VỀ LỊCH SỬ HÌNH THÀNH PHÉP KÉO THEO VÀ PHÉP TƯƠNG ĐƯƠNG

ĐỖ TẤT THẮNG *

TÓM TẮT

Bài viết này tái hiện lịch sử hình thành hai khái niệm cơ bản của logic toán học: phép kéo theo và phép tương đương. Nó không đơn giản là một bản liệt kê các niên đại mà là một tiếp cận khoa học luận. Qua đó, ta thấy được sự tiến triển (theo nghĩa rộng của từ này) của hai khái niệm này theo dòng lịch sử: chúng xuất hiện như thế nào, nhằm giải quyết bài toán gì, những chướng ngại khoa học luận liên quan?

ABSTRACT

About the emergence history of implication and equivalence

This article traces the emergence history of two fundamental concepts of mathematical logic: implication and equivalence. It is not as simple as a chronological list, but an epistemological approach in which we can see the evolution (in the broadest sense of that word) of these two concepts throughout history: how they appeared, for what problems to be solved, and epistemological obstacles associated?

1. Phép kéo theo

Được Aristotle (384-322 trước Thiên Chúa) hình thức hóa đầu tiên, tam đoạn luận là một phương thức lập luận lôgic đi từ hai mệnh đề (còn gọi là tiền đề) đến một kết luận. Ví dụ: *Mọi người đều phải chết, Socrates là người, vậy Socrates phải chết* là một tam đoạn luận. Trong tam đoạn luận, hai tiền đề (còn gọi là đại tiền đề và tiểu tiền đề) là những mệnh đề cho trước và được giả định là đúng. Tam đoạn luận cho phép hợp thức hóa tính xác thực hình thức của kết luận. Nó được xem là tiền thân của lôgic toán hiện đại và được giảng dạy đến tận cuối thế kỷ XIX.

Có thể sơ đồ hóa tam đoạn luận của Aristotle bằng ngôn ngữ của phép kéo theo hiện đại như sau:

$$\begin{array}{c} (P \Rightarrow Q) = 1 \\ \underline{(A \Rightarrow P) = 1} \\ (A \Rightarrow Q) = 1 \end{array}$$

Dù chưa thể hiện một cách toàn diện và chính xác các ý tưởng của phép kéo theo, tam đoạn luận của Aristotle là cố gắng đầu tiên trong việc xây dựng một cơ sở của lôgic hình thức cho phép suy diễn một mệnh đề thứ ba từ hai tiền đề ban đầu.

Euclide (330 - 275 TCN) đưa ra hệ tiên đề trên cơ sở công nhận, không chứng minh (hệ tiên đề Euclide). Từ hệ

* ThS, Trường THPT Ngô Quyền, Đồng Nai

tiên đề trên, Euclide dùng suy diễn toán học để viết tác phẩm ***Nguyên lý*** (***Elements*)**, một thành công nổi bật để sắp xếp lại toàn bộ các kiến thức toán học vào trong một hệ thống diễn dịch logic trên nền tảng tiên đề đơn giản. Hầu hết các tiên đề, hay định đề đều được Euclide phát biểu dưới dạng *"**Nếu** P **thì** Q"*. Trong đó: P, Q cùng kiểu mệnh đề[1] (số học, đại số hay hình học) và có mối quan hệ nhân quả[2] với nhau. Nói cách khác, khi xét giá trị chân lí của mệnh đề *"**Nếu** P **thì** Q"* Euclide quan tâm đến mối quan hệ về nội dung của hai mệnh đề P, Q, xem P là nguyên nhân để suy luận ra Q là kết quả.

Philo là người đầu tiên đưa ra bảng chân trị cho mệnh đề *"Nếu P thì Q"* trong đó xét đủ cả 4 trường hợp về chân trị của P và Q. Ông đã lập bảng chân trị này từ việc quy nạp một số trường hợp cụ thể.

P	**Q**	**Nếu P thì Q**
Đúng	Đúng	Đúng
Đúng	Sai	Sai
Sai	Đúng	Đúng
Sai	Sai	Đúng

Trong bảng chân trị trên 2 mệnh đề P và Q đối với Philo có thể không cùng kiểu mệnh đề, không có mối quan hệ nhân quả. Nói cách khác khi xét giá trị chân lí của mệnh đề ***Nếu P thì Q,*** Philo không quan tâm đến mối quan hệ về nội dung của hai mệnh đề P, Q, không phân biệt trường hợp P có phải là nguyên nhân để có Q hay không, mà chỉ quan tâm đến tính đúng, sai của chúng.

Ấn tượng bởi phương pháp của người Ai Cập và Trung Quốc trong việc sử dụng hình ảnh, kí hiệu để diễn tả cho khái niệm, Gottfried Leibniz (1646-1716) là người tiên phong sử dụng kí hiệu cho phép kéo theo vào toán học. Hệ thống kí hiệu của Leibniz đánh dấu sự xuất hiện của ngôn ngữ hình thức hoá.

Trong tác phẩm *Formal Logic* và *The Calculus of Inferrence* xuất bản năm 1847, De Morgan (1806-1871) phát biểu công thức sau này mang tên ông $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ và $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. Để chứng minh chúng, ông phải liên tục dùng tới bảng chân trị của phép kéo theo và phép tương đương.

