PHÂN LOẠI CÁC MD-ĐẠI SỐ NĂM CHIỀU VỚI IDEAL DẪN XUẤT HAI CHIỀU

LÊ ANH VŨ*, NGUYỄN PHƯỚC THỊNH**

TÓM TẮT

Bài báo xét một lớp con các MD5-đại số, tức là các đại số Lie thực giải được 5 chiều mà nhóm Lie liên thông, đơn liên tương ứng chỉ có các quỹ đạo trong biểu diễn đối phụ hợp (K-quỹ đạo) hoặc không chiều hoặc chiều cực đại. Kết quả cơ bản mà bài báo đưa ra là phân loại triệt để (chính xác đến đẳng cấu đại số Lie) tất cả các MD5-đại số với ideal dẫn xuất hai chiều.

Từ khóa: nhóm Lie, đại số Lie, MD5-nhóm, MD5-đại số, K-quỹ đạo.

ABSTRACT

Classification of 5-diemensional MD-algebras with 2-dimensional derived ideal

The paper presents a subclass of MD5–algebras, i.e., five dimensional solvable Lie algebras that K-orbits of corresponding connected and simply connected Lie groups are orbit of zero or maximal dimension. The main result of the paper is to classify absolutely (to be correct in isomorphism of Lie algebra) all 5- dimensional MD–algebras with 2- dimensional derived ideal.

***Keywords**:* Lie group, Lie algebra, MD_5-group, MD_5-algebra, K-orbit.

1. Mở đầu

1.1. Lịch sử vấn đề

Năm 1962, nghiên cứu lý thuyết biểu diễn, A.A.Kirillov **[2]** đã phát minh ra *phương pháp quỹ đạo*. Phương pháp này nhanh chóng trở thành công cụ mạnh nhất của lý thuyết biểu diễn nhóm Lie và đại số Lie. Phương pháp quỹ đạo Kirillov cho phép ta nhận được các biểu diễn bất khả quy unitar của mỗi nhóm Lie liên thông, đơn liên, giải được từ các quỹ đạo trong biểu diễn đối phụ hợp (còn gọi là K-quỹ đạo) của nhóm đó. Trong phương pháp quỹ đạo Kirillov, các K-quỹ đạo (nguyên) đóng vai trò then chốt để từ đó dựng nên các biểu diễn bất khả quy unitar. Do đó, việc mô tả các K-quỹ đạo của mỗi nhóm Lie, nhất là các nhóm Lie liên thông giải được, có ý nghĩa quan trọng trong lý thuyết biểu diễn nhóm Lie.

Cấu trúc của nhóm Lie và đại số Lie giải được không quá phức tạp, nhưng cho đến nay việc phân loại chúng vẫn còn là bài toán mở. Năm 1980, chính phương pháp quỹ đạo của Kirillov đã gợi ý để Đỗ Ngọc Diệp **[1]** đề nghị xét lớp các *MD-đại số* và *MD-nhóm*. Giả sử G là một nhóm Lie thực giải được n chiều (n là một số nguyên

* PGS TS, Trường Đại học Kinh tế - Luật, ĐHQG TPHCM
** ThS, Trường THPT chuyên Thoại Ngọc Hầu, An Giang

dương). Khi đó G được gọi là MDn-nhóm nếu các K-quỹ đạo của nó hoặc là không chiều hoặc có chiều là một hằng số k (chẵn) nào đó không vượt quá n. Đại số LieG của mỗi MDn-nhóm được gọi là một MDn-đại số. Đến đây, một bài toán khá hấp dẫn được đặt ra là "*phân loại và mô tả K-biểu diễn của lớp các MDn-nhóm và MDn-đại số*". Chú ý rằng mọi nhóm (tương ứng, đại số) Lie thực giải được không quá 3 chiều đều là MD-nhóm (tương ứng MD-đại số), hơn thế chúng đã được liệt kê hết từ lâu. Vì thế chúng ta chỉ cần bắt đầu từ các MDn-đại số và MDn-nhóm với $n \geq 4$.

