VỀ MỘT PHƯƠNG TRÌNH SÓNG PHI TUYẾN LIÊN KẾT VỚI ĐIỀU KIỆN BIÊN CHỨA TÍCH PHÂN TUYẾN TÍNH

Trương Thị Nhạn*, Trần Minh Thuyết†

1. Giới thiệu

Trong bài báo này, chúng tôi xét bài toán sau: Tìm một cặp các hàm (u, P) thỏa

$$\begin{cases} u_{tt} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x,t)u_x\right) + \lambda \left|u_t\right|^{p-2} u_t = F(x,t), 0 < x < 1,\ 0 < t < T, \\ \mu(0,t)u_x(0,t) = P(t),\ u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = \tilde{u}_0(x),\ u_t(x,0) = \tilde{u}_1(x), \end{cases} \tag{1}$$

trong đó $p \geq 2,\ \lambda \geq 0$ là các hằng số cho trước; $\mu,\ \tilde{u}_0,\ \tilde{u}_1,\ F$ là các hàm cho trước thoả các điều kiện sẽ đặt ra sau. Hàm chưa biết $u(x,t)$ và giá trị biên $P(t)$ thoả một phương trình tích phân tuyến tính sau đây:

$$P(t) = g(t) + k_0 u(0,t) + \lambda_0 u_t(0,t) - \int_0^t k(t-s)u(0,s)ds, \tag{2}$$

trong đó $k_0,\ \lambda_0$ là các hằng số cho trước và $g,\ k$ là các hàm cho trước. Bài toán (1) được quan tâm và khảo sát bởi nhiều tác giả (xem [1], [5] – [16]) và các tài liệu tham khảo trong đó.

Một bài toán khác cùng loại bài toán này được thành lập từ bài toán (1), trong đó, $\lambda_0 = 0,\ k_0 \geq 0,\ \mu(x,t) \equiv 1,$ hàm chưa biết $u(x,t)$ và giá trị biên chưa biết $P(t)$ thoả bài toán Cauchy sau đây cho phương trình vi phân thường

$$\begin{cases} P''(t) + \omega^2 P(t) = h u_{tt}(0,t),\ 0 < t < T, \\ P(0) = P_0,\ P'(0) = P_1, \end{cases} \tag{3}$$

trong đó, $k_0 \geq 0,\ \omega > 0,\ P_0,\ P_1$ là các hằng số cho trước.

* ThS, Khoa Khoa học Tự nhiên - Học viện Hải quân;
† TS, Đại học Kinh tế Tp.HCM.

Các tác giả Long và Alain Phạm [5, 6], Long và Thuyết [9] đã xét bài toán (1) với điều kiện biên tại $x = 0$ có dạng

$$u_x(0,t) = g(t) + H(u(0,t)) - \int_0^t k(t-s)u(0,s)ds, \qquad (4)$$

trong đó $g,\ H,\ k$ là các hàm cho trước.

Long, Định, Diễm [10] nghiên cứu sự tồn tại, tính trơn và khai triển tiệm cận nghiệm của bài toán (1) trong trường hợp $\mu(x,t) \equiv 1$, $u_x(0,t) = P(t)$, $Q(t) = K_1 u(1,t) + \lambda u_t(1,t)$, trong đó $P(t)$ xác định ở (3) cùng với $u_{tt}(1,t)$ thay thế bởi $u_{tt}(0,t)$.

Báo báo này gồm ba phần chính. Trong phần 1, trước hết chúng tôi liên kết bài toán (1), (2) với một dãy quy nạp tuyến tính bị chặn trong không gian hàm thích hợp. Từ đó, sự tồn tại và duy nhất nghiệm được thiết lập nhờ phương pháp Galerkin, phương pháp compact và bổ đề Gronwall. Phần 2 nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của nghiệm yếu (u_λ, P_λ) của bài toán (1), (2) khi $\lambda \to 0_+$. Trong phần 3, chúng tôi thu được một khai triển tiệm cận của nghiệm yếu của bài toán (1), (2) đến cấp $N+1$ theo một tham số bé λ.

