ĐỐI XỨNG ẨN CỦA BÀI TOÁN MICZ-KEPLER CHÍN CHIỀU

PHAN NGỌC HƯNG*, LÊ VĂN HOÀNG**

TÓM TẮT

Mới đây, bài toán Kepler trong không gian chín chiều với sự có mặt của đơn cực SO(8) được xây dựng. Ta gọi là bài toán MICZ-Kepler chín chiều hoặc có thể gọi là bài toán SO(8) MICZ-Kepler. Trong công trình này, bằng cách xây dựng véc-tơ Runge-Lenz, chúng tôi tìm ra một đối xứng ẩn của bài toán này và đưa ra dưới dạng tường minh nhóm đối xứng đầy đủ của bài toán là SO(10).

Từ khóa: bài toán MICZ-Kepler, đối xứng ẩn, đại số SO(10), véc-tơ Runge-Lenz, không gian chín chiều.

ABSTRACT

A hidden symmetry of the nine-dimensional Micz-Kepler problem

The Kepler problem in a nine-dimensional space with the presence of the SO(8) monopole has been investigated recently. It is called the nine-dimensional MICZ-Kepler problem or the SO(8) MICZ-Kepler problem. In this article, by establishing the Runge-Lenz vector, we find a hidden symmetry of the problem and obtain the sufficient symmetry group of the problem as the SO(10) group in explicit forms.

Keywords: MICZ-Kepler problem, hidden symmetry, SO(10) algebra, Runge-Lenz vector, nine-dimensional space.

1. Mở đầu

Bài toán Kepler, hay còn gọi là bài toán Coulomb, là một trong số ít các bài toán có nghiệm chính xác trong cơ học lượng tử. Đây là một bài toán kinh điển được trình bày trong tất cả các giáo trình cơ học lượng tử. Ban đầu, bài toán Kepler được chỉ ra có nhóm đối xứng không gian là SO(3), tuy nhiên sau đó người ta đã chứng minh có sự tồn tại một đối xứng ẩn là vector Runge-Lenz [9]. Như vậy, một cách đầy đủ, đối xứng không gian của bài toán Kepler là đối xứng SO(4) [1]. Trong những năm 1960, bài toán Kepler đã được mở rộng bằng cách thêm vào một từ trường của đơn cực từ Dirac [8, 10] và sau này được gọi là bài toán MIZC-Kepler. Các công trình nghiên cứu đề tài này [8, 10] cho thấy việc đưa thêm đơn cực từ Dirac không làm phá vỡ đối xứng của bài toán.

Mở rộng hơn bài toán MICZ-Kepler cho không gian nhiều chiều, người ta cũng thấy có sự tồn tại đối xứng ẩn của bài toán liên quan đến véc-tơ Runge-Lenz [6, 7]. Mới đây, bài toán MICZ-Kepler chín chiều được xây dựng như là sự mở rộng của bài toán Kepler trong không gian chín chiều với sự tham gia của đơn cực SO(8) [3, 4]. Việc khảo sát sự đối xứng của bài toán hiển nhiên là một bước nghiên cứu quan trọng. Trong công trình [5] nhóm đối xứng động lực học SO(10,2) đã được xây dựng dưới

* ThS, Trường Đại học Sư phạm TPHCM
** PGS TSKH, Trường Đại học Sư phạm TPHCM

dạng đại số. Tuy nhiên, cần sự nghiên cứu sâu nhóm đối xứng này. Trong công trình này, chúng tôi sẽ khảo sát tính đối xứng không gian của bài toán MICZ-Kepler chín chiều và chỉ ra biểu thức tường minh của vector Runge-Lenz, một dạng đối xứng ẩn của bài toán. Từ đây, chúng tôi sẽ xây dựng nhóm SO(10) như một nhóm đối xứng không gian đầy đủ của bài toán MICZ-Kepler chín chiều. Việc xây dựng được nhóm đối xứng không gian của bài toán là một bước quan trọng cho việc khảo sát phổ năng lượng của hệ sẽ được trình bày trong các công trình kế tiếp.

Phần hai bài báo sẽ đưa ra tổng quan về véc-tơ Runge-Lenz và về đối xứng ẩn của bài toán Kepler ba chiều. Trong phần này cũng đề cập đến sự mở rộng cho bài toán MICZ-Kepler trong không gian nhiều chiều. Tiếp theo, trong phần ba sẽ trình bày việc xây dựng véc-tơ Runge-Lenz cho bài toán MICZ-Kepler chín chiều. Ở phần này cũng chứng minh đó chính là một bất biến mới của bài toán, đặc trưng cho một đối xứng ẩn. Sau đó đối xứng SO(10) được xây dựng tường minh cho bài toán.

