SỰ PHỤ THUỘC LIÊN TỤC CỦA NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH VI TÍCH PHÂN VOLTERRA ĐỐI SỐ LỆCH PHI TUYẾN LOẠI HYPERBOLIC

LÊ HOÀN HÓA*,
NGUYỄN NGỌC TRỌNG**, LÊ THỊ KIM ANH***

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi chứng minh sự phụ thuộc liên tục của nghiệm phương trình vi tích phân Volterra đối số lệch phi tuyến loại Hyperbolic sau :

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)(u(t), u_t) + \int_0^t L(t,s,u(s),u_s)ds + f(t),\ t \geq 0 \\ u_0 = \varphi \in C_r \end{cases} \qquad (T)$$

Từ khóa: Tính phụ thuộc liên tục của nghiệm , phương trình vi tích phân Volterra đối số lệch phi tuyến loại Hyperbolic.

ABSTRACT

Continuous dependence of solution for the nonlinear Hyperbolic Volterra integrodifferential equation with deviating argument

In this paper, we prove the continuous dependence result for the following nonlinear Hyperbolic Volterra integrodifferential equation with deviating argument

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)(u(t), u_t) + \int_0^t L(t,s,u(s),u_s)ds + f(t),\ t \geq 0 \\ u_0 = \varphi \in C_r \end{cases} \qquad (T)$$

Keywords: Continuous dependence of solution, nonlinear Hyperbolic Volterra integrodifferential equation with deviating argument.

1. Giới thiệu

Lí thuyết phương trình là một lĩnh vực rộng lớn của toán học và được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu. Trong đó, lớp phương trình vi tích phân đóng vai trò quan trọng. Các kết quả của lĩnh vực này tìm được nhiều ứng dụng trong vật lí, hóa học, sinh học cũng như trong việc nghiên cứu các mô hình phát triển xuất phát từ kinh tế học.

Năm 1981, trong [4] M.L.Heard đã xem xét phương trình vi tích phân Volterra phi tuyến loại Hyperbolic có dạng:

* PGS TS, Trường Đại học Sư phạm TPHCM
** ThS, Trường Đại học Sư phạm TPHCM
***ThS, Đại học Tiền Giang

$$\begin{cases} u'(t) + A(t)u(t) = \int_0^t g(t,s,u(s))ds + f(t), \ t \geq 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Năm 1996, trong [5] R.Nagel và E.Sinestrari đã nghiên cứu phương trình vi tích phân Volterra phi tuyến loại Hyperbolic

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + \int_0^t K(t,s,u(s))ds + f(t), \ t \geq t_0, \\ u(t_0) = u_0. \end{cases}$$

Các loại phương trình trên phát sinh một cách tự nhiên trong việc nghiên cứu sự đàn hồi của các vật rắn.

Gần đây, trong hai bài báo [1], [2] và tài liệu tham khảo [3] chúng tôi đã xem xét tính khác rỗng, tính continuum và tính R_δ của tập nghiệm phương trình vi tích phân Volterra phi tuyến loại Hyperbolic có cả sự xuất hiện đối số lệch

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)u(t) + L(t)u_t + V(t,u(t)) + \int_0^t K(t,s,u(s),u_s)ds + f(t), \ t \geq 0, \\ u_0 = \varphi \in C_r. \end{cases}$$

Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu sự phụ thuộc liên tục của nghiệm phương trình vi tích phân Volterra đối số lệch phi tuyến loại Hyperbolic dạng (T). Để làm điều này chúng tôi chứng minh một bổ đề về bất đẳng thức tích phân dạng Gronwall.

Bản thân sự phụ thuộc liên tục của nghiệm đã là một tính chất thú vị nhưng quan trọng hơn là tính chất này đóng vai trò quan trọng đối với tính chỉnh của bài toán, việc xấp xỉ nghiệm và nghiên cứu sự tồn tại nghiệm tuần hoàn.

2. Kết quả chính

2.1. Giới thiệu bài toán

Cho $r > 0$. Ta kí hiệu $|\bullet|$ là chuẩn của không gian Banach E và $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$,

$\Delta = \{(t,s) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ : t \geq s\}$ và $\Delta_n = \Delta \cap [0,n]^2$ với $n \in \mathbb{N}$,

$C_r = C([-r,0],E)$ với chuẩn $|u|_r = \sup\{|u(t)| : t \in [-r,0]\}$,

$X = C([-r,\infty),E)$ là không gian Frechet các hàm liên tục từ $[-r,\infty)$ vào E với họ nửa chuẩn $\{\|\bullet\|_n\}_n$ được định nghĩa như sau : $\|x\|_n = \sup\{|x(t)| : t \in [-r,n]\}, n \in \mathbb{N}$.