Năm 1984, Đào Văn Trà **[4]** đã liệt kê (nhưng chưa phân loại) toàn bộ các MD4-đại số. Đến năm 1990, trong các bài báo và luận án tiến sĩ của mình, Lê Anh Vũ đã phân loại triệt để (chính xác đến đẳng cấu đại số Lie) các MD4-đại số này (xem **[5],[6],[7]**). Năm 2008, Lê Anh Vũ và Kar Ping Shum **[8]** đã phân loại triệt để các MD5-đại số với ideal dẫn xuất giao hoán. Như vậy, để hoàn thành bài toán phân loại các MD5-đại số thì chúng ta cần phân loại lớp các MD5-đại số với ideal dẫn xuất không giao hoán chiều không dưới hai và không quá bốn. Trong bài báo này, chúng ta sẽ hoàn thành triệt để việc phân loại MD5-đại số với ideal dẫn xuất hai chiều.

1.2. Các kết quả trước đây liên quan trực tiếp đến bài báo

- Giải quyết triệt để lớp MD4. Cụ thể là phân loại tất cả các MD4-đại số, mô tả hình học K-biểu diễn của các MD4-nhóm liên thông bất khả phân, phân loại tô pô tất cả các MD4-phân lá, đồng thời mô tả tất cả các C^*-đại số của các MD4-phân lá bằng phương pháp KK-hàm tử (xem **[5],[6],[7]**).
- Phân loại các MD5-đại số với ideal dẫn xuất giao hoán (xem **[8]**).

1.3. Tóm tắt kết quả chính của bài báo

Cùng với kết quả đã có trước, bài báo sẽ cho ta *một phân loại (chính xác đến đẳng cấu đại số Lie) tất cả các MD5-đại số với ideal dẫn xuất hai chiều.*

Trước khi phát biểu và chứng minh kết quả chính, chúng ta sẽ nhắc lại một số khái niệm có liên quan để bạn đọc tiện theo dõi.

2. Nhắc lại vài khái niệm và tính chất cơ bản

2.1. Nhóm Lie và đại số Lie

2.1.1. **Định nghĩa** *(xem [2])*

Tập hợp G được gọi là một *nhóm Lie* nếu các điều kiện sau được thỏa mãn:

(i) G là một nhóm.

(ii) G là một đa tạp vi phân.

(iii) Phép toán nhóm $G \times G \to G, (x, y) \mapsto xy^{-1}$ là một ánh xạ khả vi.

2.1.2. **Định nghĩa** *(xem [2])*

Một *đại số Lie* trên trường K hay K-*đại số Lie* là một K-không gian vectơ $\boldsymbol{g}$ cùng với ánh xạ K-song tuyến tính $\boldsymbol{g} \times \boldsymbol{g} \to \boldsymbol{g}$, $(X, Y) \mapsto [X, Y]$ (được gọi là *móc Lie* hay hoán tử) thỏa mãn hai tính chất sau:

(i) Tính phản xứng: $[X, X] = 0, \forall X \in \boldsymbol{g}$,

(ii) Đồng nhất thức Jacobi: $[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0; \forall X,Y,Z \in \boldsymbol{g}$.

2.2. Biểu diễn chính quy của đại số Lie

Cho $\boldsymbol{g}$ là đại số Lie. Với mỗi $X \in \boldsymbol{g}$, kí hiệu ad_X là toán tử trong $\boldsymbol{g}$ được xác định bởi: $ad_X(Y)=[X,Y], \forall Y \in \boldsymbol{g}$. Khi đó ad_X là một ánh xạ tuyến tính từ $\boldsymbol{g}$ vào $\boldsymbol{g}$ và ta thu được biểu diễn tuyến tính của $\boldsymbol{g}$ trong chính $\boldsymbol{g}$ như sau:

$$ad : \boldsymbol{g} \to End(\boldsymbol{g}), X \mapsto ad_X$$

Biểu diễn này được gọi là *biểu diễn chính quy* của $\boldsymbol{g}$. Hạt nhân của biểu diễn này là $Ker(ad)=\{ X \in \boldsymbol{g} / ad_X \equiv 0 \}$, chính là tâm của $\boldsymbol{g}$.