2. Sự tồn tại và duy nhất nghiệm

Đặt $\Omega = (0,1)$, để ngắn gọn chúng tôi không nhắc lại định nghĩa các không gian hàm thông dụng $C^m(\bar{\Omega})$, $L^p(\Omega)$, $H^m(\Omega)$ và lần lượt kí hiệu các không gian trên là C^m, L^p, H^m (có thể xem trong [2]). Kí hiệu $\|\cdot\|_X$ dùng để chỉ chuẩn trên không gian Banach X.

Trên L^2 tích vô hướng thông thường và chuẩn sinh bởi nó lần lượt là:

$$\langle v,w\rangle = \int_0^1 v(x)w(x)dx, \quad \|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle} = \left(\int_0^1 v^2(x)dx\right)^{1/2}.$$

Tích vô hướng và chuẩn tương ứng trên H^1 lần lượt là:

$$\langle v,w\rangle + \langle v',w'\rangle, \quad \|v\|_{H^1} = \sqrt{\langle v,v\rangle + \langle v',v'\rangle} = \sqrt{\|v\|^2 + \|v'\|^2}.$$

Đặt $V = \{v \in H^1 : v(1) = 0\}$.

Trước tiên ta có bổ đề sau:

Bổ đề 2.1. *Phép nhúng* $V \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$ *là compact và*

$$i)\ \|v\|_{C^0(\bar{\Omega})} \le \|v'\|,\ \forall v \in V, \tag{5}$$

$$ii)\ \|v\| \le \frac{1}{\sqrt{2}}\|v'\|,\ \forall v \in V. \tag{6}$$

Việc chứng minh bổ đề này là đơn giản, vì vậy chúng tôi bỏ qua.

Các kí hiệu $u(t),\ u'(t) = u_t(t) = \dot{u}(t),\ u''(t) = u_{tt}(t) = \ddot{u}(t),\ u_x(t) = \nabla u(t),\ u_{xx}(t) = \Delta u(t)$ được sử dụng để lần lượt chỉ $u(x,t),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,t),\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t),\ \frac{\partial u}{\partial x}(x,t),$ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$.

Ta chú ý rằng $W_1(T) = \{v \in L^\infty(0,T;V) : v_t \in L^\infty(0,T;L^2)\}$ là một không gian Banach đối với chuẩn $\|v\|_{W_1(T)} = \|v\|_{L^\infty(0,T;V)} + \|v_t\|_{L^\infty(0,T;L^2)}$.

Đặt

$$\tilde{W}(T) = \{v \in L^\infty(0,T;V) : v_t \in L^\infty(0,T;V),\ v_{tt} \in L^\infty(0,T;L^2)\}.$$

Khi đó nghiệm yếu của bài toán (1), (2) là cặp hàm $(u,P) \in \tilde{W}(T) \times H^1(0,T)$ thoả mãn bài toán biến phân sau:

$$\begin{cases} \langle u_{tt}, v\rangle + \langle \mu(t)\nabla u, \nabla v\rangle + P(t)v(0) + \lambda\langle |u_t|^{p-2}u_t, v\rangle = \langle F(t), v\rangle,\ \forall v \in V, \\ P(t) = g(t) + k_0 u(0,t) + \lambda_0 u_t(0,t) - \int_0^t k(t-s)u(0,s)ds, \\ u(x,0) = \tilde{u}_0,\ u_t(x,0) = \tilde{u}_1. \end{cases} \tag{7}$$

Ta thành lập các giả thiết:

(A_1) $(u_0, u_1) \in (V \cap H^2(0,1)) \times H^1(0,1)$,

(A_2) $F,\ F_t \in L^2(Q_T),\ Q_T = (0,1) \times (0,T),\ \forall T > 0$, (A$_3$) $\mu \in C^1\big([0,1]\times\mathbb{R}_+\big)$, $\mu(x,t)\geq \mu_0 > 0$, $\forall (x,t)\in[0,1]\times\mathbb{R}_+$, $\mu_{tt}\in L^1\big(0,T;L^\infty\big)$, $\forall T>0$,

(A$_4$) $k,\ g \in H^1(0,T)$, $\forall T>0$,

(A$_5$) $p\geq 2$, $\lambda>0$, $\lambda_0>0$, $k_0\geq 0$.

