ĐIỂM BẤT ĐỘNG CỦA ÁNH XẠ DẠNG $\varepsilon-\delta$ CO TRONG THANG CÁC KHÔNG GIAN BANACH

Nguyễn Bích Huy[1]
Võ Duy Thượng[2]

1. Mở đầu

Bài toán Cauchy tìm hàm $x:[0,a]\to X$ (X là một không gian Banach) thoả mãn

$$x'(t)=f(t,x(t)),\qquad t\in[0,a],$$
$$x(0)=x_0,$$

vốn ban đầu được nghiên cứu với ánh xạ f tác động từ $[0,a]\times X$ vào X, sau này nhờ khái niệm "thang các không gian Banach" đã được mở rộng cho một lớp ánh xạ *f* tác động từ $[0,a]\times X$ vào một X' mở rộng hơn X [1,4-6].

Một cách tự nhiên, ta muốn xét bài toán tương tự về mở rộng một số định lí điểm bất động của ánh xạ *f* tác động từ X vào X lên trường hợp *f* tác động từ X vào một $X'\supset X$. Trong bài báo này, chúng tôi trình bày một mở rộng định lí điểm bất động của ánh xạ dạng $\varepsilon-\delta$ co của Leader [2,3] lên trường hợp ánh xạ tác động trong một thang các không gian Banach.

2. Các kết quả chính

Định nghĩa

Một họ các không gian Banach $(X_s,|.|_s)$, $s\in[a,b]$ gọi là một thang các không gian Banach nếu với mỗi cặp $s,s'\in[a,b]$ mà $s<s'$ thì

$$X_{s'}\subset X_s,\qquad |x|_s\le|x|_{s'}\quad \forall x\in X_{s'}$$

Định lí 1

Giả sử $\mathbb{N}$ là tập số tự nhiên và $\{q_s:s\in[a,b]\}$ là họ các hàm $q_s:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to[0,\infty)$ thoả mãn các điều kiện sau:

i) $q_s(m,n)\le q_{s'}(m,n)$ nếu $s<s'$

ii) $q_s(m,n)\le q_s(m,k)+q_s(k,k)+q_s(k,n)$

---

[1] PGS. TS. – Trường ĐHSP TP. HCM
[2] ThS. – Trường CĐSP Long An

iii) Với mỗi $\varepsilon > 0$ và $s \in (a,b)$ tồn tại số $\delta > 0$ và số $r \in \mathbb{N}$ sao cho với $s', s'' \in (s,b), s'' < s'$ và $m,n \in \mathbb{N}$ thì

$$q_{s'}(m,n) < \varepsilon + \delta \Rightarrow q_{s''}(m+r, n+r) < \varepsilon$$

Thế thì $\lim\limits_{m,n\to\infty} q_s(m,n) = 0 \quad \forall s \in (a,b)$

Chứng minh

Bằng cách xét hàm $\frac{1}{2}\left[q_s(m,n) + q_s(n,m)\right]$ nếu cần, ta có thể coi q_s là đối xứng, nghĩa là $q_s(m,n) = q_s(m,n)$.

Đặt $M_m^s(n) = \max\left\{q_s(i, m+n) : i = \overline{n, n+m}\right\}$

Bước 1: Cố định m, ta chứng minh rằng $\inf\left\{M_m^{s'}(n) : n \in \mathbb{N}, s' \in (s,b)\right\} = 0\,(1)$

Giả sử trái lại, vế trái của (1) bằng $\varepsilon > 0$. Ta chọn số $\delta > 0$, số $r \in \mathbb{N}$ tương ứng với ε theo điều kiện iii) của định lí sao cho

$$s < s'' < s', q_{s'}(m,n) < \varepsilon + \delta \Rightarrow q_{s''}(m+r, n+r) < \varepsilon \qquad (2)$$

Vì vế trái của (1) bằng ε nên ta tìm được $s' \in (s,b)$, $n \in \mathbb{N}$ sao cho $M_m^{s'}(n) < \varepsilon + \delta$ và do đó

$$q_{s'}(j, m+n) < \varepsilon + \delta \qquad \forall j \in \overline{n, n+m}$$

Lấy $s'' \in (s, s')$, ta có do (2)

$$q_{s''}(j+r, m+n+r) < \varepsilon \qquad \forall j \in \overline{n, n+m}$$

hay $q_{s''}(i, n+m+r) < \varepsilon \quad \forall i \in \overline{n+r, n+m+r}$. Vậy $M_m^{s''}(n+r) < \varepsilon$.