2. Véc-tơ Runge-Lenz và đối xứng ẩn trong bài toán Kepler

Phần này, chúng tôi viết tổng quan các kết quả có trước về véc-tơ Runge-Lenz và đối xứng ẩn của bài toán kepler [1, 7-10] nhằm làm cơ sở cho các tính toán của chúng tôi trong phần tiếp theo.

Trong cơ học cổ điển, một hạt chuyển động trong trường xuyên tâm có cường độ lực tỉ lệ nghịch với bình phương khoảng cách, sẽ tồn tại các đại lượng bảo toàn là: năng lượng E, các thành phần của véc-tơ mô-men động lượng quỹ đạo $\vec{L}$, và vectơ Runge-Lenz $\vec{M}$. Véc-tơ Runge-Lenz cổ điển được định nghĩa là:

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{L} - mk\hat{r}, \tag{1}$$

trong đó, m là khối lượng của hạt chuyển động dưới tác dụng của lực xuyên tâm; $\vec{p}$ là véc-tơ động lượng của hạt; $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ là véc-tơ mô-men động lượng quỹ đạo của hạt; k là tham số đặc trưng cho cường độ của lực xuyên tâm, trong trường hợp bài toán có tương tác Coulomb, $k = Ze^2$; $\vec{r}$ là véc-tơ tọa độ của hạt; $\hat{r}$ là vectơ bán kính đơn vị, nghĩa là $\hat{r} = \vec{r}/r$.

Năm 1926, Pauli đã đưa ra dạng lượng tử của vector này và ứng dụng để tìm phổ năng lượng nguyên tử hydro mà không cần giải phương trình Schrödinger [9]. Theo Pauli, vector Runge-Lenz có dạng:

$$\hat{M} = \frac{1}{2}(\hat{p} \times \hat{L} - \hat{L} \times \hat{p} - 2Z\hat{r}) . \tag{2}$$

Ta sẽ xem vai trò của toán tử này trong sự đối xứng của bài toán Kepler. Với mục tiêu đó ta xét Hamiltonian của bài toán Kepler như sau:

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hat{p}^2 - \frac{Z}{r} , \tag{3}$$

trong đó, $\hat{p}^2 = \hat{p}_j \hat{p}_j$ với $\hat{p}_j = -i\partial/\partial x_j$ $(j = 1, \ldots, 3)$ là các hình chiếu xung lượng. Trong công trình này, chúng tôi sử dụng kí hiệu của Einstein lấy tổng trên các chỉ số lặp lại, và sử dụng hệ đơn vị nguyên tử $c = e = m = \hbar = 1$.

Các toán tử thành phần mô-men động lượng quỹ đạo được định nghĩa:

$$\hat{L}_{ij} = x_i \hat{p}_j - x_j \hat{p}_i$$

đều giao hoán với toán tử Hamilton. Ngoài ra, dễ dàng kiểm chứng các toán tử này phản đối xứng và thỏa mãn hệ thức giao hoán của nhóm SO(3):

$$[\hat{L}_{ij}, \hat{L}_{mn}] = i\delta_{im}\hat{L}_{jn} + i\delta_{jn}\hat{L}_{im} - i\delta_{in}\hat{L}_{jm} - i\delta_{jm}\hat{L}_{in} \;. \quad (4)$$

Đây là nhóm đối xứng không gian SO(3) của bài toán Kepler.

Tuy nhiên, khi xét đến toán tử Runge-Lenz (2) ta có các hệ thức giao hoán sau:

$$[\hat{H}, \hat{M}_k] = 0,$$
$$[\hat{L}_{ij}, \hat{M}_k] = i\delta_{ik}\hat{M}_j - i\delta_{jk}\hat{M}_i, \quad (5)$$
$$[\hat{M}_i, \hat{M}_j] = -2i\hat{H}\hat{L}_{ij},$$

chứng tỏ rằng với mỗi giá trị năng lượng xác định, toán tử vectơ Runge-Lenz và toán tử hình chiếu mô-men động lượng quỹ đạo tạo thành một đại số kín. Thêm nữa, từ (5) ta thấy véc-tơ Runge-Lenz là một bất biến (integral) của chuyển động. Như vậy, có thể nói nó đặc trưng cho một đối xứng ẩn của bài toán Kepler ba chiều. Nhóm đối xứng đầy đủ của bài toán bây giờ là SO(4).

