PHẠM TRÙ MÔ HÌNH VÀ TÍNH DUY NHẤT CỦA PHẠM TRÙ ỔN ĐỊNH

PHAN DUY NHẤT*

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi giới thiệu về phạm trù mô hình và chứng minh tính duy nhất của cấu trúc phạm trù mô hình sai khác phép tương đương Quillen.

Cho C là một phạm trù mô hình ổn định. Nếu phạm trù đồng luân của C và phạm trù đồng luân 2 – địa phương của phổ là tương đương nhau với ý nghĩa như phạm trù tam giác phân thì tồn tại một tương đương Quillen giữa C và phạm trù mô hình 2 – địa phương của phổ.

Từ khóa: phạm trù mô hình, đồng luân, Quillen.

ABSTRACT

Model category and the uniqueness of the stable category

In the paper, we introduce model category and prove the uniqueness of model category structure underlying Quillen equivalence.

Let C be a stable model category. If the homotopy category of C and the 2-local homotopy category of spectra are equivalent as triangulated categories, there exists a Quillen equivalence between C and the 2-local model category of spectra.

Keywords: model category, homotopy, Quillen.

1. Giới thiệu và kiến thức chuẩn bị

Phạm trù đồng luân ổn định đã được nghiên cứu bởi tôpô đại số trong một thời gian dài. Người ta đã xây dựng rất nhiều dạng mô hình cho phạm trù đồng luân ổn định và việc tính toán nhóm đồng luân cũng phụ thuộc vào mô hình đã xây dựng. Chúng tôi sẽ nghiên cứu tính duy nhất của cấu trúc mô hình sai khác phép tương đương Quillen.

Định nghĩa 1.1.

Cho f, g là hai cấu xạ trong một phạm trù C. Chúng ta gọi f là một co rút của g nếu tồn tại một sơ đồ giao hoán như sau:

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i} & Y & \xrightarrow{r} & X \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow f \\ X' & \xrightarrow{i'} & Y' & \xrightarrow{r'} & X' \end{array}$$

* ThS, Trường Đại học Sư phạm TPHCM

Trong đó: $r \circ i = Id_X$ và $r' \circ i' = Id_{X'}$.

Định nghĩa 1.2.

Một phạm trù mô hình là một phạm trù C với 3 loại lớp cấu xạ:

i) Tương đương yếu

ii) Phân thớ

iii) Đối phân thớ

Mỗi lớp cấu xạ này bảo toàn quan hệ hợp thành và chứa tất cả các cấu xạ đồng nhất. Mỗi cấu xạ vừa là phân thớ (tương ứng đối phân thớ) vừa là tương đương yếu được gọi là phân thớ không tuần hoàn (tương ứng đối phân thớ không tuần hoàn), sao cho chúng thỏa mãn 5 tiên đề sau:

MC1: Tích trực tiếp và tổng trực tiếp hữu hạn tồn tại trong C.

MC2: Nếu f và g là hai cấu xạ trong C sao cho $g \circ f$ được định nghĩa và hai trong ba cấu xạ f, g, $g \circ f$ là tương đương yếu thì cấu xạ còn lại cũng là tương đương yếu.

MC3: Nếu f là một co rút của g và g là một phân thớ, đối phân thớ hay tương đương yếu thì f cũng vậy.

MC4: Cho sơ đồ giao hoán sau

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow i & & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

Tồn tại một nâng lên trong sơ đồ giao hoán này (nghĩa là, tồn tại một cấu xạ $h: B \to X$ sao cho sơ đồ này có 5 dòng giao hoán $h = p \circ f = g \circ i$) nếu thỏa mãn một trong hai điều kiện sau:

i) i là một đối phân thớ và p là một phân thớ không tuần hoàn.

ii) i là một đối phân thớ không tuần hoàn và p là một phân thớ.

MC5: Một cấu xạ f bất kì có thể được biểu diễn bởi hai cách sau:

i) $f = p \circ i$, trong đó i là đối phân thớ và p là phân thớ không tuần hoàn.

ii) $f = p \circ i$, trong đó i là đối phân thớ không tuần hoàn và p là phân thớ.