Điều này mâu thuẫn với giả sử của ta rằng vế trái của (1) bằng ε.

Bước 2: Cho $\varepsilon > 0$, ta chọn các số δ, r theo điều kiện (ii) của định lí để có (2).

Áp dụng (1) với $m = r$, ta tìm được $s' > s$ và $n_o \in \mathbb{N}$ sao cho $M_r^{s'}(n_o) < \min\left(\varepsilon, \frac{\delta}{2}\right)$ (3)

Lấy $m \ge n_o$, ta sẽ chứng minh $q_s(m, n_o + r) < \varepsilon$. Thật vậy, ta chọn $k \in \mathbb{N}$ sao cho $n_o \le m - kr \le n_o + r$ (4)

Từ định nghĩa của $M_r^{s'}(n_o)$ và (3), (4) ta có $q_{s'}(m - kr, n_o + r) \le M_r^{s'}(n_o) < \varepsilon$. Tiếp theo, ta sử dụng điều kiện ii) của định lí và được

$$\begin{aligned} q_{s'}(m-kr, n_o) &\le q_{s'}(m-kr, n_o+r) + q_{s'}(n_o+r, n_o+r) + q_{s'}(n_o+r, n_o) \\ &< \varepsilon + \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \varepsilon + \delta \end{aligned}$$

Từ đây và (2), ta có

$$q_{s''}(m-kr+r,n_o+r)<\varepsilon \qquad \text{với } s''\in(s,s').$$

Lại áp dụng điều kiện ii) và i) ta được

$$\begin{aligned} q_{s''}(m-kr+r,n_o) &\le q_{s''}(m-kr+r,n_o+r)+q_{s''}(n_o+r,n_o+r)+q_{s''}(n_o+r,n_o) \\ &< \varepsilon + q_{s'}(n_o+r,n_o+r)+q_{s'}(n_o+r,n_o) \\ &< \varepsilon+\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}=\varepsilon+\delta \end{aligned}$$

và do vậy, lại có thể áp dụng (2) để có

$$q_{s'''}(n-kr+2r,n_o+r)<\varepsilon \qquad \text{với } s'''\in(s,s'')$$

Lặp lại một số lần cần thiết lý luận như trên, ta có

$$q_s(m,n_o+r)<\varepsilon \qquad \forall m\ge n_o \tag{5}$$

Bây giờ, với $m\ge n_o, n\ge n_o$, áp dụng (5), ta có

$$q_s(m,n)\le q_s(m,n_o+r)+q_s(n_o+r,n_o+r)+q_s(n_o+r,n)<3\varepsilon$$

Định lí 1 được chứng minh.

Định lí 2

Cho thang các không gian Banach $(X_s,|.|_s), s\in[a,b]$ và ánh xạ $U: X_{s'}\to X_s$ liên tục với mỗi cặp $s,s'\in[a,b]$ mà $s<s'$ và thoả mãn điều kiện (A) sau đây

(A) Với mỗi $\varepsilon>0$, mỗi $s\in(a,b)$ tồn tại số $\delta=\delta(\varepsilon,s)>0$, $r=r(\varepsilon,s)\in\mathbb{N}^*$ sao cho khi $s<s''<s'$ ta có

$$\forall x,y\in X_{s'}, |x-y|_{s'}<\varepsilon+\delta \Rightarrow |U^r(x)-U^r(y)|_{s''}<\varepsilon$$

Khi đó U có trong mỗi X_s, $s\in(a,b)$ điểm bất động suy nhất x_s. Dãy lặp $\{U^n(x)\}$ với $x\in X_b$ hội tụ về x_s.

