VỀ MỘT PHƯƠNG TRÌNH SÓNG PHI TUYẾN $u_{tt}-\frac{\partial}{\partial x}(u_x+\delta f(u))+\lambda u_t=F(x,t)$ LIÊN KẾT VỚI ĐIỀU KIỆN BIÊN DIRICHLET THUẦN NHẤT

Nguyễn Văn Ý*

1. Mở đầu

Trong bài này, chúng tôi xét bài toán biên và ban đầu cho phương trình sóng phi tuyến

$$u_{tt}-\frac{\partial}{\partial x}(u_x+\delta f(u))+\lambda u_t=F(x,t),\ \ 0<x<1, 0<t<T, \tag{1.1}$$

$$u(0,t)=u(1,t)=0, \tag{1.2}$$

$$u(x,0)=\tilde{u}_0(x),\ u_t(x,0)=\tilde{u}_1(x), \tag{1.3}$$

trong đó $\lambda, \delta\geq 0$ là hai hằng số cho trước và $f, F, \tilde{u}_0, \tilde{u}_1$ là các hàm cho trước thỏa các giả thiết nào đó mà ta sẽ đặt sau.

Phương trình (1.1) viết lại dưới dạng

$$u_{tt}-\frac{\partial}{\partial x}\sigma(x,t)+\lambda u_t=F(x,t),\ \ 0<x<1, 0<t<T, \tag{1.4}$$

trong đó,

$$\sigma(x,t)=u_x+\delta f(u). \tag{1.5}$$

Trường hợp $\sigma=\sigma(x,t)=\sigma(u_x,u_{xt})$ đã có rất nhiều công trình nghiên cứu. Khởi đầu với trường hợp $\sigma=\beta(u_x)+\lambda u_{xt}$, $\lambda>0$, $\beta\in C^2(\mathbb{R})$, $\beta(0)=0$, $\beta'\geq\varepsilon>0$, bài toán (1.2) – (1.4) đã được xét bởi Greenberg, MacCamy, Mizel [10]. Đây là mô hình toán học mô tả dao động dọc của một thanh đàn hồi nhớt phi tuyến, $u(x,t)$ là độ dịch chuyển so với vị trí cân bằng. Từ khi xuất hiện công trình [10], đã có rất nhiều công trình công bố liên quan đến bài toán này, chẳng hạn như: Greenberg [11], Greenberg, MacCamy [12], Dafermos [6], Andrews [2], Clements [4].

*ThS, Trường THPT chuyên Hùng Vương – Bình Dương

Về mặt hình thức phương trình (1.1) có dạng

$$u_{tt} - u_{xx} = g(x,t,u,u_x,u_t), \tag{1.6}$$

trong đó $g(x,t,u,u_x,u_t) = F(x,t) + \delta f'(u)u_x - \lambda u_t$, tuy nhiên về mặt ý nghĩa thì có những điểm khác biệt riêng.

Trong [9], Ficken và Fleishman đã chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm của phương trình

$$u_{xx} - u_{tt} - 2\alpha_1 u_t - \alpha_2 u = \varepsilon u^3 + b, \text{ với } \varepsilon > 0 \text{ bé.} \tag{1.7}$$

Trong bài báo của Caughey và Ellison [5], đã hợp nhất các xấp xỉ trong các trường hợp trước đây để bàn về sự tồn tại, duy nhất và tính ổn định tiệm cận của nghiệm cổ điển cho một hệ động lực phi tuyến liên tục.

Bài này gồm 2 phần. Trong phần 1, với các điều kiện $\lambda > 0,\ \delta \geq 0,$ $\tilde{u}_0 \in H_0^1 \cap H^2,$ $\tilde{u}_1 \in H_0^1,$ $F,\ \dfrac{\partial F}{\partial x} \in L^\infty(0,\infty;L^2),$ $F(0,t) = F(1,t) = 0,\ \forall t \geq 0,$ và $f \in C^2(\mathbb{R})$ thỏa $f'(0) = 0,$ chúng tôi chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm yếu u của bài toán (1.1) – (1.3). Trong phần 2, với các giả thiết thích hợp chúng tôi nghiên cứu sự khai triển tiệm cận của nghiệm $u = u(\lambda)$ theo tham số bé λ.

