TÌM HIỂU KHẢ NĂNG CỦA HỌC SINH LỚP 12 VỀ VIỆC GIẢI QUYẾT BÀI TOÁN XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ MŨ THÔNG QUA MỘT THỰC NGHIỆM SƯ PHẠM

NGUYỄN HỮU LỢI*

TÓM TẮT

Bài toán xét tính đơn điệu của một hàm số khá phổ biến trong chương trình toán phổ thông. Để giải quyết bài toán này có những công cụ giải khác nhau: dùng định nghĩa, dựa vào các yếu tố đặc trưng của hàm số được cho, dựa vào đồ thị của hàm số hay tính đạo hàm cấp 1 của hàm số đó. Trong bài báo này, chúng tôi thiết kế một tình huống dạy học nhằm tìm hiểu khả năng của học sinh lớp 12 trong việc vận dụng các công cụ giải bài toán xét tính đơn điệu của hàm số mũ. Đồng thời thông qua đó phát hiện những sai lầm học sinh mắc phải khi giải bài toán này.

Từ khóa: tính đơn điệu, đạo hàm, hàm số mũ.

ABSTRACT

A research on twelfth graders' ability in solving the problem of examining the monotonicity of an exponential function through an educational experiment

The problem of examining the monotonicity of an exponential function is quite common in high school math curriculum. To solve this problem, there are various tools such as: definition, characteristics of the given function, fucntion graphs, or the first derivative of the function. In this article we designed a teaching scenario to examine the ability of twelfth graders in applying mathematical tools to solve the problem of examining the monotonicity of an exponential function. At the same time we also wish to detect mistakes students often make when solving this type of problem.

Keywords: monoticity, derivative, exponential function.

1. Đặt vấn đề

Chúng tôi bắt đầu nghiên cứu từ việc phân tích sách giáo khoa (SGK) Toán 12 (nâng cao). Một điều thú vị chúng tôi có được liên quan đến bài toán xét tính đơn điệu của hàm số mũ. Các hàm số xét tính đồng biến, nghịch biến đều có dạng $y=a^x$ hoặc có thể đưa được về dạng $y=a^x$. Lời giải mong đợi của SGK cho thấy học sinh chỉ cần dựa vào cơ số của hàm số đã cho để đưa ra kết luận. Liệu SGK đã giới hạn việc khảo sát những hàm số mũ ở dạng $y=a^x$ hoặc có thể đưa được về dạng $y=a^x$ có giúp học sinh khai thác được hết các công cụ để giải quyết bài toán xét tính đơn điệu của hàm số mũ hay không? Những sai lầm học sinh mắc phải khi giải quyết các bài toán dạng này. Chúng tôi thiết kế một tình huống dạy học nhằm tìm hiểu khả năng của học sinh trong việc vận dụng các công cụ giải bài toán xét tính đơn điệu của hàm số mũ. Đồng thời thông qua đó phát hiện những sai lầm học sinh mắc phải khi giải các bài toán này.

* ThS, Sở Giáo dục và Đào tạo TPHCM

2. Thực nghiệm đối với học sinh

Thực nghiệm được tiến hành trên học sinh lớp 12 ban khoa học tự nhiên với chương trình toán nâng cao. Thời điểm thực hiện là sau khi học sinh đã học xong bài hàm số mũ. Thời gian thực nghiệm dành cho bài toán là 15 phút. Học sinh sẽ làm việc cá nhân.

Học sinh sẽ được phát giấy làm bài trên đó có in đề bài toán. Giấy nháp cũng được phát cho học sinh và thu lại sau giờ làm. Điều này cho phép chúng tôi thu thập thêm dấu vết thể hiện mối quan hệ cá nhân của học sinh.

Bài toán thực nghiệm:

Có thể biết được tính đồng biến và nghịch biến của các hàm số cho trong bảng sau đây hay không?

(Đánh dấu X vào ô mà em lựa chọn và giải thích hoặc cho lời giải tương ứng)

Hàm số	**Được**	**Không**	**- Nếu không, giải thích vì sao?** **- Nếu có, trình bày lời giải của em**
a) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$			
b) $y=\pi^{3x}$			
c) $y=3^{x^2}$			
d) $y=2^{1-x}$			

2.1. Phân tích một số yếu tố trước khi thực nghiệm

2.1.1. Các biến

Việc chọn các bài toán thực nghiệm được đặt trên cơ sở lựa chọn giá trị các biến didactic sau đây.