Phát triển kết quả trên cho bài toán MICZ-Kepler ba chiều, các tác giả McIntosh và Cisneros [8], Zwanziger [10] đã độc lập chứng tỏ rằng đối xứng SO(4) vẫn bảo toàn khi có sự xuất hiện của đơn cực từ. Tương tự như vậy, bài toán MICZ-Kepler năm chiều được khảo sát trong thời gian gần đây cũng được chứng tỏ có đối xứng SO(6) chứ không chỉ là SO(5) [7]. Do đó, với việc xây dựng được bài toán MICZ-Kepler trong không gian 9 chiều với sự có mặt của đơn cực từ SO(8) [4], việc đi tìm đối xứng ẩn của bài toán này là điều cần thiết.

3. Đối xứng của bài toán MICZ-Kepler chín chiều

- ***Bài toán MICZ-Kepler chín chiều***

Trong bài toán Kepler (Coulomb) chín chiều, hệ vật lí được xét gồm một hạt mang điện tích $-e$ và có 'isospin' chuyển động quanh một hạt nhân đứng yên mang điện tích $+Ze$ và thế đơn cực SO(8). Phương trình Schrödinger của bài toán có thể viết như sau:

$$\left\{ \frac{1}{2}\hat{\pi}^2 + \frac{Q^2}{8r^2} - \frac{Ze^2}{r} \right\} \Psi = E\Psi, \quad (6)$$

trong đó, $\hat{\pi}^2 = \hat{\pi}_\lambda \hat{\pi}_\lambda$ với toán tử xung lượng được định nghĩa:

$$\hat{\pi}_j = -i\frac{\partial}{\partial x_j} + A_k(r)\hat{Q}_{kj}, \; \hat{\pi}_9 = -i\frac{\partial}{\partial x_9}. \quad (7)$$

Ngoài tương tác Coulomb, trong hệ được xét có tương tác giữa 'isospin' với trường SO(8), được biểu diễn bằng các vi tử $\hat{Q}_{kj}$ $(j = 1, \ldots, 8)$. Ta sử dụng kí hiệu $\hat{Q}^2 = \hat{Q}_{kj}\hat{Q}_{kj}$ với 28 vi tử phản đối xứng $\hat{Q}_{kj}$ thỏa mãn các hệ thức giao hoán của nhóm SO(8) như sau:

$$[\hat{Q}_{ij}, \hat{Q}_{mn}] = i\delta_{im}\hat{Q}_{jn} + i\delta_{jn}\hat{Q}_{im} - i\delta_{in}\hat{Q}_{jm} - i\delta_{jm}\hat{Q}_{in} \;. \quad (8)$$

Trong các công thức trên và từ đây về sau, nếu không có sự giải thích thêm, sự lặp lại các chỉ số bằng mẫu tự Latin (j) có nghĩa là lấy tổng theo miền thay đổi từ 1 đến 8, còn sự lặp lại các chỉ số bằng mẫu tự Hi Lạp (λ) nghĩa là lấy tổng trên miền thay đổi từ 1 đến 9.

- ***Đối xứng SO(9)***

Để khảo sát tính đối xứng của bài toán, trước tiên ta xây dựng toán tử mô-men động lượng quỹ đạo. Với Hamiltonian (6) ta có thể xây dựng các thành phần của ten-xơ mô-men động lượng quỹ đạo được như sau:

$$\hat{\Lambda}_{\mu\nu} = x_\mu \hat{\pi}_\nu - x_\mu \hat{\pi}_\nu + ir^2[\pi_\mu, \pi_\nu]. \quad (9)$$

Dễ dàng kiểm tra hệ thức giao hoán giữa toán tử động lượng và tọa độ:

$$[\hat{\pi}_\mu, x_\nu] = -i\delta_{\mu\nu}, \quad (10)$$

và sử dụng các hệ thức này ta chứng minh các hệ thức giao hoán giữa các toán tử thành phần ten-xơ mô-men động lượng quỹ đạo với các toán tử tọa độ và xung lượng:

$$[\hat{\Lambda}_{\mu\nu}, x_\rho] = i\delta_{\mu\rho}x_\nu - i\delta_{\nu\rho}x_\mu,$$

$$[\hat{\Lambda}_{\mu\nu}, \hat{\pi}_\rho] = i\delta_{\mu\rho}\hat{\pi}_\nu - i\delta_{\nu\rho}\hat{\pi}_\mu. \quad (11)$$