2. Sự tồn tại và duy nhất nghiệm

Chúng ta bỏ qua định nghĩa các không gian hàm thông dụng. Ta kí hiệu: $L^p = L^p(\Omega),\ H^m = H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega),\ W^{m,p} = W^{m,p}(\Omega),$

$$\Omega = (0,1),\ Q_T = \Omega \times (0,T),\ T > 0.$$

Ta dùng kí hiệu $\langle \cdot,\cdot \rangle$ để chỉ tích vô hướng trong L^2 hay cặp tích đối ngẫu của một phiếm hàm tuyến tính liên tục với một phần tử của một không gian hàm. Kí hiệu $\|\cdot\|$ để chỉ chuẩn trong L^2 và kí hiệu $\|\cdot\|_X$ dùng để chỉ chuẩn trong một không gian Banach X. Gọi X' là không gian đối ngẫu của X. Ta kí hiệu $L^p(0,T;X)$, $1 \leq p \leq \infty$ là không gian Banach các hàm đo được $u:(0,T) \to X,$ sao cho

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt \right)^{1/p} < +\infty, \text{ nếu } 1 \leq p < \infty,$$

và

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = ess\sup_{0<t<T} \|u(t)\|_X \text{ nếu } p = \infty.$$

Ta kí hiệu $u(t),\ u_t(t) = \dot{u}(t),\ u_{tt}(t) = \ddot{u}(t),\ u_x(t) = \nabla u(t),\ u_{xx}(t) = \Delta u(t)$ để lần lượt chỉ $u(x,t),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t),\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t),\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(x,t),\ \dfrac{\partial u^2}{\partial x^2}(x,t).$

Bây giờ ta đặt

$$a(u,v) = \int_0^1 u_x(x) v_x(x) dx. \tag{2.1}$$

Khi đó trên H_0^1 hai chuẩn $\|v\|_{H^1}$ và $\|v_x\| = \sqrt{a(v,v)} \equiv \|v\|_{H_0^1}$ là tương đương. Chúng ta có các bổ đề sau:

Bổ đề 2.1. *Phép nhúng* $H^1\ C^0(\overline{\Omega})$ *là compact và*

$$\|v\|_{C^0(\overline{\Omega})} \le \sqrt{2}\, \|v\|_{H^1}, \forall v \in H^1. \tag{2.2}$$

Bổ đề 2.2. *Phép nhúng* $H_0^1 \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega})$ *là compact và* $\forall v \in H_0^1$, *ta có*

$$\begin{cases} \|v\|_{C^0(\overline{\Omega})} \le \|v_x\|, \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} \|v\|_{H^1} \le \|v_x\| \le \|v\|_{H^1}. \end{cases} \tag{2.3}$$

Bổ đề 2.3. *Dạng song tuyến tính* $a(\cdot,\cdot)$ *được định nghĩa trong* (2.1) *là liên tục trên* $H_0^1 \times H_0^1$ *và cưỡng bức trên* H_0^1.

Việc chứng minh các bổ đề 2.1 và 2.2 không có gì khó khăn, ta có thể bỏ qua.

Ta thành lập các giả thiết sau đây:

$$\lambda > 0,\ \delta \ge 0, \tag{H_1}$$

$$\tilde{u}_0 \in H_0^1 \cap H^2,\ \tilde{u}_1 \in H_0^1, \tag{H_2}$$

$$F,\ \frac{\partial F}{\partial x} \in L^\infty\left(0,\infty; L^2\right) \text{ thỏa } F(0,t) = F(1,t) = 0,\ \forall t \ge 0, \tag{H_3}$$

$$f \in C^2(\mathbb{R}) \text{ và } f'(0) = 0. \tag{H_4}$$

Bài toán (1.1) – (1.3) được viết lại

$$\begin{cases} \ddot{u} - \Delta u + \lambda \dot{u} = \tilde{f}(x,t,u,u_x), \; 0 < x < 1, \; 0 < t < T, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = \tilde{u}_0(x), \; \dot{u}(x,0) = \tilde{u}_1(x), \end{cases} \tag{2.4}$$

trong đó

$$\tilde{f}(x,t,u,u_x) = F(x,t) + \delta f'(u) u_x. \tag{2.5}$$

Với $M > 0, T > 0,$ ta đặt:

$$K_i = K_i(M, f) = \sup\left\{ \left| f^{(i)}(u) \right| : |u| \le M\sqrt{2} \right\} (i = 1,2), \tag{2.6}$$

$$\begin{cases} W(M,T) = \{ v \in L^\infty(0,T; H_0^1 \cap H^2) : \dot{v} \in L^\infty(0,T; H_0^1), \ddot{v} \in L^2(Q_T), \\ \qquad \|v\|_{L^\infty(0,T;H_0^1 \cap H^2)}, \|\dot{v}\|_{L^\infty(0,T;H_0^1)}, \|\ddot{v}\|_{L^2(Q_T)} \le M \}, \\ W_1(M,T) = \left\{ v \in W(M,T) : \ddot{v} \in L^\infty(0,T; L^2) \right\}. \end{cases} \tag{2.7}$$