Năm 1879, nhà toán học Đức trẻ Gottlob Frege (1848-1925) xuất bản quyển *Begriffsschrift* (Ý tưởng Ký hiệu). Ông là người đầu tiên hệ thống

---

[1] Hai mệnh đề P và Q cùng kiểu mệnh đề khi và chỉ khi P và Q cùng là mệnh đề hình học, số học, đại số, cuộc sống. . . Chẳng hạn "*Nếu 2004 chia hết cho 6 thì 2004 chia hết cho 3* " là mệnh đề nối 2 mệnh đề cùng kiểu số học: "*2004 chia hết cho 6*" và "*2004 chia hết cho 3*".

"*Nếu 1+1=3 thì Xuân Diệu là nhà văn*" là mệnh đề nối 2 mệnh đề không cùng kiểu: "*1+1=3* " là mệnh đề số học, " *Xuân Diệu là nhà văn*" là mệnh đề cuộc sống.

[2] Hai mệnh đề P và Q có mối quan hệ nhân quả khi và chỉ khi P và Q cùng kiểu mệnh đề, có mối liên hệ mật thiết về nội dung. Từ nội dung của mệnh đề P (nguyên nhân) có thể suy luận ra mệnh đề Q (kết quả).

Ví dụ: "*Nếu 2004 chia hết cho 6 thì 2004 chia hết cho 3*" là mệnh đề nối 2 mệnh đề có mối quan hệ nhân quả.

"*Nếu 1+1=3 thì Xuân Diệu là nhà văn*" là mệnh đề nối 2 mệnh đề không có mối quan hệ nhân quả.

hóa toàn bộ lý thuyết logic toán học. Tuy nhiên, tác phẩm còn khó hiểu nên ít người biết tới. Cho đến khi Russell (1872 -1970) bổ sung và hoàn thiện thêm hệ thống hoá logic hình thức của Frege trong giải toán, thì *Begriffsschrift* của Frege mới được nhiều người biết tới.

Whitehead và Russell định nghĩa phép kéo theo như sau:

P kéo theo Q là một mệnh đề, kí hiệu là P ⊂ Q, chỉ sai khi P đúng và Q sai và đúng trong các trường hợp còn lại.

Bảng chân trị của phép kéo theo:

P	**Q**	**P ⊂Q**
Đúng	*Đúng*	*Đúng*
Đúng	*Sai*	*Sai*
Sai	*Đúng*	*Đúng*
Sai	*Sai*	*Đúng*

Hilbert (1862-1943) định nghĩa phép kéo theo :

P kéo theo Q là một mệnh đề, kí hiệu là P → Q, chỉ sai khi P đúng và Q sai và đúng trong các trường hợp còn lại.

Bảng chân trị của phép kéo theo:

P	**Q**	**P→Q**
Đúng	*Đúng*	*Đúng*
Đúng	*Sai*	*Sai*
Sai	*Đúng*	*Đúng*
Sai	*Sai*	*Đúng*

Định nghĩa về phép kéo theo của Hilbert là sự kết hợp các quan niệm của Euclide, Philo, Frege, Russell và ý tưởng hình thức hóa của riêng ông. Trong bảng chân trị này, P và Q là các mệnh đề không cần phải cùng kiểu hoặc có mối quan hệ nhân quả. Ký hiệu → ông đưa ra và được sử dụng cho đến ngày nay.

2. Phép tương đương

Aristotle tự đặt câu hỏi làm thế nào để thay thế một phát biểu dưới hình thức khác mà không ảnh hưởng đến việc đề xuất? Chẳng hạn, Aristotle cho rằng: phát biểu ***"Mọi β là α"*** tương đương với phát biểu ***"α thuộc về mọi β".*** Từ đó, ông đi đến thừa nhận rằng: *Hai phát biểu tương đương với nhau nếu chúng có cùng chân trị đúng.* Những phát biểu của ông ở đây chỉ là trong lĩnh học triết học và cuộc sống chứ không phải toán học.

Trong tác phẩm *Formal Logic* và *The Calculus of Inferrence* xuất bản năm 1847, De Morgan liên tục dùng tới bảng chân trị phép kéo theo, phép tương đương để chứng minh các công thức do ông đưa ra.

Russell (1872 -1970) đưa ra định nghĩa về phép tương đương như sau.

Cho P, Q là 2 mệnh đề cho trước. mệnh đề P tương đương Q kí hiệu là ***P ≡ Q****, Chân trị của mệnh đề* ***P ≡ Q*** *được xác định bởi bảng chân trị:*

P	**Q**	**P ≡ Q**
Đúng	*Đúng*	*Đúng*
Đúng	*Sai*	*Sai*
Sai	*Đúng*	*Sai*
Sai	*Sai*	*Đúng*

Năm 1920, Hilbert đề nghị một dự án nghiên cứu rõ ràng về siêu toán học (*metamathematics*) mà sau này được gọi là chương trình Hilbert. Ông muốn toán học phải được hệ thống hóa trên một nền tảng logic vững chắc và đầy đủ. Chương trình này vẫn được công nhận là nổi tiếng nhất về triết học của toán học vì nó *hình thức hóa* toàn bộ Logic học trên cơ sở tiên đề.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Trần Lương Công Khanh (2005), « Tóm tắt lịch sử xuất hiện khái niệm tích phân », *Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ*, (342), tr. 1-3.
2. Đỗ Tất Thắng (2009), *Nghiên cứu Didactic về phép kéo theo, phép tương đương trong dạy và học toán ở trung học phổ thông,* Luận văn Thạc sĩ Toán học, ĐHSP TP HCM, tr.10-24.
3. Michal Walicki (2006), *Mathematical Logic an Introduction,* University of Bergen, pp. 1-22.
4. Wiliam Kneale - Martha Kneale (1962), *The development of logic,* Oxford University Press, Ely House, London.