Chú ý: Từ đây về sau chúng ta kí hiệu C là một phạm trù mô hình. Phạm trù mô hình C có một vật đẩy phổ dụng θ và một vật kéo phổ dụng $*$. Một vật A được nói là có tính đối phân thớ nếu $\theta \to A$ là một đối phân thớ và có tính phân thớ nếu $A \to *$ là một phân thớ.

Ví dụ: Chúng ta định nghĩa một cấu trúc mô hình trên phạm trù không gian tôpô **Top**.

Cho B là một không gian tôpô và A là không gian con của B. Ánh xạ nhúng $i : A \to B$ được gọi là đối phân thớ Hurewicz đóng nếu A là một không gian con đóng của B và i có tính mở rộng đồng luân, nghĩa là với không gian tôpô Y bất kì và sơ đồ giao hoán sau:

$$\begin{array}{ccc} B\times 0 \cup A\times[0,1] & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ B\times[0,1] & \longrightarrow & * \end{array}$$

tồn tại một ánh xạ $h : B\times[0,1] \to Y$ sao cho sơ đồ này có 5 dòng giao hoán.

Một ánh xạ $p : X \to Y$ giữa hai không gian tôpô được gọi là một phân thớ Hurewicz nếu p có tính nâng lên đồng luân, nghĩa là với không gian tôpô A bất kì và sơ đồ giao hoán sau:

$$\begin{array}{ccc} A\times 0 & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & p\downarrow \\ A\times[0,1] & \longrightarrow & Y \end{array}$$

tồn tại một ánh xạ $h : A\times[0,1] \to X$ sao cho sơ đồ này có 5 dòng giao hoán.

Bây giờ sẽ định nghĩa một cấu trúc mô hình trên **Top**. Một ánh xạ $f : X \to Y$ giữa hai không gian tôpô X, Y là

i) Một tương đương yếu nếu f là một tương đương đồng luân,

ii) Một đối phân thớ nếu f là một đối phân thớ Hurewicz đóng,

iii) Một phân thớ nếu f là một phân thớ Hurewicz.

Với 3 lớp cấu xạ này thì **Top** là một phạm trù mô hình.

Định nghĩa 1.3.

Một vật trụ (cylinder object) của vật A là một vật $A \wedge I$ của C cùng với một sơ đồ

$$A\,C\,A \xrightarrow{i_0+i_1} A\wedge I \xrightarrow{f} A$$

Thỏa mãn $f\,o(i_0+i_1) = id_A + id_A : A\,C\,A \to A$ và trong đó f là một tương đương yếu.

Hai cấu xạ $f, g : A \to X$ trong C được nói là đồng luân trái nếu tồn tại một vật trụ $A \wedge I$ của A thỏa mãn cấu xạ tổng $f + g : A\,C\,A \to X$ có thể mở rộng thành cấu xạ $H : A\wedge I \to X$, nghĩa là tồn tại một cấu xạ $H : A \wedge I \to X$ thỏa $H(i_0+i_1) = f + g$.

Định nghĩa 1.4.

Một vật đường (path object) của X là một vật X^I của C cùng với một sơ đồ

$$X \xrightarrow{g} X^I \xrightarrow{p} X \times X$$

thỏa mãn $p \circ g = (id_X, id_X) : X \to X \times X$. Trong đó g là một tương đương yếu.

Hai cấu xạ $f, g : A \to X$ trong C được gọi là đồng luân phải nếu tồn tại một vật đường X^I của X thỏa mãn cấu xạ tích $(f, g) : A \to X \times X$ có thể được nâng lên thành một cấu xạ $H : A \to X^I$.

Định lí 1.5. [1]

Nếu A có tính đối phân thớ thì đồng luân trái là một quan hệ tương đương trong $Hom_C(A,X)$.

Nếu X có tính phân thớ thì đồng luân phải là một quan hệ tương đương trong $Hom_C(A,X)$.