Ta liên kết bài toán (2.4) với một dãy qui nạp tuyến tính xác định như sau:

Trước hết chọn số hạng đầu $u_0 \in W_1(M,T)$. Giả sử rằng

$$u_{m-1} \in W_1(M,T). \tag{2.8}$$

Ta tìm $u_m \in W_1(M,T)$ thỏa bài toán biến phân tuyến tính

$$\langle \ddot{u}_m(t), v \rangle + a(u_m(t), v) + \lambda \langle \dot{u}_m(t), v \rangle = \langle F_m(t), v \rangle \quad \forall v \in H_0^1, \tag{2.9}$$

$$u_m(0) = \tilde{u}_0, \; \dot{u}_m(0) = \tilde{u}_1, \tag{2.10}$$

trong đó

$$F_m(t) = \tilde{f}(x,t,u_{m-1}(t), \nabla u_{m-1}(t)) = F(x,t) + \delta f'(u_{m-1}(t)) \nabla u_{m-1}(t). \tag{2.11}$$

Sự tồn tại của u_m được cho bởi định lí sau

Định lí 2.4. *Giả sử* $(H_1) - (H_4)$ *là đúng. Khi đó, tồn tại các hằng số dương* M, T *và một dãy qui nạp tuyến tính* $\{u_m\} \subset W_1(M,T)$ *xác định bởi* (2.9) – (2.11).

Chứng minh. Việc chứng minh định lí bao gồm nhiều bước.

Bước 1. *Xấp xỉ Galerkin* (xem trong Lions [8])

Xét một cơ sở $\{w_j\}$ của H_0^1, $w_j = \sqrt{2}\sin(j\pi x)$, $j = 1, 2, \ldots$ được lập từ các hàm riêng của toán tử Laplace $-\Delta = -\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$:

$$-\Delta w_j = \lambda_j^2 w_j,\ \lambda_j = j\pi,\ w_j \in H_0^1 \cap H^2,\ j = 1, 2, \ldots, \tag{2.12}$$

Đặt

$$u_m^{(k)}(t) = \sum_{j=1}^{k} c_{mj}^{(k)}(t) w_j, \tag{2.13}$$

trong đó $c_{mj}^{(k)}(t)$ thỏa các hệ phương trình vi phân tuyến tính sau:

$$\langle \ddot{u}_m^{(k)}(t), w_j\rangle + a(u_m^{(k)}(t), w_j) + \lambda\langle \dot{u}_m^{(k)}(t), w_j\rangle = \langle F_m(t), w_j\rangle,\ 1 \le j \le k, \tag{2.14}$$

$$u_m^{(k)}(0) = \tilde{u}_{0k},\ \dot{u}_m^{(k)}(0) = \tilde{u}_{1k}, \tag{2.15}$$

trong đó

$$\tilde{u}_{0k} = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{mj}^{(k)} w_j \to \tilde{u}_0 \text{ mạnh trong } H_0^1 \cap H^2, \tag{2.16}$$

$$\tilde{u}_{1k} = \sum_{j=1}^{k} \beta_{mj}^{(k)} w_j \to \tilde{u}_1 \text{ mạnh trong } H_0^1. \tag{2.17}$$

Từ giả thiết $u_{m-1} \in W_1(M,T)$ ta suy ra hệ phương trình (2.14), (2.15) có duy nhất nghiệm $u_m^{(k)}(t)$ trong khoảng $0 \le t \le T$.

Bước 2. *Đánh giá tiên nghiệm.*

Bổ đề 2.5. *Với các giả thiết* $(H_1)-(H_4)$ *là đúng. Khi đó tồn tại các hằng số dương* M *và* T *độc lập với* k, m *sao cho*

$$S_m^{(k)}(t) \le M^2,\ 0 < t < T, \tag{2.18}$$

trong đó

$$\begin{cases} S_m^{(k)}(t) = X_m^{(k)}(t) + Y_m^{(k)}(t) + \int_0^t \left\| \ddot{u}_m^{(k)}(s) \right\|^2 ds, \\ X_m^{(k)}(t) = \left\| \dot{u}_m^{(k)}(t) \right\|^2 + a(u_m^{(k)}(t), u_m^{(k)}(t)) + 2\lambda \int_0^t \left\| \dot{u}_m^{(k)}(s) \right\|^2 ds, \\ Y_m^{(k)}(t) = a(\dot{u}_m^{(k)}(t), \dot{u}_m^{(k)}(t)) + \left\| \Delta u_m^{(k)}(t) \right\|^2 + 2\lambda \int_0^t \left\| \nabla \dot{u}_m^{(k)}(s) \right\|^2 ds. \end{cases} \tag{2.19}$$