2.3. Biểu diễn phụ hợp, K-biểu diễn và dạng song tuyến tính Kirillov

2.3.1. Biểu diễn phụ hợp

Cho G là một nhóm Lie tùy ý và $\boldsymbol{g}$ là đại số Lie của nó. Giả sử G tác động lên $\boldsymbol{g}$ bởi $Ad : G \to Aut\boldsymbol{g}$ được định nghĩa như sau: $Ad(g) := (L_g \circ R_{g^{-1}})_* : \boldsymbol{g} \to \boldsymbol{g}, \forall g \in G$; trong đó L_g (tương ứng, $R_{g^{-1}}$) là phép tịnh tiến trái (tương ứng, phải) của G theo phần tử $g \in G$ (tương ứng, $g^{-1} \in G$). Tác động Ad còn gọi là *biểu diễn phụ hợp* của G trong $\boldsymbol{g}$.

2.3.2. Biểu diễn đối phụ hợp

Kí hiệu $\boldsymbol{g}^*$ là không gian đối ngẫu của $\boldsymbol{g}$. Khi đó biểu diễn Ad cảm sinh ra tác động $K : G \to \mathrm{Aut}\boldsymbol{g}^*$ của G lên $\boldsymbol{g}^*$ theo cách sau đây: $\langle K_{(g)}F, X \rangle := \langle F, Ad(g^{-1})X \rangle, \forall F \in \boldsymbol{g}^*, \forall X \in \boldsymbol{g}, \forall g \in G$; ở đó với mỗi $F \in \boldsymbol{g}^*, X \in \boldsymbol{g}$, kí hiệu $\langle F, X \rangle$ chỉ giá trị của dạng tuyến tính $F \in \boldsymbol{g}^*$ tại trường vectơ (bất biến trái) $X \in \boldsymbol{g}$. Tác động K được gọi là *K-biểu diễn* hay biểu diễn đối phụ hợp của G trong $\boldsymbol{g}^*$. Mỗi quỹ đạo ứng với K-biểu diễn được gọi là *K- quỹ đạo* hay *quỹ đạo Kirillov* của G (trong $\boldsymbol{g}^*$). Như vậy, K-quỹ đạo Ω_F chứa phần tử F được cho bởi $\Omega_F := \{ K_{(g)}F / g \in G \}$.

2.3.3. Dạng song tuyến tính Kirillov

Với mỗi $F \in \boldsymbol{g}^*$, ta xác định dạng B_F như sau: $B_F(X,Y) := \langle F, [X,Y] \rangle, \forall X,Y \in \boldsymbol{g}$. Hiển nhiên B_F là dạng song tuyến tính phản xứng vì móc Lie có tính chất đó. Kí hiệu G_F là *cái ổn định hóa* của F dưới tác động K của G trong $\boldsymbol{g}^*$, tức là $G_F := \{ g \in G / K_{(g)}F = F \}$. Đặt $\boldsymbol{g_F} :=$ Lie(G_F) là đại số Lie của G_F. Đại số Lie $\boldsymbol{g_F}$ và dạng song tuyến tính Kirillov B_F có quan hệ mật thiết với nhau, hơn nữa chúng rất có ích trong việc xác định số chiều của K-quỹ đạo Ω_F chứa F.

2.3.4. Mệnh đề (Xem **[2]**, Section 15.1) *Hạt nhân của B_F và số chiều của Ω_F được cho bởi các hệ thức $KerB_F = \boldsymbol{g_F}$ và $dim\,\Omega_F = dim\boldsymbol{g} - dim\boldsymbol{g_F}$.*

2.4. Các MD-nhóm và các MD-đại số

2.4.1. Định nghĩa (xem **[1]**, Chapter 4, Definition 1.1)

Giả sử G là một nhóm Lie thực giải được n chiều (n là một số tự nhiên dương nào đó). G được gọi là một *MDn-nhóm* nếu các K-quỹ đạo của nó hoặc là không chiều hoặc có chiều là một hằng số k (chẵn) nào đó không vượt quá n. Đại số Lie của mỗi MDn-nhóm được gọi là một *MDn-đại số*.