Cho trước $T^*>0$. Với mọi $M>0$ và $T\in(0,T^*]$, ta đặt

$$\begin{cases} W(M,T)=\{v\in \tilde{W}(T): \|v\|_{L^\infty(0,T;V)}\leq M, \|v_t\|_{L^\infty(0,T;V)}\leq M, \|v_{tt}\|_{L^\infty(0,T;L^2)}\leq M\},\\ W_1(M,T)=\{v\in W(M,T): v_{tt}\in L^\infty(0,T;L^2)\},\\ P(M,T)=\{P\in H^1(0,T): \|P\|_{H^1(0,T)}\leq M\}.\end{cases} \tag{8}$$

Ta xây dựng dãy quy nạp tuyến tính $\{(u^{(n)},P^{(n)})\}$ trong $W(M,T)\times P(M,T)$ sao cho dãy này hội tụ mạnh trong không gian hàm thích hợp về nghiệm yếu của bài toán (1), (2) với sự lựa chọn $M>0$ và $T>0$ thích hợp.

Trước hết, chọn bước lặp ban đầu

$$u^{(0)}=0,\ P^{(0)}=g. \tag{9}$$

Giả sử rằng

$$(u^{(n-1)},P^{(n-1)})\in W_1(M,T)\times P(M,T). \tag{10}$$

Ta tìm $(u^{(n)},P^{(n)})\in W_1(M,T)\times P(M,T)$ là nghiệm của bài toán:

$$\begin{cases} \langle \ddot{u}^{(n)}, v\rangle + \langle \mu(t)\nabla u^{(n)}, \nabla v\rangle + P^{(n)}(t)v(0) = \langle f^{(n)}(t), v\rangle,\ \forall v\in V,\\ u^{(n)}(0)=\tilde{u}_0,\ \dot{u}^{(n)}(0)=\tilde{u}_1,\end{cases} \tag{11}$$

trong đó

$$P^{(n)}(t)=g(t)+k_0u^{(n)}(0,t)+\lambda_0\dot{u}^{(n)}(0,t)-\int_0^t k(t-s)u^{(n)}(0,s)ds, \tag{12}$$

$$f^{(n)}(t)=F(t)-\lambda\left|\dot{u}^{(n-1)}\right|^{p-2}\dot{u}^{(n-1)}. \tag{13}$$

Khi đó ta có định lí sau:

Định lí 2.1. *Giả sử* (A_1) – (A_5) *đúng. Khi đó tồn tại các hằng số dương* M, T *sao cho tồn tại dãy* $(u^{(n)}, P^{(n)}) \in W_1(M,T) \times P(M,T)$ *xác định bởi* (11) – (13).

Chứng minh chi tiết của định lí có thể tìm thấy trong [16].

Tiếp theo, chúng tôi chứng minh được $\{(u^{(n)}, P^{(n)})\}$ xác định bởi (11) – (13) hội tụ mạnh về (u,P) trong không gian hàm thích hợp và sau đó kiểm chứng được rằng (u,P) là nghiệm yếu duy nhất của bài toán (1), (2). Kết quả cho bởi định lí sau:

Định lí 2.2. *Giả sử* (A_1) – (A_5) *đúng. Khi đó tồn tại các hằng số dương* M, T *sao cho bài toán* (7) *có duy nhất nghiệm* (u,P) *thỏa mãn*

$$\begin{cases} u \in L^{\infty}(0,T;V \cap H^2) \cap W_1(M,T), \\ u(0,\cdot) \in H^2(0,T),\; P \in H^1(0,T). \end{cases} \tag{14}$$

Hơn nữa, dãy quy nạp $\{(u^{(n)}, P^{(n)})\}$ *được xác định như trong định lí* 2.1 *hội tụ mạnh về* (u,P) *trong không gian* $W_1(T) \times L^2(0,T)$, *trong đó*

$$W_1(T) = \{v \in L^{\infty}(0,T;V) : v_t \in L^{\infty}(0,T;L^2)\}.$$

Mặt khác ta cũng có đánh giá sau:

$$\| u^{(n)} - u \|_{W_1(T)} + \| P^{(n)} - P \|_{L^2(0,T)} \le C k_T^n, \quad \forall n \ge 1, \tag{15}$$

ở đây $0 < k_T < 1$, $C > 0$ *là hằng số chỉ phụ thuộc* T, u_o, u_1, μ, λ_0 *và* k_T.