Chứng minh

Với $x,y\in X_b$ ta định nghĩa hàm $q_s:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to[0,\infty)$ bởi $q_s(m,n)=|U^m(x)-U^n(x)|_s$. Do định nghĩa thang các không gian Banach, ta có $q_s(m,n)\le q_{s'}(m,n)$ nếu $s<s'$. Dễ thấy điều kiện ii) trong định lí 1 cũng được thoả mãn. Ta kiểm tra q_s thoả điều kiện iii). Với $\varepsilon>0$ và $s\in(a,b)$ ta chọn δ,r theo điều kiện (A). Với $s''<s'$ và $q_{s'}(m,n)=|U^m(x)-U^n(y)|_{s'}<\varepsilon+\delta$, ta có $|U^r(U^m(x))-U^r(U^n(y))|_{s''}<\varepsilon$ hay $q_{s''}(m+r,n+r)<\varepsilon$. Vậy hàm q_s thoả tất cả các điều kiện của định lí 1 nên ta có $\lim\limits_{m,n\to\infty} q_s(m,n)=0$. Do đó $(U^n(x))$ và

$\left(U^n(y)\right)$ là các dãy Cauchy tương đương trong X_s. Đặt $x_s = \lim\limits_{n\to\infty} U^n(x)$ trong X_s, ta sẽ chứng minh $x_s = U(x_s)$. Lấy $\bar{s} < s$ thì do U liên tục từ X_s vào $X_{\bar{s}}$ nên

$$\lim_{n\to\infty} U\left(U^n(x)\right) = U(x_s) \text{ trong } X_{\bar{s}}$$

Mặt khác $\lim\limits_{n\to\infty} U\left(U^n(x)\right) = \lim\limits_{n\to\infty} U^{n+1}(x) = x_s$ trong X_s nên do phép nhúng $X_s \to X_{\bar{s}}$ là liên tục ta cũng có $\lim\limits_{n\to\infty} U\left(U^n(x)\right) = x_s$ trong $X_{\bar{s}}$. Vậy $U(x_s) = x_s$.

Để chứng minh sự duy nhất ta giả sử có $\bar{x} \in X_s$ thoả $\bar{x} = U\left(\bar{x}\right)$. Chọn $\bar{s} < s$, ta có $\left\{U^n(x)\right\}, \left\{U^n\left(\bar{x}\right)\right\}$ là hai dãy Cauchy tương đương trong $X_{\bar{s}}$. Mà $\bar{x} = U^n\left(\bar{x}\right), x_s = U^n(x_s) \quad \forall n \in \mathbb{N}$ nên từ đây ta có $\bar{x} = x_s$.

Định lí 2 được chứng minh.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. K.Deimling (1985), *Nonlinear Functional Analysis*, Springer-Verlag.

[2]. Le Hoan Hoa, K.Schmitt (1994), *Fixed point theorems of Krasnoselskii type in locally convex space and applications to integral equation Results in Mathematics*, 25, 291-313.

[3]. S.Leader (1982), *Two convergence principles with applications to fixed points in metric space*, Nonlinear Analysis, 6513-538.

[4]. L.Nirenberg (1986), *Bài giảng về giải tích hàm phi tuyến*, NXB Đại học và trung học chuyên nghiệp.

[5]. T.Nishida (1977), *A note on Nirenberg's theorem as an abstract form of a nonlinear Cauchy-Kowalewski theorem in a scale of Banach spaces*, J. Diff. Geom,12, 629-633.

[6]. L.Ovcyanikov (1971), *Bài toán Cauchy phi tuyến trong thang các không gian Banach DAN SSSR*, 200, 789-792.

Tóm tắt

Trong bài báo chúng tôi chứng minh sự tồn tại điểm bất động của một lớp ánh xạ dạng $\varepsilon - \delta$ co trong thang các không gian Banach.

Abstract

Fixed points a class of $\varepsilon - \delta$ contractive operators in a scale of Banach spaces

In the present paper we prove the existence of fixed points for a class of $\varepsilon - \delta$ constractive operators in a scale of Banach spaces.