- V1: ***"Hàm số là hàm số mũ hoặc có thể biến đổi được về hàm số mũ biến x hay không?"***

Hai giá trị của biến:

- *Hàm số là hàm số mũ hoặc có thể biến đổi được về hàm số mũ biến x.*
- *Hàm số không là hàm số mũ hoặc không thể biến đổi được về hàm số mũ biến x.*

- V2: ***"Biểu thức mũ là tuyến tính hay không tuyến tính theo x?"***

- *Biểu thức mũ là tuyến tính theo x.*
- *Biểu thức mũ không là tuyến tính theo x.*

Ta biết rằng, hàm số mũ y = a^x có miền xác định là R. Vì vậy, hàm số dạng $y=a^{u(x)}$ chỉ là hàm số mũ của biến t = u(x) nếu như miền giá trị của u(x) là R. Trường hợp đặc biệt : u(x) biểu diễn tuyến tính theo x thì $a^{u(x)}$ là hàm số mũ.

Ngược lại, hàm số đã cho chỉ là ‘‘một phần’’ của hàm số mũ (đồ thị của nó chỉ là một tập con thực sự của hàm số mũ), hoặc không là hàm số mũ.

- V3: "***Đồ thị hàm số qua (0 ,1) hoặc (1, a) hay không?"***

- *Đồ thị hàm số qua (0 ,1) hoặc (1, a).*
- *Đồ thị hàm số không qua (0 ,1) và (1, a).* Trong đó a là cơ số của hàm số đã cho.

2.1.2. Đặc trưng của bài toán được lựa chọn

Bài này được cho với nhiều hàm số khác nhau, trong đó có những hàm số quen thuộc (được cho trong SGK và SBT) và không quen thuộc. Điều này cho phép chúng tôi tìm hiểu ứng xử của học sinh trước những hàm số không quen thuộc đối với kiểu nhiệm vụ xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số. Đặc biệt, giá trị của biến V1 được chọn trong câu c) là *hàm số không là hàm số mũ,* sẽ cho phép làm rõ mối quan hệ cá nhân của học sinh đối với việc xét tính đơn điệu hàm số.

Chúng tôi dự đoán rằng các lời giải của học sinh sẽ sử dụng kĩ thuật xét cơ số để suy ra tính đơn điệu của các hàm số đã cho.

2.1.3. Các chiến lược có thể

Với các hàm số được lựa chọn, bài toán bao gồm những dạng hàm số khác nhau liên quan đến hàm số mũ. Tính chất các hàm này ít nhiều đều có liên quan đến các tính chất của hàm số mũ. Và như vậy chúng sẽ là hàm số mũ hoặc là một phần của hàm số mũ. Các chiến lược sau đây dựa trên cơ sở các tính chất của hàm số mũ.

- ST_{cs}: ***"Chiến lược cơ số"***: đối với hàm số $y = a^{u(x)}$, áp dụng kĩ thuật so sánh cơ số với 1
  - Nếu a > 1 thì hàm số đồng biến.
  - Nếu a < 1 thì hàm số nghịch biến.
- $ST_{đl}$: ***"Chiến lược định lí"***:
  - Nếu ($\forall\ x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$) thì f đồng biến.
  - Nếu ($\forall\ x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$) thì f nghịch biến.
- ST_{hh}: ***"Chiến lược hàm hợp"***:
  - Xét tính đồng biến, nghịch biến của các hàm thành phần.
  - Xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm hợp đã cho.
- ST_{dh}: ***"Chiến lược đạo hàm"***: Xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số dựa vào dấu của đạo hàm.

2.1.4. Những quan sát có thể

a) $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

□ *Sự lựa chọn hàm số*

- Hàm số này tương ứng với giá trị thứ nhất của tất cả các biến V1, V2, V3.

Đây là dạng hàm số hoàn toàn quen thuộc đối với học sinh mà SGK đã đề cập. Chúng tôi chọn bài này với mục đích làm cơ sở để so sánh ứng xử của học sinh đối với những dạng hàm số khác. Từ đó cũng thấy được ràng buộc của thể chế lên học sinh trong việc xét tính đơn điệu của hàm số mũ.