Chứng minh chi tiết có thể xem trong [16].

3. Dáng điệu tiệm cận của nghiệm khi $\lambda \to 0_+$

Trong phần này, giả sử rằng giả thiết (A_1) – (A_5) đúng, chúng tôi thu được (u_0, P_0) là nghiệm yếu duy nhất của bài toán (1.1), (1.2) ứng với $\lambda = 0$. Theo định lí 2.2, bài toán biến phân (7) tương ứng với mỗi $\lambda > 0$, có nghiệm duy nhất (u_λ, P_λ).

Lấy bất kì dãy $\{\lambda_m\}$ sao cho $\lambda_m \to 0_+$ khi $m \to \infty$, ta chứng minh được $\{(u_{\lambda_m}, P_{\lambda_m})\}$ là dãy Cauchy trong không gian hàm thích hợp, từ đó thu được đánh giá tiệm cận của nghiệm (u_λ, P_λ) khi $\lambda \to 0_+$, kết quả cho bởi định lí sau:

Định lí 3.1. *Giả sử* (A_1) – (A_5) *đúng. Khi đó tồn tại các hằng số dương* M, T *sao cho*

i) Bài toán (1), (2) *tương ứng với* $\lambda = 0$ *có duy nhất nghiệm yếu* (u_0, P_0) *thỏa mãn*

$$\begin{cases} u_0 \in L^\infty(0,T; V \cap H^2) \cap W_1(M,T), \\ u_0(0,\cdot) \in H^2(0,T),\ P_0 \in H^1(0,T). \end{cases} \tag{16}$$

ii) Hơn nữa, chúng ta có đánh giá tiệm cận:

$$\| u_\lambda - u_0 \|_{W_1(T)} + \| u_\lambda'(0,\cdot) - u_0'(0,\cdot) \|_{L^2(0,T)} + \| P_\lambda - P \|_{L^2(0,T)} \le C^* \lambda, \tag{17}$$

với $\lambda > 0$ *đủ nhỏ, trong đó* $C^* > 0$ *là hằng số chỉ phụ thuộc* T, u_o, u_1, μ, k_0, k *và* λ_0.

4. Khai triển tiệm cận của nghiệm theo một tham số bé λ

Phần này, ta giả sử (u_0, u_1, μ, F, g, k) thỏa các giả thiết (A_1) – (A_5). Từ định lí 2.2, bài toán (1), (2) có duy nhất nghiệm yếu (u, P) phụ thuộc vào λ:

$$u = u_\lambda,\ P = P_\lambda.$$

Bây giờ, ta bổ sung thêm giả thiết:

(A_6) $p \ge N + 1, N \ge 2$.

Trước hết, ta cần có bổ đề sau

Bổ đề 4.1. *Cho* m, $N \in \mathbb{N}$, *và* $\lambda, u_1, \ldots, u_N \in \mathbb{R}$. *Khi đó*

$$\left(\sum_{i=1}^{N} u_i \lambda^i \right)^m = \sum_{i=m}^{mN} T_i^{(m)}[u] \lambda^i, \tag{18}$$

trong đó các hệ số $T_i^{(m)}[u],\ m \le i \le mN$ *phụ thuộc* $u = (u_1,\dots,u_N)$, *được xác định bởi công thức truy hồi*

$$\begin{cases} T_i^{(1)}[u] = u_i, \quad 1 \le i \le N, \\ T_i^{(m)}[u] = \sum\limits_{j \in A_i^{(m)}} u_{i-j} T_j^{(m-1)}[u], \ m \le i \le mN, \ m \ge 2, \\ A_i^{(m)} = \left\{ j \in \mathbb{N}^+ : j \le i, \ 1 \le i-j \le N, \ m-1 \le j \le (m-1)N \right\}. \end{cases} \tag{19}$$

Việc chứng minh bổ đề 4.1 là đơn giản, chúng tôi bỏ qua chi tiết.