Đặt $F = E \times C_r$ với chuẩn $\|(x,y)\| = |x| + |y|_r$. Đặt $\|\bullet\|_L$ là chuẩn trên không gian các ánh xạ tuyến tính liên tục từ $E \times C_r$ vào E.

Với $u \in C([-r,\infty),E)$ và $t \geq 0$ đặt $u_t \in C_r$ định nghĩa bởi

$u_t(\theta) = u(t+\theta)$ với $\theta \in [-r,0]$.

Với $u \in C([-r,d],E)$ và $t \in [0,d]$ đặt $u_t \in C_r$ định nghĩa bởi

$u_t(\theta) = u(t+\theta)$ với $\theta \in [-r,0]$.

Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, đặt $X_n = C([-r,n],E)$ là không gian Banach gồm các hàm liên tục $u:[-r,n] \to E$ với chuẩn $\|u\|_n = \sup\{|u(t)| : t \in [-r,n]\}$.

Xét phương trình

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)(u(t),u_t) + \int_0^t L(t,s,u(s),u_s)ds + f(t),\ t \geq 0, \\ u_0 = \varphi \in C_r, \end{cases} \qquad (T)$$

trong đó $\{A(t)\}_{t\geq 0}$ là họ toán tử tuyến tính liên tục từ $E \times C_r$ vào E, $f:\mathbb{R}_+ \to E$ liên tục. Hơn nữa ta giả thiết :

(E.1) $t \mapsto A(t)$ liên tục ;

(E.2) $L:\Delta \times F \to E$ là hàm L^1-Caratheodory, nghĩa là

(E.2.1)Với mọi $z \in F$, hàm $\tau \mapsto L(\tau,z)$ Borel đo được ;

(E.2.2)Với hầu hết $\tau \in \Delta$, hàm $z \mapsto L(\tau,z)$ liên tục ;

(E.2.3)Với mỗi $n \in \mathbb{N}$ và mỗi hằng số $C > 0$, tồn tại hàm không âm $h_C \in L^1([0,n]^2)$ và tập compact K_C trong E sao cho $L(t,s,z) \in h_C(t,s)K_C$ với mọi $z \in \overline{B_F}(0,C)$ và với hầu hết $(t,s) \in \Delta_n$ (trong đó $L^1(\Omega)$ là không gian các hàm $u:\Omega \to \mathbb{R}$ khả tích trên Ω) ;

(E.3) $\lim\limits_{\|z\|\to\infty} \dfrac{|L(t,s,z)|}{\|z\|} = 0$ đều theo (t,s) trên mỗi tập bị chặn bất kì của Δ.

Định nghĩa.

$u:[-r,\infty) \to E$ là nghiệm của phương trình (T) nếu $u|_{[0,\infty)} \in C^1([0,\infty),E)$ và u thỏa phương trình (T), ở đây $C^1([0,\infty),E)$ là không gian các hàm khả vi liên tục $u:[0,\infty) \to E$.

Chú ý.

Chứng minh tương tự [3] ta thấy nếu các giả thiết (E.1), (E.2) và (E.3) thỏa mãn thì phương trình (T) có nghiệm và nếu ta thêm giả thiết toán tử L Lipschitz địa phương thì phương trình (T) có nghiệm duy nhất.

2.2. Sự phụ thuộc liên tục của nghiệm

Định lí 1. (Bất đẳng thức dạng Gronwall)

Cho $u:[a,b]\to \mathbb{R}_+$ *liên tục,* c *và* α *là hai hằng số không âm. Giả sử ta có*

$$u(t)\le c+\alpha\int_a^t u(s)ds+\alpha\int_a^t\left(\int_a^s u(\tau)d\tau\right)ds \text{ với } a\le\tau\le s\le t\le b.$$

Khi đó $u(t)\le c\left(1+\dfrac{\alpha}{\alpha+1}\left(\exp\left((\alpha+1)(t-a)\right)-1\right)\right)$.