- Các chiến lược có thể:

ST_{cs}: *"Chiến lược cơ số"*: như trên đã nói, đây là dạng hàm số hàm cơ bản nhất của hàm mũ, rất sát với định nghĩa được trình bày trong SGK, vì vậy mà chiến lược cơ số chắc chắn sẽ được học sinh lựa chọn.

$ST_{đl}$: *"Chiến lược định lí"; * $ST_{đh}$: *"Chiến lược đạo hàm"*

Hai chiến lược $ST_{đl}$ và $ST_{đh}$ có thể giải quyết bài toán, tuy nhiên chúng sẽ không có cơ hội để xảy ra với hàm số này vì chiến lược cơ số đã thống lĩnh.

□ *Cái có thể quan sát được từ học sinh:*

- *Lời giải tương ứng với chiến lược cơ số ST_{cs}:*

Vì $\frac{1}{2} < 1$ nên $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ nghịch biến.

b) $y = \pi^{3x}$

□ *Sự lựa chọn hàm số*

- Giá trị của các biến được chọn:

Bài này được xây dựng dựa trên biến V2 với giá trị: *Biểu thức mũ là tuyến tính theo x.*

- Các chiến lược có thể:

- ST_{cs}: *"Chiến lược cơ số"*: đây là chiến lược được ưu tiên đối với hàm số dạng mũ. Vì vậy, có nhiều cơ hội để xảy ra chiến lược này cho dù hàm số đã cho có thỏa mãn điều kiện của hàm số mũ hay không.
- ST_{dl}: *"Chiến lược định lí"*: cũng có thể xảy ra chiến lược này vì dạng hàm số chưa thật sự đúng với dạng đã định nghĩa, bởi vì chúng tôi đã chọn giá trị thứ nhất của biến V2.
- ST_{hh}: *"Chiến lược hàm hợp"*: cơ hội xảy ra chiến lược này cũng bằng như *"chiến lược định lí"*.

Hàm $y = \pi^{3x}$ là hợp của hai hàm thành phần u(x) = 3x và $y = \pi^u$. Hàm u(x) là dễ dàng biết được tính đơn điệu của nó. Do đó tính đơn điệu của hàm π^u cũng được dễ dàng xác định.

- ST_{dh}: *"Chiến lược đạo hàm"*.

□ *Cái có thể quan sát được từ học sinh:*

- *Lời giải tương ứng với chiến lược cơ số ST_{cs}:*

Có hai trường hợp tương ứng với chiến lược này:

TH1:

Ta có $y = \pi^{3x} = \left(\pi^3\right)^x$

$\pi^3 > 1$ nên hàm số đồng biến.

TH2: đồng nhất tính đơn điệu của hàm $y = \pi^{3x}$ với hàm $y = \pi^t$. Do đó, tính đơn điệu của hàm được cho xác định như sau:

Vì $\pi > 1$ nên nên hàm số đã cho là đồng biến.

- *Lời giải tương ứng với chiến lược định lí ST_{dl}:*

$\forall$ x_1, x_2: $x_1 > x_2$ ta có: $3x_1 > 3x_2 \Rightarrow \pi^{3x_1} > \pi^{3x_2} \Rightarrow$ hàm số đồng biến.

- *Lời giải tương ứng với chiến lược hàm hợp ST_{hh}:*

u(x) = 3x là đồng biến tên R

π^x là đồng biến trên R nên $\pi^{u(x)}$ là đồng biến trên R.

- *Lời giải tương ứng với chiến lược đạo hàm $ST_{đh}$:*

$y' = 3\pi^{3x}\ln\pi > 0$ với mọi x thuộc R nên hàm số $y = \pi^{3x}$ đồng biến trên R.

c) $y = 3^{x^2}$

□ *Sự lựa chọn hàm số*

- Giá trị của các biến được chọn:

Hàm số $y = 3^{x^2}$ thỏa các giá trị của các biến sau:

- Giá trị thứ hai của biến V1: *Hàm số không thể biến đổi được về hàm số mũ biến x ($y = a^x$).*
- Giá trị thứ hai của biến V2: *Biểu thức mũ là không tuyến tính theo x.*

- Giá trị thứ nhất của biến V3: *Đồ thị hàm số qua (0,1) hoặc (1,a).*

Hàm số này thỏa hai điểm đặc biệt của hàm số mũ là (0,1) và $(1,a)$ (trường hợp này a bằng 3). Tuy nhiên, hàm này chỉ là "*một phần*" của hàm số mũ bởi rằng tập giá trị của nó là $[1,+\infty)$.