Xét bài toán nhiễu dưới đây theo tham số bé λ thỏa $0 \le \lambda \le \lambda_*$, ($\lambda_*$ là hằng số cố định).

$$(Q_\lambda)\begin{cases} u_{tt} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x,t)u_x\right) + \lambda \left|u_t\right|^{p-2} u_t = F(x,t), \ 0 < x < 1, \ 0 < t < T, \\ \mu(0,t)u_x(0,t) = P(t), \ u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = \tilde{u}_0(x), \ u_t(x,0) = \tilde{u}_1(x), \\ P(t) = g(t) + k_0 u(0,t) + \lambda_0 u_t(0,t) - \int_0^t k(t-s)u(0,s)ds, \end{cases}$$

Gọi (u_0, P_0) là nghiệm yếu duy nhất của bài toán (Q_λ) (như trong định lí 3.1) ứng với $\lambda = 0$, tức là

$$(\tilde{Q}_0)\begin{cases} u_0'' - \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x,t)u_{0x}\right) = F(x,t), 0 < x < 1, \ 0 < t < T, \\ \mu(0,t)u_{0x}(0,t) = P_0(t) = g(t), \ u_0(1,t) = 0, \\ u_0(x,0) = \tilde{u}_0(x), \ u_0'(x,0) = \tilde{u}_1(x), \\ (u_0, P_0) \in W_1(M,T) \times P(M,T), \end{cases}$$

Xét dãy hữu hạn các nghiệm yếu (u_i, P_i), $i = 1,\dots,N$ được xác định bởi các bài toán sau

$$(\tilde{Q}_i)\begin{cases} u_i'' - \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x,t)u_{ix}\right) = F_i, \ 0 < x < 1, \ 0 < t < T, \\ \mu(0,t)u_{ix}(0,t) = P_i(t), \ u_i(1,t) = 0, \\ u_i(x,0) = u_i'(x,0) = 0, \\ P_i(t) = k_0 u_i(0,t) + \lambda_0 u_i'(0,t) - \int_0^t k(t-s)u_i(0,s)ds, \\ (u_i, P_i) \in W_1(M,T) \times P(M,T), \end{cases}$$

trong đó $F_i, \ i = 0,1,\ldots,N$ được xác định bởi công thức truy hồi sau

$$F_i = \begin{cases} F, & i = 0, \\ -H(u_0'), & i = 1, \\ -\sum_{m=1}^{i-1} \frac{1}{m!} H^{(m)}(u_0') T_i^{(m)}[u'], & i = 2,\ldots,N, \end{cases} \tag{20}$$

ở đây, ta ký hiệu $H^{(m)}$ là đạo hàm cấp m của hàm số H, với $H(z) = |z|^{p-2} z$, $T_i^{(m)}[u']$ biểu thức phụ thuộc vào $u' = (u_1',\ldots,u_N')$, như trong công thức (18).

Khi đó ta có kết quả về khai triển tiệm cận của nghiệm yếu cho bởi định lí sau:

Định lí 4.1. *Giả sử $(A_1) - (A_6)$ thỏa. Khi đó, mỗi $\lambda \in [0,\lambda_*]$, bài toán (Q_λ) có duy nhất nghiệm yếu $(u,P) = (u_\lambda, P_\lambda)$ thỏa một đánh giá tiệm cận đến cấp $N+1$ như sau*

$$\|u - \sum_{i=0}^{N} u_i \lambda^i\|_{W_1(T)} + \|u'(0,\cdot) - \sum_{i=0}^{N} u_i'(0,\cdot)\lambda^i\|_{L^2(0,T)}$$

$$+ \|P - \sum_{i=0}^{N} P_i \lambda^i\|_{L^2(0,T)} \le C_N \lambda^{N+1}, \tag{21}$$

với C_N là hằng số dương độc lập với λ, cặp hàm (u_i, P_i) là nghiệm yếu của bài toán $(\tilde{Q}_i)$, $i = 0,\ldots,N$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Nguyễn Thúc An, Nguyễn Đình Triều (1991), *Schok between absolutely solid body and elastic bar with the elastic viscous fristional resistance at the side,* J. Mech NCSR. Việt Nam, **13** (2), 1 – 7.