Chứng minh:

Đặt $v(t)=c+\alpha\int_a^t u(s)ds+\alpha\int_a^t\left(\int_a^s u(\tau)d\tau\right)ds$. Theo giả thiết ta có $u(t)\le v(t)$, ta lại có $v'(t)=\alpha u(t)+\alpha\int_a^t u(s)ds\le\alpha\left(v(t)+\int_a^t v(s)ds\right)$.

Đặt $m(t)=v(t)+\int_a^t v(s)ds$. Vậy $v'(t)\le\alpha m(t)$ và $m(a)=v(a)=c$.

Vì $\int_a^t v(s)ds\ge 0$ nên $v(t)\le m(t)$.

Do đó $m'(t)=v'(t)+v(t)\le\alpha m(t)+m(t)=(\alpha+1)m(t)$.

Vậy $m'(t)-(\alpha+1)m(t)\le 0$.

Nhân hai vế bất đẳng thức trên với $\exp(-(\alpha+1)t)$ ta có:

$$m'(t)\exp(-(\alpha+1)t)-(\alpha+1)m(t)\exp(-(\alpha+1)t)\le 0,$$

nghĩa là $\left(m(t)\exp(-(\alpha+1)t)\right)'\le 0$. Vậy $\int_a^t\left(m(s)\exp(-(\alpha+1)s)\right)'ds\le 0$.

Từ đó $m(t)\exp(-(\alpha+1)t)-m(a)\exp(-(\alpha+1)a)\le 0$.

Vậy $m(t)\le c\exp\left((\alpha+1)(t-a)\right)$.

Do đó ta có $v'(t)\le\alpha m(t)\le\alpha c.\exp\left((\alpha+1)(t-a)\right)$.

Vậy $\int_a^t v'(s)ds\le\int_a^t\alpha c.\exp\left((\alpha+1)(s-a)\right)ds=\dfrac{\alpha c}{\alpha+1}\left(\exp\left((\alpha+1)(t-a)\right)-1\right)$.

Từ đó ta có $v(t)\le v(a)+\dfrac{\alpha c}{\alpha+1}\left(\exp\left((\alpha+1)(t-a)\right)-1\right)$

$$= c\left(1+\frac{\alpha}{\alpha+1}\left(\exp\left((\alpha+1)(t-a)\right)-1\right)\right).$$

Vậy $u(t) \le v(t) \le c\left(1+\frac{\alpha}{\alpha+1}\left(\exp\left((\alpha+1)(t-a)\right)-1\right)\right)$. Định lí được chứng minh.

Định lí 2.

Giả sử $L^0 : \Delta \times F \to E$ *thỏa các điều kiện (E.1), (E.2), (E.3),* $\varphi^0 \in C_r$ *và* $f^0 : \mathbb{R}_+ \to E$ *liên tục. Với mỗi* $k \in \mathbb{N}$, *lấy* $L_k : \Delta \times F \to E$ *thỏa các điều kiện (E.1), (E.2), (E.3) và dãy* $\{L_k\}_k$ *hội tụ đều về* L^0. *Lấy* $\{\varphi_k\}_k$ *là dãy trong* C_r *sao cho* $\lim_{k\to\infty} \varphi = \varphi^0$ *trong* C_r *và lấy* $\{f_k\}_k \subset C(\mathbb{R}_+, E)$ *hội tụ đều về* f^0. *Ta xét các phương trình sau:*

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)\left(u(t), u_t\right) + \int_0^t L_k\left(t, s, u(s), u_s\right) ds + f_k(t),\ t \ge 0, \\ u_0 = \varphi_k \in C_r, \end{cases} \qquad (T_k)$$

$$\begin{cases} u'(t) = A(t)\left(u(t), u_t\right) + \int_0^t L^0\left(t, s, u(s), u_s\right) ds + f^0(t),\ t \ge 0, \\ u_0 = \varphi^0 \in C_r. \end{cases} \qquad (T^0)$$

Lấy u^k *là nghiệm của phương trình* (T_k) *và* u^0 *là nghiệm của phương trình* (T^0). *Ta giả sử phương trình* (T^0) *có nghiệm duy nhất.*

Khi đó ta có $\lim_{k\to\infty} u^k = u^0$ *trong* $C([-r,\infty), E)$.