Cuối cùng, từ hai hệ thức trên, ta tìm được hệ thức giao hoán giữa các toán tử thành phần ten-xơ mô-men động lượng quỹ đạo:

$$\begin{aligned}[\hat{\Lambda}_{\mu\nu}, \hat{\Lambda}_{\sigma\rho}] &= i\delta_{\mu\sigma}\hat{\Lambda}_{\nu\rho} + i\delta_{\nu\rho}\hat{\Lambda}_{\mu\sigma} \\ &- i\delta_{\mu\rho}\hat{\Lambda}_{\nu\sigma} - i\delta_{\nu\sigma}\hat{\Lambda}_{\mu\rho}\end{aligned} \quad (12)$$

Do tính chất phản đối xứng của $\hat{\Lambda}_{\mu\nu}$ nên chỉ có 36 thành phần độc lập. Hệ thức giao hoán (12) chứng tỏ rằng các thành phần của ten-xơ mô-men động lượng quỹ đạo tạo thành đại số kín SO(9). Ta cũng có thể kiểm tra được rằng các thành phần $\hat{\Lambda}_{\mu\nu}$ giao hoán với Hamiltonian của hệ, nghĩa là:

$$[\hat{\Lambda}_{\mu\nu}, \hat{H}] = 0,$$

chứng tỏ rằng bài toán MICZ-Kepler có đối xứng không gian SO(9).

- ***Véc-tơ Runge-Lenz***

Tiếp theo, chúng ta xây dựng vectơ tương tự như vectơ Runge-Lenz của bài toán. Dựa vào khai triển tường minh định nghĩa của Pauli [9]:

$$\hat{M}_k = \frac{1}{2}\left(\hat{p}_i\hat{L}_{ik} + \hat{L}_{ik}\hat{p}_i + 2Z\frac{x_k}{r}\right),$$

thực hiện phép thế $\hat{p}_\mu \to \hat{\pi}_\mu$ và $\hat{L}_{\mu\nu} \to \hat{\Lambda}_{\mu\nu}$, ta định nghĩa toán tử vectơ:

$$\hat{M}_\nu = \frac{1}{2}\left(\hat{\pi}_\mu\hat{\Lambda}_{\mu\nu} + \hat{\Lambda}_{\mu\nu}\hat{\pi}_\mu + 2Z\frac{x_\nu}{r}\right), \quad (13)$$

Với định nghĩa như trên, ta chứng minh được:

$$[\hat{M}_\mu, \hat{H}] = 0, \quad (14)$$

chứng tỏ vectơ ta đưa ra là một bất biến (intergral) mới của bài toán, thể hiện đối xứng ẩn của bài toán. Ta gọi nó là vectơ Runge-Lenz của bài toán MICZ-Kepler chín chiều.

- ***Đối xứng ẩn SO(10)***

Bây giờ chúng ta sẽ kết hợp toán tử véc-tơ Runge-Lenz với nhóm SO(9) để xây dựng nhóm đối xứng đầy đủ cho bài toán MICZ-Kepler chín chiều. Với mục tiêu đó ta tính các hệ thức giao hoán sau:

$$[\hat{\Lambda}_{\mu\nu}, \hat{M}_\rho] = i\delta_{\mu\rho}\hat{M}_\nu - i\delta_{\nu\rho}\hat{M}_\mu,$$

$$[\hat{M}_\mu, \hat{M}_\nu] = -2i\hat{H}\hat{\Lambda}_{\mu\nu} \quad (15)$$

Các hệ thức giao hoán trên hoàn toàn tương tự với các hệ thức đã biết trong bài toán Kepler ba chiều [2], xem thêm công thức (5).

Ta có thể kết hợp các toán tử ten-xơ mô-men động lượng quỹ đạo $\hat{\Lambda}_{\mu\nu}$ và toán tử véc-tơ Runge-Lenz $\hat{M}_{\nu}$ trong một toán tử ma trận $\hat{D}(10\times 10)$ được xây dựng như sau:

$$\hat{D}_{ab} = \begin{cases} \hat{\Lambda}_{\mu\nu} & a=\mu, b=\nu \\ -(-2\hat{H})^{-1/2}\hat{M}_{\mu} & a=\mu, b=10 \\ (-2\hat{H})^{-1/2}\hat{M}_{\nu} & a=10, b=\nu \\ 0 & a=b \end{cases} .(16)$$

Ở đây ta sử dụng chỉ số kí hiệu a,b thay đổi từ 1 đến 10. Để dễ hình dung, ta có thể viết (16) dưới dạng ma trận khối:

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} \hat{\Lambda}_{\mu\nu} & -\hat{M}'_{\mu} \\ \hat{M}'_{\mu} & 0 \end{pmatrix}, \qquad (17)$$

trong đó, $\hat{M}'_{\mu} = (-2\hat{H})^{(-1/2)}\hat{M}_{\mu}$.