Hàm $y=3^{x^2}$ không có tính chất luôn tăng hoặc luôn giảm như tính đơn điệu của hàm số mũ. Do đó, không thể khảo sát tính chất này bằng kĩ thuật so sánh cơ số của nó với 1.

Các chiến lược có thể:

Nếu học sinh cho rằng có thể biết được tính đồng biến, nghịch biến của hàm số $y=3^{x^2}$ thì các chiến lược sau đây có thể xảy ra:

- ST_{cs}: *"Chiến lược cơ số"*: mặc dù $y=3^{x^2}$ không phải là hàm số mũ nhưng hàm này có hai điểm đặc biệt (0,1) và (1,a) và có dạng $a^{u(x)}$ nên có nhiều cơ hội xuất hiện chiến lược này.
- ST_{hh}: *"Chiến lược hàm hợp"*: chiến lược này có thể xảy ra trong trường hợp học sinh nhận dạng được hàm. Tuy nhiên theo chúng tôi, thể chế đã không tạo cơ hội cho chiến lược này xảy ra.
- $ST_{đh}$: *"Chiến lược đạo hàm"*: mặc dù có SGK có giới thiệu phương pháp xét tính biến thiên của một hàm số bằng đạo hàm, tuy nhiên đối với bài này phương pháp đạo hàm không là trọng tâm, do đó chúng tôi nghĩ rằng có rất ít cơ hội xảy ra chiến lược này.

 Cái có thể quan sát được từ học sinh:

- *Lời giải tương ứng với chiến lược cơ số ST_{cs}:*

Vì 3 > 1 nên $y=3^{x^2}$ đồng biến trên R.

- *Lời giải tương ứng với chiến lược hàm hợp ST_{hh}:*

Hàm số x^2 đồng biến trên $[0, +\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty, 0]$.

Do đó hàm số $y=3^{x^2}$ đồng biến trên $[0, +\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty, 0]$.

- *Lời giải tương ứng với chiến lược đạo hàm $ST_{đh}$:*

$y'=2x3^{x^2}$

Khi $x \geq 0$ thì $y' \geq 0$ nên hàm số đồng biến.

Khi $x \leq 0$ thì $y' \leq 0$ nên hàm số nghịch biến.

d) $y = 2^{1-x}$

 Sự lựa chọn hàm số

- Giá trị của các biến được chọn:

- Giá trị thứ nhất của biến V1: *Hàm số là hàm số mũ hoặc có thể biến đổi về hàm số mũ biến x ($y = a^x$).*
- Giá trị thứ nhất của biến V2: *Biểu thức mũ là tuyến tính theo x.*

Hàm này được cho với mục đích tìm hiểu mối quan hệ cá nhân của học sinh về hàm số mũ. Một cách rõ ràng hơn chúng tôi muốn kiểm chứng rằng có phải học sinh đã thật sự gắn liền hay đồng nhất hàm số mũ với một biểu diễn bao gồm cơ số a và một biểu thức mũ.

Hàm số $y = 2^{1-x}$ là hàm số mũ, tuy nhiên nó là hàm mũ với cơ số $\frac{1}{2}$. Và như vậy tính đơn điệu của nó được xét theo biểu thức hàm $y = 2.\left(\frac{1}{2}\right)^x$.

- Các chiến lược có thể:

ST_{cs}: *"Chiến lược cơ số"*; $ST_{đl}$: *"Chiến lược định lí"*; ST_{hh}: *"Chiến lược hàm hợp"*; $ST_{đh}$: *"Chiến lược đạo hàm"*

□ *Cái có thể quan sát được từ học sinh:*

- *Lời giải tương ứng với chiến lược cơ số ST_{cs}:*

Có hai trường hợp xảy ra với chiến lược này:

TH1: $y = 2^{1-x}$ được biến đổi thành dạng $y = 2.\left(\frac{1}{2}\right)^x$, lời giải như sau:

Vì $\frac{1}{2} < 1$ nên hàm đã cho nghịch biến.