Chứng minh:

Đặt $B_n = \left\{ u^k\big|_{[-r,n]} : k \in \mathbb{N} \right\}$ với $n \in \mathbb{N}$.

Bước 1.

Ta chứng minh B_n bị chặn trong X_n.

Vì $\{L_k\}_k$ hội tụ đều về L^0 nên tồn tại $k_0 \in \mathbb{N}$ sao cho với $k \in \mathbb{N}$ và $k \ge k_0$ thì $\left|L_k(t,s,z) - L^0(t,s,z)\right| < 1$ với mọi $(t,s,z) \in \Delta \times F$.

Từ điều kiện (E.3) ta thấy tồn tại $C > 0$ sao cho khi $\|z\| > C$ thì $\left|L^0(t,s,z)\right| < \|z\|$ và $\left|L_k(t,s,z)\right| < \|z\|$ với mọi $(t,s) \in \Delta_n$ và $k = \overline{1, k_0}$.

Từ điều kiện (E.2.3) ta thấy tồn tại $R>0$ và hàm không âm $h_C \in L^1\left([0,n]^2\right)$ sao cho với mọi $k=\overline{1,k_0}$ ta có $\left|L^0(t,s,z)\right| < Rh_C(t,s)$ và $\left|L_k(t,s,z)\right| < Rh_C(t,s)$ với mọi $z \in F$ thỏa $\|z\| \le C$ và với hầu hết $(t,s) \in \Delta_n$.

Vậy $\left|L^0(t,s,z)\right| \le Rh_C(t,s)+\|z\|$ và $\left|L_k(t,s,z)\right| \le Rh_C(t,s)+\|z\|$ với mọi $z \in F$, hầu hết $(t,s) \in \Delta_n$ và mọi $k=\overline{1,k_0}$.

Ta có $\left|L_k(t,s,z)\right| \le \left|L_k(t,s,z)-L^0(t,s,z)\right| + \left|L^0(t,s,z)\right| \le 1+Rh_C(t,s)+\|z\|$ với mọi $z \in F$, hầu hết $(t,s) \in \Delta_n$ và mọi $k \ge k_0$.

Do đó $\left|L_k(t,s,z)\right| \le 1+Rh_C(t,s)+\|z\|$ với mọi $k \in \mathbb{N}$, với mọi $z \in F$ và hầu hết $(t,s) \in \Delta_n$.

Vì $\{f_k\}_k$ hội tụ đều về f^0 nên tồn tại $q>0$ sao cho $\left|f_k(s)\right| \le q$ với mọi $k \in \mathbb{N}, s \in [0,n]$.

Từ giả thiết (E.1) và sự kiện $h_C \in L^1\left([0,n]^2\right)$ ta thấy tồn tại $\alpha>0$ sao cho:

$$q + 2\max_{s\in[0,n]}\|A(s)\|_L + \int_0^n\left(\int_0^n\left(1+Rh_C(s,\tau)\right)d\tau\right)ds < \alpha.$$

Ta thấy $\left|u^k(s)\right| \le \left\|\left(u^k\right)_s\right\|_r$ với mọi $s \in [0,n]$ nên với $t \in [0,n]$ ta có

$$\begin{aligned}
\left|u^k(t)\right| &\le \left|\varphi_k(0)\right| + \int_0^t\left|A(s)\left(u^k(s),\left(u^k\right)_s\right)+f_k(s)\right|ds + \int_0^t\left(\int_0^s\left|L_k\left(s,\tau,u^k(\tau),\left(u^k\right)_\tau\right)\right|d\tau\right)ds \\
&\le \left|\varphi_k(0)\right| + \alpha\int_0^t\left\|\left(u^k\right)_s\right\|_r ds + \int_0^t\left|f_k(s)\right|ds + \int_0^t\left(\int_0^s\left(1+Rh_C(s,\tau)+2\left\|\left(u^k\right)_\tau\right\|_r\right)d\tau\right)ds \\
&\le \left|\varphi_k(0)\right| + \alpha\int_0^t\left\|\left(u^k\right)_s\right\|_r ds + n\alpha + \alpha + 2\int_0^t\left(\int_0^s\left\|\left(u^k\right)_\tau\right\|_r d\tau\right)ds.
\end{aligned}$$

Đặt $b=\sup\left\{\|\varphi_k\|_r : k \in \mathbb{N}\right\}$, $c=(n+1)\alpha+b$ và $\lambda=\alpha+2$.