2.4.2. Mệnh đề (xem **[3,** Theorem 4**]**)

*Điều kiện cần để đại số Lie giải được **g** thuộc lớp MD-đại số là ideal dẫn xuất thứ hai* $\mathbf{g}^{2} := [\mathbf{g}^{1}, \mathbf{g}^{1}] = [\,[\mathbf{g}, \mathbf{g}]\,,\, [\mathbf{g}, \mathbf{g}]\,]$ *của nó giao hoán.*

Chú ý rằng điều kiện cần nêu trên không phải là điều kiện đủ. Nói một cách khác, có những đại số Lie giải được với ideal dẫn xuất thứ hai giao hoán, thậm chí triệt tiêu nhưng vẫn không phải là MD-đại số. Tuy nhiên, nhờ điều kiện này, để phân loại các MD-đại số, ta chỉ cần xét các đại số Lie giải được với $\mathbf{g}^{2}$ giao hoán.

3. Kết quả chính

3.1. Các kí hiệu

Từ đây về sau, ***g*** sẽ là ký hiệu để chỉ một đại số Lie thực giải được 5 chiều và $\mathbf{g}^{1}$ là ideal dẫn xuất hai chiều của ***g***. Để định ý mà không hề làm giảm tính tổng quát, ta chọn một cơ sở thích hợp $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ trong ***g*** sao cho $\mathbf{g}^{1} = \mathbb{R}.X_4 \oplus \mathbb{R}.X_5$. Khi đó, với tư cách là một không gian vectơ 5 chiều, $\mathbf{g} \equiv \mathbb{R}^5$. Không gian đối ngẫu của ***g*** được ký hiệu là $\mathbf{g}^{*}$. Ta cũng có đồng nhất thức $\mathbf{g}^{*} \equiv \mathbb{R}^5$ với cơ sở đối ngẫu $(X_1^*, X_2^*, X_3^*, X_4^*, X_5^*)$ của cơ sở $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$. Đối với các MD5-đại số với ideal dẫn xuất 2 chiều, ta có định lý sau.

3.2. Định lý

*Giả sử **g** là một MD5-đại số với ideal dẫn xuất* $\mathbf{g}^{1}=[\mathbf{g},\mathbf{g}]$*.Khi đó các khẳng định sau là đúng:*

1) *$\mathbf{g}^{1}$ phải giao hoán, nghĩa là không tồn tại MD5-đại số với ideal dẫn xuất 2 chiều không giao hoán.*
2) *Nếu **g** khả phân thì $\mathbf{g} \cong \mathbf{h} \oplus \mathbb{R}$,ở đây **h** là một MD4-đại số.*
3) *Nếu **g** bất khả phân thì **g** đẳng cấu với đại số Lie dưới đây:*

$$\mathbf{g}_{5,2} := \langle X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \ / \ [X_1, X_2] = X_4, [X_2, X_3] = X_5 \rangle,$$

ở đây các móc Lie không viết ra đều tầm thường.

3.3. Phép chứng minh định lý

Để chứng minh định lý trên ta cần một số bổ đề.

3.3.1. Bổ đề (xem **[1]**, Chapter 2, Proposition 2.1)

*Cho **g** là một MD-đại số và một hàm $F \in \mathbf{g}^{*}$ không triệt tiêu hoàn toàn trong $\mathbf{g}^{1}$, nghĩa là tồn tại $U \in \mathbf{g}^{1}$ sao cho $\langle F, U \rangle \neq 0$. Khi đó K-quỹ đạo Ω_F có chiều cực đại.* $\square$

3.3.2. Bổ đề (xem **[8**, Lemma 3.3**]**)

Với mỗi $F \in \boldsymbol{g}^*$ *ta luôn có* $\dim \Omega_F = rank(B)$, *ở đó*

$$B = (b_{ij})_5 := \left(\left\langle F, [X_i, X_j]\right\rangle\right) \; ; \; 1 \le i, j \le 5,$$

là ma trận của dạng song tuyến tính phản xứng B_F *trong cơ sở* $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ *của* ***g***. □