Chứng minh. Bổ đề 2.5 được chứng minh qua nhiều bước với đánh giá tiên nghiệm khá dài dòng.

Các hằng số dương M và T trên đây được chọn như sau:

Đầu tiên ta chọn $M > 0$, độc lập với k, m sao cho

$$S_m^{(k)}(0) = \left\| \tilde{u}_{1k} \right\|^2 + a(\tilde{u}_{0k}, \tilde{u}_{0k}) + a(\tilde{u}_{1k}, \tilde{u}_{1k}) + \left\| \Delta \tilde{u}_{0k} \right\|^2 \leq \frac{M^2}{2} \tag{2.20}$$

với mọi $k, m.$ Sau đó chọn $T > 0$ đủ nhỏ sao cho

$$\frac{M^2}{2} + D_1(M,T) \leq M^2 \exp(-(8 + 3\lambda^2)T), \tag{2.21}$$

trong đó

$$D_1(M,T) = \frac{20}{3} T \left\| F \right\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} + T \left\| \nabla F \right\|^2_{L^\infty(0,T;L^2)} + \delta^2 M^2 T \left(\frac{20}{3} K_1^2 + (K_1 + 2MK_2)^2 \right). \tag{2.22}$$

Vậy ta có

$$u_m^{(k)} \in W(M,T) \ \forall m, k. \tag{2.23}$$

Từ (2.23) ta có thể trích ra từ dãy $\{u_m^{(k)}\}$ một dãy con $\{u_m^{(k_i)}\}$ sao cho:

$$u_m^{(k_i)} \to u_m \text{ trong } L^\infty(0,T; H_0^1 \cap H^2) \text{ yếu*}, \tag{2.24}$$

$$\dot{u}_m^{(k_i)} \to \dot{u}_m \text{ trong } L^\infty(0,T; H_0^1) \text{ yếu*}, \tag{2.25}$$

$$\ddot{u}_m^{(k_i)} \to \ddot{u}_m \text{ trong } L^2(Q_T) \text{ yếu}, \tag{2.26}$$

$$u_m \in W(M,T). \tag{2.27}$$

Qua giới hạn trong (2.14), (2.15) bởi (2.23) – (2.27), ta có u_m thỏa (2.9), (2.10) trong $L^2(0,T)$ yếu.

Mặt khác, ta suy ra từ (2.9) rằng

$$\ddot{u}_m = \Delta u_m - \lambda \dot{u}_m + \tilde{f}(x,t,u_{m-1},\nabla u_{m-1}) \in L^\infty(0,T;L^2). \tag{2.28}$$

Do đó $u_m \in W_1(M,T)$. Vậy định lí 2.4 được chứng minh xong □

Chú ý rằng

$$W_1(T) = \left\{ v \in L^\infty(0,T;H_0^1) : \dot{v} \in L^\infty(0,T;L^2) \right\}. \tag{2.29}$$

là một không gian Banach đối với chuẩn:

$$\|v\|_{W_1(T)} = \|v_x\|_{L^\infty(0,T;L^2)} + \|\dot{v}\|_{L^\infty(0,T;L^2)}. \tag{2.30}$$

Định lí 2.6. *Giả sử* $(H_1)-(H_4)$ *là đúng. Khi đó tồn tại các hằng số* $M>0,\ T>0$ *sao cho bài toán* (2.4) *có duy nhất nghiệm yếu* $u \in W_1(M,T)$.

Mặt khác, dãy qui nạp tuyến tính $\{u_m\}$ *được xác định bởi* (2.9) – (2.11) *hội tụ mạnh về u trong không gian* $W_1(T)$.

Hơn nữa, ta cũng có đánh giá sai số

$$\|u_m - u\|_{W_1(T)} \le C k_T{}^m \ \forall m, \tag{2.31}$$

trong đó $k_T = 2\delta(K_1 + MK_2\sqrt{2})T < 1$, *và* C *là một hằng số chỉ phụ thuộc vào* T, u_0, u_1 *và* k_T.