TH2: $y = 2^{1-x}$, lời giải như sau:

Vì 2 > 1 nên hàm đã cho đồng biến.

- *Lời giải tương ứng với chiến lược định lí $ST_{đl}$:*

Với mọi $x_1 > x_2$ ta có:

$-x_1 < -x_2 \Rightarrow 1 - x_1 < 1 - x_2 \Rightarrow 2^{1-x_1} < 2^{1-x_2}$

Vậy hàm số đã cho nghịch biến.

- *Lời giải tương ứng với chiến lược hàm hợp ST_{hh}:*

Hàm u(x)=1-x là nghịch biến trên R nên hàm 2^{1-x} là nghịch biến trên R.

- *Lời giải tương ứng với chiến lược đạo hàm $ST_{đh}$:*

$y' = -2^{1-x}\ln 2 < 0 \ \forall x \in R$ nên $y = 2^{1-x}$ nghịch biến.

2.2. Phân tích chi tiết kết quả thực nghiệm

Bảng thống kê các lời giải của học sinh

Câu	Chiến lược				Không biết	Bỏ trống	Tổng số
	Cơ số	Định lí	Hàm hợp	Đạo hàm			
a	$\boxed{61}$			12	1		74
b	$\boxed{38\ (\pi)}$, $22(\pi^3)$			14			74
c	$\boxed{31}$	1	3	14	$\boxed{21}$	$\boxed{4}$	74
d	33 (1/2), $\boxed{14\ (2)}$	1	1	13	$\boxed{6}$	$\boxed{6}$	74

Trong bảng, chúng tôi đặc biệt chú ý đến các số có đóng khung. Những số này phản ánh quan hệ cá nhân của học sinh đối với hàm số mũ.

Đúng như dự đoán, đa số học sinh sử dụng chiến lược cơ số để xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số này. Đặc biệt lưu ý hàm số ở câu c). Đây không phải là hàm số mũ như định nghĩa ở SGK, tuy nhiên có *31/74 (41,8%)* học sinh áp dụng kĩ thuật xét tính đơn điệu của hàm số mũ để giải. Lời giải điển hình trong trường hợp này là: *"a=3>1⇒ hàm số đồng biến"*.

Ngoài ra có *21/74 (28,3%)* học sinh cho rằng không thể biết được tính đơn điệu của hàm này vì số mũ là x^2. Các giải thích tương ứng là: *"Vì chưa biết giá trị* *của x nên không xác định được đồng biến, nghịch biến"; "không thể biết tính đồng biến, nghịch biến vì không có dạng y=a^x"; "vì không biết được giá trị của x thuộc khoảng nào nên không xét được tính đồng biến, nghịch biến"*. Một số lời giải thích khác tuy có dùng đạo hàm để khảo sát nhưng đi đến kết luận là: *"Vì y' còn chứa tham số x nên dấu của y' chưa xác định. Vì vậy không thể xác định hàm số đồng biến hay nghịch biến"*. Rõ ràng là học sinh đã không kiểm tra hàm đã cho có là hàm số mũ hay không, tuy nhiên họ đã áp dụng tính chất của hàm số mũ (đạo hàm luôn không chứa tham số) để giải.

Một trường hợp tương tự có thể thấy ở câu b) như sau:

Theo SGK thì $y=\pi^{3x}$ là hàm số mũ cơ số π^3, tuy nhiên có đến *38/74 (51,3%)* học sinh giải hàm này với cơ số π. Đối với hàm số ở câu d) $y=2^{1-x}$ cũng có đến *14/74 (18,9%)* học sinh giải hàm này với cơ số là 2. Điều này cho thấy học sinh đã không kiểm tra sự thỏa đáng của hàm số.

3. Kết luận

Thực nghiệm đưa đến một số kết quả sau:

Từ các kết quả có được, chúng tôi nhận thấy đa số học sinh của lớp được thực nghiệm tập trung cách giải của mình vào việc xét các cơ số: $a > 1$ thì hàm số đồng biến, $0 < a < 1$ thì hàm số nghịch biến. Các em không có nhiệm vụ đi kiểm tra hàm số được cho có là hàm số mũ hay không? Do đó, các em đã không thể giải quyết được câu c và d. Ngoài ra ta còn thấy, không nhiều học sinh sử dụng đạo hàm để xét tính đơn điệu của hàm số. Nếu có, các em cũng không thành công để đưa đến kết quả sau cùng. Điều này có thể được giải thích là SGK chỉ đưa ra những dạng toán chỉ cần xét đến cơ số là có thể kết luận được tính đơn điệu của hàm số mũ.