Ta có $\left|u^k(t)\right| \le c + \lambda\int_0^t\left\|\left(u^k\right)_s\right\|_r ds + \lambda\int_0^t\left(\int_0^s\left\|\left(u^k\right)_\tau\right\|_r d\tau\right)ds$ với mọi $t \in [0,n]$.

Mặt khác với $t \in [-r, 0]$ ta thấy $|u^k(t)| = |\varphi_k(t)| \le b$ nên ta có $\left\| (u^k)_t \right\|_r \le c + \lambda \int_0^t \left\| (u^k)_s \right\|_r ds + \lambda \int_0^t \left(\int_0^s \left\| (u^k)_\tau \right\|_r d\tau \right) ds$ với mọi $t \in [0, n]$.

Vì ánh xạ $t \mapsto \left\| (u^k)_t \right\|_r$ liên tục nên theo Định lí 1 ta có $\left\| (u^k)_t \right\|_r \le c\left[1 + \frac{\lambda}{\lambda+1}\left(\exp((\lambda+1)t) - 1\right)\right] \le c\left[1 + \frac{\lambda}{\lambda+1}\left(\exp((\lambda+1)n) - 1\right)\right]$.

Suy ra $|u^k(t+\theta)| \le c\left[1 + \frac{\lambda}{\lambda+1}\left(\exp((\lambda+1)n) - 1\right)\right]$ với mọi $k \in \mathbb{N}, t \in [0, n], \theta \in [-r, 0]$.

Vậy $|u^k(t)| \le c\left[1 + \frac{\lambda}{\lambda+1}\left(\exp((\lambda+1)n) - 1\right)\right]$ với mọi $k \in \mathbb{N}, t \in [-r, n]$. Từ đó B_n bị chặn trong X_n.

Bước 2.

Ta chứng minh B_n là tập compact tương đối trong X_n.

Đặt $V, C^0, C_k : X \to X$ (với $k \in \mathbb{N}$) như sau

$$Vu(t) = \begin{cases} \int_0^t A(s)(u(s), u_s) ds & , t \ge 0, \\ 0 & , t \in [-r, 0], \end{cases}$$

$$C^0 u(t) = \begin{cases} \int_0^t \left(\int_0^s L^0(s, \tau, u(\tau), u_\tau) d\tau \right) ds + \varphi^0(0) + \int_0^t f^0(s) ds & , t \ge 0, \\ \varphi^0(t) & , t \in [-r, 0], \end{cases}$$

$$C_k u(t) = \begin{cases} \int_0^t \left(\int_0^s L_k(s, \tau, u(\tau), u_\tau) d\tau \right) ds + \varphi_k(0) + \int_0^t f_k(s) ds & , t \ge 0, \\ \varphi_k(t) & , t \in [-r, 0]. \end{cases}$$

Từ Định lí 1.2.12 của [3] ta có C_k, C^0 là các ánh xạ hoàn toàn liên tục và chứng minh tương tự Định lí 1.2.10 của [3] ta thấy tồn tại $c_n > 0$ sao cho:

$\left\| V^i x \right\|_n \le \frac{(nc_n)^i}{i!} \|x\|_n$ với mọi $i \in \mathbb{N}$ và $x \in X$

Đặt $\|x\|_n^* = \sum_{i=0}^{\infty} \|V^i x\|_n$ với $x \in X_n$. Ta thấy V là ánh xạ tuyến tính liên tục nên $\|\bullet\|_n^*$ là chuẩn trên X_n.

Vì $\|x\|_n^* = \sum_{i=0}^{\infty} \|V^i x\|_n \le \|x\|_n \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(nc_n)^i}{i!} = \|x\|_n e^{nc_n}$ nên $\|x\|_n \le \|x\|_n^* \le \|x\|_n e^{nc_n}$. Do đó hai chuẩn $\|\bullet\|_n, \|\bullet\|_n^*$ tương đương.

Mặt khác $\|Vx\|_n^* = \sum_{i=0}^{\infty} \|V^{i+1} x\|_n = \sum_{i=0}^{\infty} \|V^i x\|_n - \|x\|_n = \|x\|_n^* - \|x\|_n \le \|x\|_n^* - e^{-nc_n} \|x\|_n^*$.