Chứng minh.

a) *Sự tồn tại nghiệm.* Ta sẽ chứng minh $\{u_m\}$ là một dãy Cauchy trong $W_1(T)$.

Đặt $v_m = u_{m+1} - u_m$. Khi đó v_m thỏa bài toán biến phân sau:

$$\begin{cases} \langle \ddot{v}_m, v\rangle + a(v_m, v) + \lambda\langle \dot{v}_m, v\rangle = \langle F_{m+1}(t) - F_m(t), v\rangle \ \forall v \in H_0^1, \\ v_m(0) = \dot{v}_m(0) = 0. \end{cases} \tag{2.32}$$

Ta lấy $v = \dot{v}_m$ trong $(2.32)_1$ rồi sau đó tích phân theo t, ta được

$$\|v_m\|_{W_1(T)} \le k_T \|v_{m-1}\|_{W_1(T)} \text{ với mọi } m. \tag{2.33}$$

Do đó

$$\|u_{m+p} - u_m\|_{W_1(T)} \le \|u_1 - u_0\|_{W_1(T)} \frac{k_T{}^m}{1-k_T} \ \forall m, p. \tag{2.34}$$

Từ (2.34) ta suy ra $\{u_m\}$ là dãy Cauchy trong $W_1(T)$. Do đó tồn tại $u \in W_1(T)$ sao cho

$$u_m \to u \text{ mạnh trong } W_1(T). \tag{2.35}$$

Ta chú ý rằng $u_m \in W_1(M,T)$, khi đó có thể lấy từ $\{u_m\}$ một dãy con $\{u_{m_j}\}$ sao cho

$$u_{m_j} \to u \text{ trong } L^\infty(0,T;H_0^1 \cap H^2) \text{ yếu*}, \tag{2.36}$$

$$\dot{u}_{m_j} \to \dot{u} \text{ trong } L^\infty(0,T;H_0^1) \text{ yếu*}, \tag{2.37}$$

$$\ddot{u}_{m_j} \to \ddot{u} \text{ trong } L^2(Q_T) \text{ yếu}, \tag{2.38}$$

(2.39) $\quad u \in W(M,T)$.

Ta chú ý rằng

$$\left\|F_{m_j} - \tilde{f}(x,t,u,u_x)\right\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \le \delta(K_1 + MK_2\sqrt{2})\left\|u_{m_j-1} - u\right\|_{W_1(T)}. \tag{2.40}$$

Từ (2.35) và (2.40) ta thu được

$$F_{m_j}(t) \to \tilde{f}(x,t,u,u_x) \text{ mạnh trong } L^\infty(0,T;L^2). \tag{2.41}$$

Khi đó qua giới hạn trong (2.9), (2.10), (2.11) khi $m = m_j \to +\infty$, ta thu được từ (2.36) – (2.38) và (2.41) rằng

$$\langle \ddot{u}(t), v\rangle + a(u(t), v) + \lambda\langle \dot{u}(t), v\rangle = \langle \tilde{f}(x,t,u,u_x), v\rangle, \ \forall v \in H_0^1 \tag{2.42}$$

và các điều kiện đầu

$$u(0) = \tilde{u}_0, \ \dot{u}(0) = \tilde{u}_1. \tag{2.43}$$

Mặt khác, từ (2.39) và (2.42) ta có

$$\ddot{u} = u_{xx} - \lambda\dot{u} + \tilde{f}(x,t,u,u_x) \in L^\infty(0,T;L^2). \tag{2.44}$$

Vậy ta thu được

$$u \in W_1(M,T). \tag{2.45}$$

Sự tồn tại nghiệm được chứng minh hoàn tất. □

b) *Sự duy nhất nghiệm.* Giả sử u_1, u_2 là hai nghiệm yếu của bài toán (2.4) sao cho

$$u_i \in W_1(M,T),\ i = 1,2. \tag{2.46}$$

Khi đó $u(t) = u_1(t) - u_2(t)$ thỏa bài toán biến phân sau:

$$\langle \ddot{u}(t), v\rangle + a(u(t),v) + \lambda\langle \dot{u}(t), v\rangle = \langle \tilde{F}_1(t) - \tilde{F}_2(t), v\rangle,\ \forall v \in H_0^1, \tag{2.47}$$

và các điều kiện đầu

$$u(0) = \dot{u}(0) = 0, \tag{2.48}$$

trong đó

$$\tilde{F}_i(t) = \tilde{f}(x,t,u_i,u_{ix})(i = 1,2). \tag{2.49}$$

Lấy $v = \dot{u}$ trong (2.47) rồi tích phân theo t, ta được

$$\sigma(t) = \|\dot{u}(t)\|^2 + a(u(t),u(t)) \le \delta(K_1 + MK_2\sqrt{2})\int_0^t \sigma(s)ds,\ \forall t \in [0,T]. \tag{2.50}$$

Áp dụng bổ đề Gronwall ta thu được $\|\dot{u}(t)\|^2 + \|u_x(t)\|^2 = 0,$ có nghĩa $u_1 = u_2$.