3.3.3. Bổ đề: *Nếu* $Z \in \boldsymbol{g}^1$ *thì* $tr(ad_Z) = 0$.

Chứng minh:

Giả sử ***g*** là một đại số Lie thực 5 chiều và $\boldsymbol{g}^1$ là ideal dẫn xuất thứ nhất của ***g***. Vì $Z \in \boldsymbol{g}^1$ nên Z là một tổ hợp tuyến tính của các móc Lie [X,Y] ;X,Y $\in \boldsymbol{g}$. Do đó, ta chỉ cần chứng minh rằng: $tr(ad_{[X,Y]}) = 0, \forall X, Y \in \boldsymbol{g}$. Thật vậy, ta có

$$tr(ad_{[X,Y]}) = tr\left([ad_X, ad_Y]\right) = tr\left(ad_X \circ ad_Y - ad_Y \circ ad_X\right) = 0. \square$$

3.3.4. Bổ đề

Nếu một đại số Lie thực 5 chiều nào đó có ideal dẫn xuất thứ nhất 2 chiều thì ideal dẫn xuất đó phải giao hoán.

Chứng minh:

Giả sử ***g*** là đại số Lie thực 5 chiều với $\boldsymbol{g}^1$ là ideal dẫn xuất thứ nhất 2 chiều. Hiển nhiên là ta luôn có thể chọn được một cơ sở $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ thích hợp trong ***g*** sao cho $\boldsymbol{g}^1 = \mathbb{R}.X_4 + \mathbb{R}.X_5$. Ta cần chứng tỏ rằng $[X_4, X_5] = 0$.

Giả sử $[X_4, X_5] = \alpha X_4 + \beta X_5; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Khi đó ta có:

$$ad_{X_4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & \alpha \\ * & * & * & 0 & \beta \end{pmatrix},$$

ở đây các dấu * chỉ các phần tử mà ta không cần quan tâm. Rõ ràng $tr(ad_{X_4}) = \beta$, mà $X_4 \in \boldsymbol{g}^1$ nên Bổ đề 3.3.3 cho ta $\beta = 0$. Lập luận tương tự ta cũng có $tr(ad_{X_5}) = -\alpha = 0$.

Vậy $[X_4, X_5] = 0$, tức là $\boldsymbol{g}^1$giao hoán. □

3.3.5. Nhận xét

Bổ đề 3.3.4 vẫn đúng cho đại số Lie thực n chiều tùy ý, nghĩa là hễ đại số Lie thực có ideal dẫn xuất thứ nhất 2 chiều thì ideal đó luôn giao hoán.

3.3.6. Chứng minh kết quả chính

Rõ ràng, khẳng định 1) được suy ra trực tiếp từ bổ đề 3.3.4, còn khẳng định 2) là hiển nhiên. Khẳng định 3) là một phần kết quả đã được nêu và chứng minh chi tiết trong Định lý 3.1 của tài liệu **[8**, Section 3**]**. Ở đây, chúng tôi đính chính lại kết quả của bài báo. Cụ thể, trong trường hợp $\boldsymbol{g}^1$ hai chiều giao hoán, chỉ có duy nhất một họ MD5-đại số

$\boldsymbol{g}_{5,2}$: = $\langle X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \,/\, [X_1, X_2] = X_4, [X_2, X_3] = X_5 \rangle$.

Còn họ

$\boldsymbol{g}_{5,2,2}(\lambda) := \langle X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \,/\, [X_1, X_2] = [X_3, X_4] = X_5, [X_2, X_3] = \lambda X_4 \rangle,\ \lambda \in \mathbb{R}^*$

không phải là MD5-đại số.

Ta sẽ làm rõ điều này. Thật vậy, lấy

$F = \alpha X_1^* + \beta X_2^* + \gamma X_3^* + \delta X_4^* + \sigma X_5^* \in \boldsymbol{g}^*; \alpha, \beta, \gamma, \delta, \sigma \in \mathbb{R}$,

$U = aX_1 + bX_2 + cX_3 + dX_4 + fX_5 \in \boldsymbol{g}; a, b, c, d, f \in \mathbb{R}$.