Nếu A có tính đối phân thớ và X có tính phân thớ thì quan hệ đồng luân trái và phải trong $Hom_C(A,X)$ *trùng nhau, nghĩa là f đồng luân trái với g nếu và chỉ nếu f đồng luân phải với g.*

Chú ý:

Nếu A có tính đối phân thớ và X có tính phân thớ thì quan hệ tương đương đồng luân trái và phải trong $Hom_C(A,X)$ được gọi là quan hệ tương đương đồng luân. Tập hợp các lớp tương đương này được kí hiệu bởi $\pi(A,X)$.

Mỗi vật X của C chúng ta có thể áp dụng **MC5(i)** cho cấu xạ $\theta \to X$ thì thu được một phân thớ không tuần hoàn $p_X : QX \to X$ trong đó QX có tính đối phân thớ, và áp dụng **MC5(ii)** cho cấu xạ $X \to *$ thì thu được một đối phân thớ không tuần hoàn $i_X : X \to RX$ trong đó RX có tính phân thớ.

Định nghĩa 1.6.

Phạm trù đồng luân $H\text{o}(C)$ của phạm trù mô hình C là một phạm trù với cùng lớp các vật của C và lớp các cấu xạ là

$$Hom_{H\text{o}(C)}(X,Y) = \pi(RQX, RQY)$$

Định nghĩa 1.7.

Giả sử C, D là hai phạm trù mô hình.

1. Chúng ta gọi $F : C \to D$ là một hàm tử Quillen trái nếu F là một hàm tử liên hợp trái và bảo toàn đối phân thớ và đối phân thớ không tuần hoàn.

2. Chúng ta gọi $G:D\to C$ là một hàm tử Quillen phải nếu G là một hàm tử liên hợp phải và bảo toàn phân thớ và phân thớ không tuần hoàn.

3. Giả sử (F,G,φ) là một liên hợp từ C vào D. Có nghĩa, F là một hàm tử từ C vào D, G là một hàm tử từ D vào C, và $\varphi:D(FA,B)\to C(A,GB)$ là một đẳng cấu tự nhiên. Chúng ta gọi (F,G,φ) là một liên hợp Quillen nếu F là một hàm tử Quillen trái.

4. Một liên hợp Quillen $(F,G,\varphi):C\to D$ được gọi là tương đương Quillen nếu mọi vật $X\in C$ có tính đối phân thớ và vật $Y\in D$ có tính phân thớ thì $f:FX\to Y$ là một tương đương yếu trong D nếu và chỉ nếu $\varphi(f):X\to GY$ là một tương đương yếu trong C.

Chú ý. Giả sử $(F,G,\varphi):C\to D$ là một liên hợp của những phạm trù mô hình. Khi đó (F,G,φ) là một liên hợp Quillen nếu và chỉ nếu G là một hàm tử Quillen phải.

Mệnh đề 1.8.

Giả sử $(F,G,\varphi):C\to D$ là một liên hợp Quillen. Khi đó các mệnh đề sau đây tương đương nhau

(1) (F,G,φ) là một tương đương Quillen.

(2) $X\xrightarrow{\eta}GFX\xrightarrow{Gi_{FX}}GRFX$ là một tương đương yếu với mọi vật X có tính đối phân thớ, và $FQGX\xrightarrow{Fp_{GX}}FGX\xrightarrow{\varepsilon}X$ là một tương đương yếu với mọi vật X có tính phân thớ.

(3) $L(F,G,\varphi)$ là một liên hợp tương đương của những phạm trù.