Vậy định lí 2.6 được chứng minh hoàn tất.

3. Khai triển tiệm cận nghiệm theo tham số bé λ.

3.1. Dáng điệu của nghiệm khi $\lambda \to 0_+$.

Ta xét bài toán nhiễu (Q_λ) dưới đây theo một tham số bé λ, $0 < \lambda \le \lambda_*$, với $\lambda_* > 0$ là một số cố định

$$\begin{cases} u_{tt} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(u_x + \delta f(u)\right) + \lambda u_t = F(x,t),\ 0 < x < 1,\ 0 < t < T, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = \tilde{u}_0(x),\ u_t(x,0) = \tilde{u}_1(x). \end{cases} \qquad (Q_\lambda)$$

với $\tilde{u}_0,\ \tilde{u}_1,\ F,\ f$ thỏa các giả thiết $(H_2)-(H_4)$. Khi đó theo định lí 2.6, bài toán (Q_λ) có duy nhất nghiệm yếu phụ thuộc vào λ, kí hiệu là u_λ. Ta có thể chứng minh rằng giới hạn u_0 trong các không gian hàm thích hợp của họ u_λ khi $\lambda \to 0_+$, là nghiệm yếu duy nhất của bài toán (Q_0) tương ứng với $\lambda = 0$ thỏa $u_0 \in W_1(M,T)$.

Hơn nữa, ta có định lí sau.

Định lí 3.1. *Giả sử các giả thiết $(H_2)-(H_4)$ là đúng. Khi đó tồn tại các hằng số $M > 0,\ T > 0$ sao cho, với mọi λ,* với $0 < \lambda \le \lambda_*$, *bài toán (Q_λ) có duy nhất nghiệm yếu $u_\lambda \in W_1(M,T)$ thỏa mãn*

i) *Bài toán (Q_0) tương ứng với $\lambda = 0$ có duy nhất nghiệm yếu $u_0 \in W_1(M,T)$.*

ii) *Nghiệm yếu u_λ của bài toán (Q_λ) hội tụ mạnh về u_0 trong không gian $W_1(T)$ khi $\lambda \to 0_+$.*

Hơn nữa, ta có đánh giá

$$\left\| u_\lambda - u_0 \right\|_{W_1(T)} \le \tilde{C}_1 \lambda, \tag{3.1}$$

trong đó $\tilde{C}_1$ là hằng số chỉ phụ thuộc vào $M,\ T,\ \lambda_*$.

3.2. Khai triển tiệm cận theo tham số λ đến cấp $N+1$.

Ta định nghĩa một số kí hiệu sau:

Với mỗi đa chỉ số $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_N) \in \square_+^N$ và $x = (x_1,...,x_N) \in \square^N$, ta đặt

$$|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_N,\ \alpha! = \alpha_1!...\alpha_N!,\ x^\alpha = x_1^{\alpha_1}...x_N^{\alpha_N}. \tag{3.2.}$$

Trước hết ta sử dụng bổ đề sau

Bổ đề 3.2. *Cho* $m, N \in \square,\ x = (x_1,...,x_N) \in \square^N,\ \lambda \in \square$. *Khi đó*

$$\left(\sum_{i=1}^{N} x_i \lambda^i\right)^m = \sum_{k=m}^{mN} P_k^{[m]}(x)\lambda^k, \tag{3.3}$$

trong đó hệ số $P_k^{[m]}(x),\ m \le k \le mN$ *phụ thuộc vào* $x = (x_1, ..., x_N)$ *được xác định bởi công thức*

$$\begin{cases} P_k^{[m]}(x) = \sum\limits_{\alpha \in A_k^{(m)}} \dfrac{m!}{\alpha!} x^\alpha,\ m \le k \le mN, \\ A_k^{(m)} = \left\{\alpha \in \mathbb{Z}_+^N : |\alpha| = m,\ \sum\limits_{i=1}^{N} i\alpha_i = k\right\}. \end{cases} \tag{3.4}$$

Việc chứng minh bổ đề 3.2 được nghiệm lại từ các phép tính đại số thông thường nên chúng tôi bỏ qua chi tiết.