Nhắc lại rằng $\boldsymbol{g}_F = Ker(B_F) = \{U \in \boldsymbol{g} / \langle F, [U, X_i] \rangle = 0; i = 1,2,3,4,5\}$. Khi đó, tính toán trực tiếp ta được

$$U \in \boldsymbol{g}_F \Leftrightarrow B \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ở đây $$B = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma & 0 & 0 & 0 \\ \sigma & 0 & -\lambda\delta & 0 & 0 \\ 0 & \lambda\delta & 0 & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Theo Bổ đề 3.3.2, $\dim \Omega_F = rank(B)$. Theo Bổ đề 3.3.1, K-quỹ đạo Ω_F có chiều cực đại nếu F|$\boldsymbol{g}^1 \neq 0$, tức là $\delta^2 + \sigma^2 \neq 0$. Đặc biệt, $rank(B)$ sẽ là hằng số nếu δ, σ không đồng thời bằng 0. Dễ thấy rằng $rank(B) = \{0, 2, 4\}$. Do đó $\boldsymbol{g}_{5,2,1}(\lambda)$ không phải là MD5-đại số.

Vậy Định lý 3.2 được chứng minh hoàn toàn. □

3.4. Nhận xét

Nhắc lại rằng, mỗi đại số Lie thực $\boldsymbol{g}$ xác định duy nhất một nhóm Lie liên thông đơn liên G sao cho Lie(G) $= \boldsymbol{g}$. Do đó ta nhận được duy nhất một họ MD5-nhóm liên thông đơn liên tương ứng với MD5-đại số $\boldsymbol{g}_{5,2}$ và họ MD5-nhóm này là bất khả phân.

3.5. Vài bài toán mở cần tiếp tục nghiên cứu

- Phân loại các MD5-đại số với ideal dẫn xuất thứ nhất không giao hoán 3 chiều và 4 chiều để hoàn thành việc phân loại triệt để toàn bộ lớp MD5-đại số.

• Giải quyết các vấn đề tương tự như đã làm cho các MD5-đại số và MD5-nhóm đã xét cho các MD5-đại số và MD5-nhóm còn lại.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. [Di] Do Ngoc Diep (1999), *Method of Noncommutative Geometry for Group C^*-algebras*, Chapman and Hall-CRC Press Reseach Notes in Mathematics Series, \# 416.
2. [Ki] A. A. Kirillov (1976), *Element of the Theory of Representations*, Springer-Verlag, Berlin-Heidenberg-New York.
3. [So-Vi] V. M. Son et H. H. Viet, " Sur la Structure des C^*-algebres d'une Classe de Groupes de Lie", *J. Operator*, 11: 7.
4. [Tra] D. V. Tra (1984), "On the Lie Algebras of low dimention", *Sci. Papes of the 12th College of Institute of Math. Vietnam*, Hanoi.
5. [Vu1] Le Anh Vu (1990), "On the Structure of the C^*-algebra of the Foliation Formed by the K-orbits of Maximal Dimension of the Real Diamond Group", *J. Operator Theory*, 24: 227-238.
6. [Vu2] Le Anh Vu (1990), “On the Foliations Formed by the Generic K-orbits of the MD4-Groups”, *Acta Math.Vietnam*, 2: 39 – 55.
7. [Vu3] Le Anh Vu (1993), "Foliations Formed by Orbits of Maximal Dimension in the Coadjoint Rerepsentation of a Class of Solvable Lie Groups", *Vest. Moscow Uni., Math. Bulletin*, 48: 24-27.
8. [Vu-Sh] Le Anh Vu, Kar Ping Shum (2008), "Classification of 5-dimensional MD-algebras having commutative derived ideal", *Advances in Algebra and Combinatoric, Singapore*: World Scientific, 353-371.

(Ngày Tòa soạn nhận được bài: 18-11-2010; ngày chấp nhận đăng: 25-5-2011)