Chứng minh:

$(1)\Rightarrow(2)$ Giả sử (F,G,φ) là một tương đương Quillen và X là một vật có tính đối phân thớ của C. Chúng ta có $FX\to RFX$ là một đối phân thớ không tuần hoàn. Do đó cấu xạ $X\to GRFX$ được phân tích thành $X\xrightarrow{\eta}GFX\xrightarrow{Gi_{FX}}GRFX$ là một tương đương yếu. Tương tự khi vật X có tính phân thớ. W

$(2)\Rightarrow(1)$ Giả sử (F,G,φ) thỏa mãn (2). Cho $f:FX\to Y$ là một tương đương yếu giữa vật X có tính đối phân thớ và vật Y có tính phân thớ. Chúng ta có sơ đồ giao hoán sau

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\eta} & GFX & \xrightarrow{G(f)} & GY \\ \| & & Gi_{FX}\downarrow & & Gi_Y\downarrow \\ X & \to & GRFX & \xrightarrow{GR(f)} & GRX \end{array}$$

Do đó $G(f)\circ\eta = \varphi(f): X \to GY$ là một tương đương yếu. Tương tự, nếu $\varphi(f): X \to GY$ là một tương đương yếu. Chúng ta có sơ đồ giao hoán sau

$$\begin{array}{ccccc} FQX & \xrightarrow{FQ(\varphi(f))} & FQGY & \to & Y \\ \downarrow Fp_X & & \downarrow Fp_{GX} & & \| \\ X & \xrightarrow{F(\varphi(f))} & FGY & \xrightarrow{\varepsilon} & Y \end{array}$$

Khi đó $f = \varepsilon \circ F(\varphi(f)): FX \to Y$ là một tương đương yếu. W

$(2) \Leftrightarrow (3)$ Chúng ta có sơ đồ giao hoán sau

$$\begin{array}{ccccc} QX & \xrightarrow{\eta} & GFQX & \xrightarrow{Gi_{FQX}} & GRFQX \\ \downarrow p_X & & \downarrow GFp_X & & \downarrow GRFp_X \\ X & \xrightarrow{\eta} & GFX & \xrightarrow{Gi_X} & GRFX \end{array}$$

Do đó $X \to RG \circ LF(X)$ là một đẳng cấu trong $H\circ C$ khi và chỉ khi

$$X \xrightarrow{p_X^{-1}} QX \xrightarrow{Gi_{FQX}\circ\eta} GRFQX$$

là một đẳng cấu trong $H\circ C$ khi và chỉ khi $QX \xrightarrow{Gi_{FQX}\circ\eta} GRFX$ là một tương đương yếu với mọi vật X khi và chỉ khi $X \xrightarrow{Gi_{FX}\circ\eta} GRFX$ là tương đương yếu với mọi vật X có tính đối phân thớ. W

2. Kết quả chính

Trong phần này chúng tôi sẽ chứng minh định lí chính của bài báo là Định lí 2.5. Trước khi chứng minh định lí này, chúng tôi cần một số kết quả sau đây:

Mệnh đề 2.1. [3]

Cho C là một phạm trù mô hình ổn định và X là một vật có tính đối phân thớ và phân thớ của C. Khi đó tồn tại một hàm tử Quillen trái từ phạm trù các phổ vào C mà ảnh của phổ cầu là X. Nếu tự đồng cấu vành của X trong phạm trù đồng luân của C là một $Z_{(p)}$- đại số thì hàm tử này cũng là một hàm tử Quillen trái đối với cấu trúc mô hình ổn định p – địa phương cho phổ.

Bổ đề 2.2. [3]

Cho F là một hàm tử khớp giữa những phạm trù tam giác sinh compact với đối tích vô hạn. Nếu F bảo toàn đối tích và hạn chế là một tương đương giữa những phạm trù con đầy đủ của những vật compact thì F là một tương đương.

Mệnh đề 2.3. [3]

Cho p là một số nguyên tố và F là một hàm tử khớp từ phạm trù đồng luân của phổ p – địa phương hữu hạn vào chính nó mà bảo toàn phổ cầu p – địa phương (qua đẳng cấu). Nếu mọi phần tử của một lọc Adams trong tự đồng cấu vành phân bậc $[F(S^0_{(p)}), F(S^0_{(p)})]_*$ là ảnh của F thì F là tự đương tương.