Do đó $\|Vx\|_n^* \le \left(1 - e^{-nc_n}\right) \|x\|_n^*$. Đặt $p = 1 - e^{-nc_n}$ thì V là ánh xạ co hệ số p trên $\left(X_n, \|\bullet\|_n^*\right)$

Khi đó $V + C_k, V + C^0$ là ánh xạ cô đặc hệ số p từ $\left(X_n, \|\bullet\|_n^*\right)$ đến $\left(X_n, \|\bullet\|_n^*\right)$

Vậy $\chi\left[\left(V + C_k\right)\left(B_n\right)\right] \le p\chi\left(B_n\right)$ và $\chi\left[\left(V + C^0\right)\left(B_n\right)\right] \le p\chi\left(B_n\right)$ với χ là độ đo cầu phi compact xác định bởi $\chi(B) = \inf\{r > 0 :$ B bị phủ bởi hữu hạn các quả cầu bán kính $r\}$.

Vì $\{\varphi_k\}_k$ hội tụ đều về φ^0, $\{L_k\}_k$ hội tụ đều về L^0 và $\{f_k\}_k$ hội tụ đều về f^0 nên $\{C_k\}_k$ hội tụ đều về C^0.

Do đó với $\varepsilon > 0$, tồn tại $k_1 \in \mathbb{N}$ sao cho với $k \ge k_1$ thì $\left\|C_k\left(u^k\right) - C^0\left(u^k\right)\right\|_n^* < \varepsilon$.

Điều này dẫn đến $\left\{\left(C_k\left(u^k\right) - C^0\left(u^k\right)\right)\Big|_{[-r,n]} : k \in \mathbb{N}\right\} \subset \bigcup_{k=0}^{k_1} \left\{\left(C_k\left(u^k\right) - C^0\left(u^k\right)\right)\Big|_{[-r,n]}\right\} \cup \overline{B}(0,\varepsilon)$ (trong đó $\overline{B}(0,\varepsilon) = \left\{u \in X_n : \|u\|_n^* \le \varepsilon\right\}$).

Suy ra $\left\{\left(C_k\left(u^k\right) - C^0\left(u^k\right)\right)\Big|_{[-r,n]} : k \in \mathbb{N}\right\} \subset \bigcup_{k=0}^{k_1} \left\{C_k\left(B_n\right) - C^0\left(B_n\right)\right\} \cup \overline{B}(0,\varepsilon)$.

Vì C_k, C^0 là các ánh xạ hoàn toàn liên tục và B_n bị chặn nên $C_k(B_n) - C^0(B_n)$ là tập compact tương đối với mọi $k \in \mathbb{N}$. Do vậy $\bigcup_{k=0}^{k_1}\left\{C_k(B_n) - C^0(B_n)\right\}$ là tập compact tương đối. Vậy $\chi\left(\bigcup_{k=0}^{k_1}\left\{C_k(B_n) - C^0(B_n)\right\}\right) = 0$.

Mà ta lại có $\chi\left(\overline{B}(0,\varepsilon)\right) \le 2\varepsilon$ và

$$\chi\left(\left\{\left(C_k\left(u^k\right) - C^0\left(u^k\right)\right)\Big|_{[-r,n]} : k \in \mathbb{N}\right\}\right) \le \chi\left(\bigcup_{k=0}^{k_1}\left\{C_k(B_n) - C^0(B_n)\right\}\right) + \chi\left(\overline{B}(0,\varepsilon)\right)$$

nên $\chi\left(\left\{\left(C_k\left(u^k\right) - C^0\left(u^k\right)\right)\Big|_{[-r,n]} : k \in \mathbb{N}\right\}\right) \le 2\varepsilon$.

Cho $\varepsilon \to 0$ ta được $\chi\left(\left\{\left(C_k\left(u^k\right) - C^0\left(u^k\right)\right)\Big|_{[-r,n]} : k \in \mathbb{N}\right\}\right) = 0$.

Ta lại có $u^k = V\left(u^k\right) + C_k\left(u^k\right) = V\left(u^k\right) + C^0\left(u^k\right) + C_k\left(u^k\right) - C^0\left(u^k\right)$.