Bây giờ, chúng tôi giả thiết thêm

$$f \in C^{N+2}(\mathbb{R}). \tag{H_5}$$

Ta cũng xét các hàm $u_i,\ i = 1, 2, ..., N$ trong đó $u_i \in W_1(M, T)$, (với $M > 0$, $T > 0$ được chọn thích hợp), là nghiệm của bài toán sau:

$$\begin{cases} \ddot{u}_i - \Delta u_i = \tilde{F}_i,\ 0 < x < 1,\ 0 < t < T, \\ u_i(0,t) = u_i(1,t) = 0, \\ u_i(x,0) = \dot{u}_i(x,0) = 0,\ i = 1, ..., N, \end{cases} \tag{$\tilde{Q}_i$}$$

trong đó

$$\begin{cases} \tilde{F}_i = -\dot{u}_{i-1} + \delta \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\sum\limits_{m=1}^{i} \dfrac{1}{m!} f^{(m)}(u_0) P_i^{[m]}(\vec{u})\right),\ i = 1, ..., N, \\ \vec{u} = (u_1, ..., u_N). \end{cases} \tag{3.5}$$

Giả sử $u_\lambda \in W_1(M, T)$ là nghiệm yếu của bài toán (Q_λ). Khi đó

$$v = u_\lambda - \sum_{i=0}^{N} \lambda^i u_i = u_\lambda - h \tag{3.6}$$

thỏa bài toán

$$\begin{cases} \ddot{v} - \Delta v = -\lambda \dot{v} + \delta \dfrac{\partial}{\partial x}\big(f(v+h) - f(h)\big) + E_\lambda(x,t),\ 0 < x < 1,\ 0 < t < T, \\ v(0,t) = v(1,t) = 0, \\ v(x,0) = \dot{v}(x,0) = 0, \end{cases} \tag{3.7}$$

trong đó

$$E_\lambda(x,t) = -\lambda \dot{h} + \delta \frac{\partial}{\partial x}\big(f(h) - f(u_0)\big) - \sum_{i=1}^{N} \lambda^i \tilde{F}_i. \tag{3.8}$$

Khi đó ta thu được đánh giá sau.

Bổ đề 3.3. *Giả sử* $N \geq 1,$ *và* $(H_2) - (H_3),\ (H_5)$ *là đúng. Khi đó*

$$\|E_\lambda\|_{L^\infty(0,T;L^2)} \leq \tilde{C}_N \lambda^{N+1},\ \forall \lambda \in (0, \lambda_*). \tag{3.9}$$

Chứng minh. Việc chứng minh bổ đề 3.3 được trình bày chi tiết trong [14].

Ta cũng có kết quả về khai triển tiệm cận của nghiệm yếu của bài toán (Q_λ) theo λ đến cấp $N+1$ như sau:

Định lí 3.4. *Giả sử các giả thiết* $(H_2) - (H_3),\ (H_5)$ *là đúng. Khi đó tồn tại các hằng số* $M > 0,\ T > 0$ *sao cho,* $\forall \lambda \in [0, \lambda_*],$ *bài toán* (Q_λ) *có duy nhất nghiệm yếu* $u_\lambda \in W_1(M,T)$ *và thỏa đánh giá tiệm cận đến cấp N+1 theo* λ *như sau*

$$\| u_\lambda - \sum_{i=0}^{N} \lambda^i u_i \|_{W_1(T)} \leq \tilde{K}_T \lambda^{N+1}. \quad \square \tag{3.10}$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. G. Andrews (1980), *On the existence of solutions to the equation* $u_{tt} = u_{xxt} + \sigma(u_x)_x$, J. Differential Equations **35**, 200 – 231.

[2]. H. Brézis (1983), *Analyse fonctionnelle, Théorie Applications*, Masson Paris.

[3]. J. Clements (1975), *On the existence and uniqueness of solutions of the equation* $u_{tt} - \frac{\partial}{\partial x_i}\sigma_i(u_{x_i}) = \Delta_N u_t = f$, Canad. Math. Bull. **18,** 181 – 187.

[4]. J. M. Greenberg, R.C. MacCamy, V. J. Mizel (1968), *On the existence, uniqueness and stability of solutions of the equation* $\sigma'(u_x)u_{xx} + \lambda u_{xtx} = \rho_0 u_{tt}$, J. Math. Mech. **17,** 707 – 728.