[2]. H. Brézis (1983), *Analyse fonctionnelle, Théorie et Applications,* Paris.

[3]. S. Lang (1969), *Analysic II,* Addison-Wesley, Reading, Mass, California London.

[4]. J. L. Lions (1969), *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites nonlinéaires,* Dunod; Gauthier – Villars, Paris.

[5]. Nguyễn Thành Long, Alain Phạm Ngọc Định (1992), *On the quasilinear wave equation* $u_{tt} - \Delta u + f(u, u_t) = 0$ *associated with a mixed nonhomogeneous condition,* Nonlinear Anal. **19,** 613 – 623.

[6]. Nguyễn Thành Long, Alain Phạm Ngọc Định (1995), *A semilinear wave equation associated with a linear differential equation with Cauchy data*, Nonlinear Anal. **24,**1261 – 1279.

[7]. Nguyễn Thành Long, Trần Ngọc Diễm (1997), *On the nonlinear wave equation* $u_{tt} - u_{xx} = f(x, t, u, u_x, u_t)$ *associated with the mixed nonhomogeneous conditions,* Nonlinear Anal, **29**, 1217 – 1230 .

[8]. Nguyễn Thành Long, Trần Minh Thuyết (1999), *On the existence, uniqueness of solutions of a nonlinear vibration equation,* Demonstratio Math. **32** (4), 749 – 758.

[9]. Nguyễn Thành Long, Trần Minh Thuyết (2003), *A semilinear wave equation associated with a nonlinear integral equation,* Demonstratio Math. **36** (4), 915 – 938.

[10]. Nguyễn Thành Long, Alain Phạm Ngọc Định, Trần Ngọc Diễm (2005), *On the On the shock problem involving a linear viscoelastic bar,* Bound. Value Probl. **2005** (3), 337 – 358.

[11]. Nguyễn Thành Long, Lê Văn Út, Nguyễn Thị Thảo Trúc (2005), *On the shock problem involving a linear viscoelastic bar.* Nonlinear Analysis. **63,** 198 – 224.

[12]. Nguyễn Thành Long, Nguyễn Công Tâm, Nguyễn Thị Thảo Trúc (2005), *On the nonlinear wave equation with the mixed nonhomogeneous conditions: Linear approximation and asymptotic expansion of solution*, Demonstratio Math. **38** (2), 365 – 385.

[13]. Nguyễn Thành Long, Lê Xuân Trường (2007), *Existence and asymptotic expansion of solution to a nonlinear wave equation with a memory condition at the boundary*, Electron. J. Diff. Eqns., Vol. **2007**, No. 48, p. 1 – 19.

[14]. Nguyễn Thành Long, Lê Thị Phương Ngọc (2007), *On a Nonlinear Kirchhoff – Carrier wave equation in the unit membrane: The quadratic convergence and asymptotic expasion of solutions*, Demonstratio Math. **40** (2), 365 – 392.

[15]. Nguyễn Thành Long, Lê Thị Phương Ngọc (2009), *On nonlinear boundary value problems for nonlinear wave equations*, Vietnam J. Math. **37** (2 – 3), 141 – 178.

[16]. Trương Thị Nhạn (2009), *Thuật giải xấp xỉ tuyến tính liên kết với phương trình sóng phi tuyến với điều kiện biên chứa tích chập*, Luận văn Thạc sĩ, Đại học Khoa học Tự nhiên Tp, Hồ Chí Minh, 62 trang.

Tóm tắt

Bài báo này nghiên cứu *sự tồn tại và duy nhất nghiệm yếu* của một phương trình sóng phi tuyến với điều kiện biên chứa tích phân tuyến tính. Dáng điệu tiệm cận và khai triển tiệm cận của nghiệm yếu đến cấp N+1 theo một tham số bé cũng được khảo sát.

Abstract

On a nonlinear wave equation associated with boundary conditions involving a linear integral

The paper is about the study of existence and *uniqueness of a weak solution of nonlinear weave equation* with boundary conditions involving a linear integral, asymptotic behavior and expansion of weak solutions to N + 1 order in accordance with a small parameter is also investigated.