Mệnh đề 2.4. [3]

Cho F là một hàm tử khớp từ phạm trù đồng luân của những phổ 2 – địa phương hữu hạn vào chính nó mà bảo toàn phổ cầu 2 – địa phương (sai khác phép đẳng cấu). Khi đó tất cả những đồng cấu của một lọc Adams trong tự đồng cấu vành phân bậc $[F(S^0_{(2)}), F(S^0_{(2)})]_*$ là ảnh của F.

Định lí 2.5.

Cho C là một phạm trù mô hình ổn định mà phạm trù đồng luân của nó là sinh compact. Giả sử phạm trù con đầy đủ của những vật compact trong phạm trù đồng luân của C và phạm trù đồng luân của phổ 2 – địa phương hữu hạn là tương đương nhau như những phạm trù tam giác phân. Khi đó tồn tại một tương đương Quillen giữa C và phạm trù mô hình 2 – địa phương của phổ, thỏa mãn hàm tử liên hợp trái có C như là mục tiêu của nó.

Chứng minh:

Cho F là một tương đương của phạm trù tam giác phân từ phạm trù đồng luân của phổ 2 – địa phương hữu hạn vào những vật compact trong phạm trù đồng luân của C. Chúng ta chọn một vật đối phân thớ và phân thớ X của C mà đẳng cấu với $F(S^0_{(2)})$ trong phạm trù đồng luân của C. Theo mệnh đề 2.1, tồn tại một hàm tử Quillen trái, đối với cấu trúc mô hình ổn định 2 – địa phương, từ phạm trù của phổ vào C mà ảnh của phổ cầu là X. Chúng ta kí hiệu hàm tử này là $X \wedge -$. Hàm tử Quillen trái này có một hàm tử dẫn xuất trái khớp $X \wedge^L -$ trên bậc của phạm trù đồng luân.

Chúng ta có $X \wedge^L S^0_{(2)} = X$, do đó hàm tử này biến vật compact thành vật compact. Thật vậy, bằng cách chứng minh quy nạp theo số chiều cellules của những vật compact. Chúng ta có dãy cofiber

$$\bigvee_I S^{\tau(Y)-1} \to Y' \to Y \to \bigvee_I S^{\tau(Y)}$$

Trong đó $\tau(Y)$ là số chiều cellules lớn nhất của vật compact Y và $\tau(Y') < \tau(Y)$. Từ $X \wedge^L -$ là hàm tử khớp nên chúng ta có dãy cofiber sau

$$X \wedge^L \bigvee_I S^{\tau(Y)-1} \to X \wedge^L Y' \to X \wedge^L Y \to X \wedge^L \bigvee_I S^{\tau(Y)}$$

Do đó $X \wedge^L Y$ cũng là vật compact. Chúng ta kí hiệu $(X \wedge^L -)|_{small}$ là giới hạn trên phổ 2 – địa phương hữu hạn. Hàm tử $\Phi = F^{-1} \mathrm{o}(X \wedge^L -)|_{small}$ sẽ biến phổ cầu 2 – địa phương thành chính nó, qua đẳng cấu, vì vậy bởi mệnh đề 2.3 và 2.4 hàm tử Φ là một tự tương đương của phạm trù đồng luân ổn định 2 – địa phương hữu hạn. Từ Φ and F^{-1} là những tương đương của phạm trù, thì $(X \wedge^L -)|_{small}$ cũng là một tương đương. Từ bổ đề 2.2, hàm tử $X \wedge^L -$ là một tương đương của phạm trù, do đó hàm tử Quillen trái $X \wedge -$ cũng vậy và hàm tử liên hợp phải của nó cũng là một tương đương Quillen bởi mệnh đề 1.8. W

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Dwyer W.G., Spalinski J. (1995), "Homotopy theories and model categories", *Elsever science B. V.*
2. Hovey M. (1999), *Model categories*, American Mathematical Society, Providence, RI, XII, 209 pp.
3. Nhat P. D. (2010), *Unicité de la catégorie stable*, Mémoire master 2, Université Strasbourg.

(Ngày Tòa soạn nhận được bài: 07-5-2013; ngày phản biện đánh giá: 05-6-2013; ngày chấp nhận đăng: 21-6-2013)