix (1997), Analysis of finite element approximation and quadrature of Volterra integral equations, *Numer. Methods Partial Differential Equations*, 13, pp. 663-672.
- [2]. G. Duvaut, J.L. Lions (1972), *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod, Paris.
- [3]. Pipkin, A.C. (1972), *Lectures on viscoelasticity theory*, Springer – Verlag New York Inc.
- [4]. Mario G. Salvadori and Melvin L. Baron (1961), *Numerical Methods in Engineering*, Prentice-Hall International, London.
- [5]. Schapery, R.A. (1968), *Stress analysis of viscoelastic composite materials*, Composite Material Workshop, Technomic Publishing Co., Inc., pp.153-191.
- [6]. S. Shaw, M.K. Warby, J.R. Whiteman, C. Dawson, and M.F. Wheeler (1994), *Numerical techniques for the treatment of quasistatic viscoelastic stress problems in linear isotropic solids*, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 118, pp. 211-237.
- [7]. S. Shaw and J.R. Whiteman (1999), *Numerical solution of linear quasistatic hereditary viscoelasticity problems I: A priori estimates*, BICOM: <http://www.brunel.ac.uk/~icsrbicm>

Tóm tắt

Bài này trình bày một cách rời rạc hóa phần tử hữu hạn theo biến không gian và cầu phương theo biến thời gian cho bài toán đàn nhớt tuyến tính tựa tĩnh. Một thí dụ số được cho để minh họa cách áp dụng và thể hiện tính hiệu quả của phương pháp

Abstract**Finite element method for quasistatic linear viscoelasticity problems**

In this paper, we consider a finite-element-in-space, and quadrature-in-time-discretization of a linear quasistatic viscoelasticity problem. A numerical application is presented in order to show validity of this discretization.