Các hệ thức giao hoán (15) bây giờ có thể viết dưới dạng sau cho $\hat{D}_{ab}$:

$$\begin{aligned} [\hat{D}_{ab}, \hat{D}_{cd}] = i\delta_{ac}\hat{D}_{bd} + i\delta_{bd}\hat{D}_{ac} \\ -i\delta_{ad}\hat{D}_{bc} - i\delta_{bc}\hat{D}_{ad} \end{aligned} \qquad (18)$$

Như vậy, các toán tử ma trận $\hat{D}$ hoàn toàn phản đối xứng, bao gồm 45 thành phần độc lập thỏa mãn hệ thức của đại số SO(10). Đây chính là đối xứng đầy đủ của bài toán MICZ-Kepler chín chiều.

4. Kết luận

Như vậy, trong công trình này chúng tôi đã xây dựng thành công dạng tường minh của vectơ Runge-Lenz cho bài toán MICZ-Kepler chín chiều. Từ đây, đưa ra một đối xứng ẩn của bài toán ngoài đối xứng SO(9). Kết hợp véc-tơ Runge-Lenz với đối xứng SO(9) chúng tôi đã xây dựng được đối xứng không gian trọn vẹn SO(10) cho bài toán MICZ-Kepler chín chiều. Trong các nghiên cứu tiếp theo chúng tôi sẽ xây dựng các toán tử Casimir tương ứng của nhóm SO(10) và ứng dụng nó cho khảo sát phổ năng lượng của bài toán MICZ-Kepler chín chiều bằng phương pháp đại số.

Ghi chú: *Chúng tôi cám ơn Quỹ Nghiên cứu Khoa học Công nghệ của Bộ Giáo dục và Đào tạo đã tài trợ cho công trình này.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Fock V., (1935), "Zur Theorie des Wasserstoffatoms", *Z. Physik* **98**, pp. 145-154.
2. Landau L.D. and Lifshitz E.M., (1977), *Quantum Mechanics,* Pergamon Press, Oxford.
3. Le Van Hoang and Nguyen Thanh Son, (2010), "A non-Abelian SO(8) monopole as generalization of Dirac-Yang monopoles for a 9-dimensional space", *J. Math. Phys.* **52**, pp. 032105-11.
4. Le Van Hoang, Nguyen Thanh Son, Phan Ngoc Hung, (2009), "A hidden non-Abelian monopole in a 16-dimensional isotropic harmonic oscillator", *J. Phys. A* **42**, pp. 175204-8.

5. Le Van Hoang, Truong Cat Tuong, and Phan Thanh Tu, (2011), “On the SO(10,2) dynamical symmetry group of the MICZ-Kepler problem in a nine-dimensional space", *J. Math. Phys.* **52**, pp. 072101-5.
6. Le Van Hoang, Viloria J Tony, Le Anh Thu, (1991), “On the hydrogen-like atoms in five-dimensional space”, *J. Phys. A* **24**, pp. 3021-3030.
7. Mardoyan L.G., Sissakian A.N., Ter-Antonyan V.M., (1999), “Hidden symmetry of the Yang-Coulomb monopole”, *Mod. Phys. Lett. A* **14**, pp. 1303-1307.
8. McIntosh H. and Cisneros A., (1970), “Degeneracy in the Present of a Magnetic Monopole”, *J. Math. Phys.* **11**, pp. 896-916.
9. Pauli W., (1926), “Ueber das Wasserstoffspektrum vom Standpunkt der neuen Quantenmechanik”, *Z. Physik* **36**, pp. 336-363.
10. Zwanziger D., (1968), “Exactly Soluble Nonrelativistic Model of Particles with Both Electric and Magnetic Charges”, *Phys. Rev.* **176**, pp. 1480-1488.

(Ngày Tòa soạn nhận được bài: 16-11-2011; ngày chấp nhận đăng: 24-4-2012)