Do vậy $B_n \subset \left(V + C^0\right)(B_n) + \left\{\left(C_k\left(u^k\right) - C^0\left(u^k\right)\right)\Big|_{[-r,n]} : k \in \mathbb{N}\right\}$

Từ đó $\chi(B_n) \le \chi\left(\left(V + C^0\right)(B_n)\right) + \chi\left(\left\{\left(C_k\left(u^k\right) - C^0\left(u^k\right)\right)\Big|_{[-r,n]} : k \in \mathbb{N}\right\}\right) \le p\chi(B_n)$.

Vậy $(1-p)\chi(B_n) \le 0$. Từ đó $\chi(B_n) = 0$ (vì $0 < p < 1$). Vậy B_n là tập compact tương đối trong $\left(X_n, \|\bullet\|_n^*\right)$.

Bước 3.

Ta chứng minh $\lim\limits_{k\to\infty} u^k = u^0$ trong $C([-r,\infty), E)$.

Do B_n là tập compact tương đối trong $\left(X_n, \|\bullet\|_n^*\right)$ nên tồn tại dãy con $\left\{u^{k_i}\Big|_{[-r,n]}\right\}_i$ của $\left\{u^k\Big|_{[-r,n]}\right\}_k$ sao cho $\lim\limits_{i\to\infty} u^{k_i}\Big|_{[-r,n]} = y$ trong $\left(X_n, \|\bullet\|_n^*\right)$.

Ta lại có $u^k = V\left(u^k\right) + C_k\left(u^k\right)$ nên $u^{k_i}\Big|_{[-r,n]} = V\left(u^{k_i}\Big|_{[-r,n]}\right) + C_{k_i}\left(u^{k_i}\Big|_{[-r,n]}\right)$ (suy ra từ định nghĩa của V và C_k)

Cho $i \to \infty$ ta có $y = V(y) + C^0(y)$. Từ đó ta có $y = u^o\big|_{[-r,n]}$ (vì u^0 là nghiệm duy nhất của phương trình (T^0)). Vậy bất kì dãy con hội tụ nào của dãy $\left\{u^k\big|_{[-r,n]}\right\}_k$ cũng có cùng một giới hạn là $u^o\big|_{[-r,n]}$, lại do B_n là tập compact tương đối nên điều này dẫn đến $\lim\limits_{k\to\infty} u^k\big|_{[-r,n]} = u^o\big|_{[-r,n]}$ trong $\left(X_n, \|\bullet\|_n^*\right)$. Vì hai chuẩn $\|\bullet\|$ và $\|\bullet\|_n^*$ tương đương nên $\lim\limits_{k\to\infty}\left\|u^k\big|_{[-r,n]} - u^o\big|_{[-r,n]}\right\|_n = 0$ tức là $\lim\limits_{k\to\infty}\left\|u^k - u^o\right\|_n = 0$.

Vậy $\lim\limits_{k\to\infty} u^k = u^0$ trong $C([-r,\infty), E)$. Định lí được chứng minh

Chú ý.

Như đã trình bày ở trên, nếu ngoài giả thiết (E.2) và (E.3) ta áp đặt thêm tính Lipschitz địa phương lên toán tử L^0 thì phương trình (T^0) có nghiệm duy nhất.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Lê Hoàn Hóa, Nguyễn Ngọc Trọng, Lê Thị Kim Anh (2010), "Nghiệm mạnh của phương trình vi tích phân với đối số lệch", *Tạp chí Khoa học ĐHSP TPHCM*, (24), tr. 104 -114.
2. Lê Hoàn Hóa, Nguyễn Ngọc Trọng (2011), "Tính R_δ của tập nghiệm mạnh phương trình vi tích phân Volterra đối số lệch phi tuyến loại Hyperbolic", *Tạp chí Khoa học ĐHSP TPHCM*, (27), tr. 1-14.
3. Nguyễn Ngọc Trọng (2011), *Tập nghiệm của phương trình vi tích phân Volterra đối số lệch phi tuyến loại Hyperbolic*, Luận văn Thạc sĩ, Đại học Sư phạm TPHCM
4. M.L.Heard (1981), "An abstract semilinear Hyperbolic Volterra integrodifferential equation", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Vol.80, pp. 175-202.
5. R.Nagel, E.Sinestrari (1996), "Nonlinear Hyperbolic Volterra integrodifferential equations", *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications,* Vol.27, No.2, pp. 167-186.

(Ngày Tòa soạn nhận được bài: 21-02-2012; ngày chấp nhận đăng: 24-4-2012)