[5]. J. M. Greenberg (1969), *On the existence, uniqueness and stability of solutions of the equation* $\rho_0 X_{tt} = E(X_x)X_{xx} + \lambda X_{xtx}$, J. Math. Anal. Appl. **25,** 575 – 591.

[6]. J. M. Greenberg, R.C. MacCamy (1970), *On the exponential stability of solutions of* $E(u_x)u_{xx} + \lambda u_{xtx} = \rho u_{tt}$, J. Math. Anal. Appl. **31,** 406 – 417.

[7]. J.L. Lions (1969), *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non-linéaires*, Dunod; Gauthier-Villars, Paris.

[8]. Nguyễn Thành Long, Alain Phạm Ngọc Định (1992), *On the quasilinear wave equation* $u_{tt} - \Delta u + f(u,u) = 0$ *associated with a mixed nonhomogeneous condition*, Nonlinear Anal. **19** (7), 613 – 623.

[9]. Nguyễn Thành Long, Alain Phạm Ngọc Định, Trần Ngọc Diễm (2002), *Linear recursive schemes and asymptotic expansion associated with the Kirchhoff – Carrier operator,* J. Math. Anal. Appl. **267** (1), 116 – 134.

[10]. Nguyễn Thành Long, Nguyễn Công Tâm, Nguyễn Thị Thảo Trúc (2005), *On the nonlinear wave equation with the mixed*

nonhomogeneous condition: Linear approximation and asymptotic expansion of solution, Demonstratio Math. **38** (2), 365 – 386.

[11]. Nguyễn Thành Long, Lê Thị Phương Ngọc (2009), *On nonlinear boundary value problems for nonlinear wave equations*, Vietnam J. Math. **37** (2 – 3), 141 – 178.

[12]. Lê Thị Phương Ngọc, Lê Khánh Luận, Trần Minh Thuyết, Nguyễn Thành Long (2009), *On the nonlinear wave equation with the mixed nonhomogeneous conditions: Linear approximation and asymptotic expansion of solutions*, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications, Series A: Theory and Methods, **71** (11), 5799 – 5819.

[13]. Lê Xuân Trường, Lê Thị Phương Ngọc, Alain Phạm Ngọc Định, Nguyễn Thành Long, *The regularity and exponential decay of solution for a linear wave equation associated with two-point boundary conditions*, Nonlinear Analysis Series B: Real World Applications (to appear)

[14]. Nguyễn Văn Ý (2008), *Phương trình sóng phi tuyến bị nhiễu: Xấp xỉ tuyến tính và dáng điệu tiệm cận của nghiệm*, Luận văn Thạc sĩ, Đại học Sư phạm Tp. Hồ Chí Minh, 59 trang.

Tóm tắt

Trong bài này, chúng tôi xét bài toán biên và ban đầu cho phương trình sóng phi tuyến

$$(1)\qquad \begin{cases} u_{tt} - \dfrac{\partial}{\partial x}(u_x + \delta\, f(u)) + \lambda u_t = F(x,t), \;\; 0 < x < 1, 0 < t < T, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = \tilde{u}_0(x),\; u_t(x,0) = \tilde{u}_1(x), \end{cases}$$

trong đó $\lambda, \delta \geq 0$ là hai hằng số cho trước và $f, F, \tilde{u}_0, \tilde{u}_1$ là các hàm cho trước. Chúng tôi chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm yếu của bài toán, và thu được khai triển tiệm cận của nghiệm $u = u(\lambda)$ theo tham số bé λ.

Abstract

On a nonlinear wave equation $u_{tt} - \frac{\partial}{\partial x}(u_x + \delta\, f(u)) + \lambda u_t = F(x,t)$

associated with the pure dirichlet non-homogeneous conditions

In this paper, we consider the initial and boundary problem for the nonlinear wave equation

(1) $$\begin{cases} u_{tt} - \frac{\partial}{\partial x}(u_x + \delta\, f(u)) + \lambda u_t = F(x,t), \;\; 0 < x < 1, 0 < t < T, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = \tilde{u}_0(x), \; u_t(x,0) = \tilde{u}_1(x), \end{cases}$$

where $\lambda, \delta \geq 0$ are two given constants and $f, F, \tilde{u}_0, \tilde{u}_1$ are given functions. We prove the existence and uniqueness of weak solution to the problem, and obtain an asymptotic expansion of the solution $u = u(\lambda)$ in accordance with the small parameter λ.