Thực nghiệm cũng mở ra hướng xây dựng bài tập cho học sinh mà giáo viên cần phải cân nhắc. Không phải lúc nào cũng đề xuất cho học sinh các bài tập quen thuộc. Do đó, giáo viên có thể tạo ra các tình huống học tập nhằm giúp học sinh có thể vận dụng các kiến thức có liên quan. Chẳng hạn, đối với bài hàm số mũ, giáo viên cần xây dựng hệ thống bài tập sao cho buộc các em phải vận dụng những phương pháp giải khác nhau để giải quyết hết hệ thống bài tập đó. Từ đó góp phần khắc phục các lỗi mắc phải của học sinh như đã chỉ ra trong thực nghiệm trên.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Cục Nhà giáo và Cán bộ quản lí Giáo dục (2008), *Hướng dẫn thực hiện chương trình và sách giáo khoa lớp 12 THPT*, Nxb Giáo dục.
2. Ngô Viết Diễn (2001), *Phương pháp chọn lọc giải Toán hàm số mũ và logarit*, Nxb Đại học Quốc gia Hà Nội.
3. Trần Văn Hạo, Phan Trương Dần (1991), *Sách giáo viên Đại số và giải tích 11*, Nxb Giáo dục.
4. Lê Thị Thiên Hương, Nguyễn Anh Tuấn, Lê Anh Vũ (2000), *Toán cao cấp*, Nxb Giáo dục.

5. Nguyễn Hữu Lợi (2008), *Khái niệm hàm số mũ ở trường Trung học phổ thông*, Luận văn Thạc sĩ chuyên ngành Phương pháp giảng dạy Toán, Trường Đại học Sư phạm TPHCM.
6. Đoàn Quỳnh, Nguyễn Huy Đoan (2007), *Đại số và Giải tích 11 nâng cao*, Nxb Giáo dục.
7. Đoàn Quỳnh, Nguyễn Huy Đoan (2008), *Giải tích 12 nâng cao,* Nxb Giáo dục.
8. Đoàn Quỳnh, Nguyễn Huy Đoan (2008), *Sách Giáo viên Giải tích 12 nâng cao,* Nxb Giáo dục.
9. Lê Văn Tiến (2005), *Phương pháp dạy học môn Toán ở trường phổ thông*, Nxb Đại học Quốc gia TPHCM.

(Ngày Tòa soạn nhận được bài: 20-02-2012; ngày chấp nhận đăng: 19-6-2012)

SỰ CẦN THIẾT CỦA MÔ HÌNH HÓA...

(Tiếp theo trang 121)

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Nguyễn Thị Tân An, Trần Dũng (2009), "Sử dụng mô hình hóa toán học trong việc dạy học toán", *Tạp chí Giáo dục*, (219).
2. Gabriele Kaiser, Werner Blum, Rita Borromeo Ferri, Gloria Stillman (2011), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling,* Springer.
3. Gabriele Kaiser, Bharath Sriraman (2006), *A Global Survey of International Perspectives on Modelling in Mathematics Eduacation*, ZDM Vol 38(3).
4. Hans-Stefan Siller, *Modelling in Classroom. 'Classical Models' (in Mathematics Education) and recent developments*.
www.algebra.tuwien.ac.at/kronfellner/...ESU-6/.../1-13-**Siller**.pdf
5. OECD (2003), *The Pisa 2003 - Assessment Framework – Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills,* OECD, Paris, France.
6. Rita Borromeo Ferri (2006). *Theoretical and Empirical Differentiations of Phases in the Modelling Process*. ZDM Vol.38(2).
7. Werner Blum, Peter L. Galbraith, Hans-Wolfgang Henn, Mogens Niss (2007), *Modelling and Applications in Mathematics Education*. Springer.

(Ngày Tòa soạn nhận được bài: 01-02-2012; ngày chấp nhận đăng: 19-6-2012)