TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH
**TẠP CHÍ KHOA HỌC**
KHOA HỌC TỰ NHIÊN VÀ CÔNG NGHỆ
Tập 14, Số 3 (2017): 76-87
ISSN: 1859-3100

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
**JOURNAL OF SCIENCE**
NATURAL SCIENCES AND TECHNOLOGY
Vol. 14, No. 03 (2017): 76-87

*Email: tapchikhoahoc@hcmue.edu.vn; Website: http://tckh.hcmue.edu.vn*

# SỰ HỘI TỤ CỦA DÃY LẶP HỖN HỢP CHO HỌ ÁNH XẠ THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN $(E_m)$ TRONG KHÔNG GIAN HILBERT

***Trương Cẩm Tiên, Nguyễn Trung Hiếu*** *

*Khoa Sư phạm Toán-Tin – Trường Đại học Đồng Tháp*

*Ngày Tòa soạn nhận được bài: 21-11-2016; ngày phản biện đánh giá: 27-12-2016; ngày chấp nhận đăng: 24-3-2017*

**TÓM TẮT**

*Trong bài báo này, chúng tôi thiết lập một định lí về sự hội tụ của dãy lặp hỗn hợp cho họ ánh xạ thỏa mãn điều kiện $(E_m)$ trong không gian Hilbert. Từ định lí này, chúng tôi suy ra một số kết quả về sự hội tụ của dãy lặp hỗn hợp cho ánh xạ thỏa mãn điều kiện $(E_m)$. Đồng thời, chúng tôi cũng xây dựng ví dụ minh họa cho kết quả đạt được.*

***Từ khóa:*** dãy lặp hỗn hợp, ánh xạ thỏa mãn điều kiện $(E_m)$, không gian Hilbert.

**ABSTRACT**

***Covergence of hybird iteration for a family of mappings satisfying condition $(E_m)$ in Hilbert spaces***

*In this paper, a convergence theorem of hybird iteration for a family of mappings satisfying condition $(E_m)$ in Hilbert space is stated. Some results for the convergence of hybird iteration for mappings satisfying condition $(E_m)$ in Hilbert spaces are derived from this theorem. In addition, an example is provided to illustrate the results obtained.*

***Keywords:*** hybird iteration, mapping satisfying condition $(E_m)$, Hilbert space.

## 1. Giới thiệu

Trong Lí thuyết điểm bất động, vấn đề xấp xỉ điểm bất động cũng như khảo sát sự hội tụ cho ánh xạ không giãn thu hút sự quan tâm nghiên cứu của nhiều tác giả trong và ngoài nước. Chìa khóa quan trọng của những xấp xỉ đó là dãy lặp. Một trong những dãy lặp cơ bản nhất cho việc xấp xỉ điểm bất động của ánh xạ không giãn là dãy Mann. Năm 1979, Reich [1] đã khảo sát một số điều kiện đủ cho việc xấp xỉ điểm bất động của ánh xạ không giãn bởi dãy lặp Mann. Lưu ý rằng, sự hội tụ của dãy lặp Mann về điểm bất động của ánh xạ không giãn trong [1] là sự hội tụ yếu. Do đó, nhiều tác giả quan tâm xây dựng

* Email: *ngtrunghieu@dthu.edu.vn*

những dãy lặp tổng quát hơn dãy lặp Mann sao cho sự hội tụ của dãy lặp là hội tụ mạnh. Năm 2003, Nakajo và Takahashi [2] đã giới thiệu một loại dãy lặp và được gọi là dãy lặp hỗn hợp, đồng thời thiết lập được sự hội tụ mạnh cho ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert. Năm 2008, Takahashi và cộng sự [3] mở rộng các kết quả trong [2] cho một họ ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert.

Bên cạnh việc xây dựng những dãy lặp tổng quát, nhiều tác giả cũng nghiên cứu những mở rộng của ánh xạ không giãn. Năm 2008, Suzuki [4] đã giới thiệu một mở rộng của ánh xạ không giãn và được gọi là điều kiện *(C)* và thiết lập một số kết quả ban đầu về sự hội tụ cho điều kiện *(C)*. Năm 2011, Garcia-Falset và cộng sự [5] đã giới thiệu một tổng quát của điều kiện *(C)* và được gọi là điều kiện $(E_\mu)$. Đồng thời, một số kết quả ban đầu về sự hội tụ cho điều kiện $(E_\mu)$ cũng được thiết lập [6].

Trong bài báo này, chúng tôi thiết lập định lí về sự hội tụ của dãy lặp hỗn hợp cho họ ánh xạ thỏa mãn điều kiện $(E_m)$ trong không gian Hilbert. Từ định lí này, chúng tôi suy ra một số kết quả về sự hội tụ của dãy lặp hỗn hợp cho ánh xạ thỏa mãn điều kiện $(E_m)$. Đồng thời, chúng tôi cũng xây dựng ví dụ minh họa cho kết quả đạt được.

Trước hết, chúng tôi trình bày một số khái niệm và kết quả được sử dụng trong bài viết.

***Bổ đề 1.1.***

([7], Lemma 1.1). *Cho $H$ là một không gian Hilbert thực. Khi đó, với mọi $u, v \in H$ và $\lambda \in [0,1]$, ta có*

(1) $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u, v\rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2 - 2\langle u - v, v\rangle.$

(2) $\|\lambda u + (1-\lambda)v\|^2 = \lambda\|u\|^2 + (1-\lambda)\|v\|^2 - \lambda(1-\lambda)\|u - v\|^2.$

***Bổ đề 1.2.***

([8], p.338). Cho $H$ là một không gian Hilbert thực và $C$ là một tập con lồi đóng khác rỗng trong $H$. Khi đó, với mỗi $x \in H$, tồn tại duy nhất phần tử $P_C x \in C$ sao cho $\|x - P_C x\| = \inf\{\|x - y\| : y \in C\}$. Ta gọi ánh xạ $P_C$ là phép chiếu từ $H$ lên $C$.

***Bổ đề 1.3.***

([8], Lemma 1.3). *Cho $H$ là một không gian Hilbert thực và $C$ là một tập con lồi đóng khác rỗng trong $H$. Khi đó, $z = P_C x$ nếu và chỉ nếu $\langle x - z, z - y\rangle \geq 0$ với mọi $y \in C$.*

***Định nghĩa 1.4.***

([5], p.185)**.** Cho $H$ là một không gian Hilbert thực, $C$ là một tập con khác rỗng trong $H$ và $T : C \to C$ là một ánh xạ. Khi đó, ánh xạ $T$ được gọi là một *ánh xạ không giãn* trong $C$ nếu $\|Tx - Ty\| \le \|x - y\|$ với mọi $x, y \in C$.

***Định nghĩa 1.5.***

([5], Definition 2)**.** Cho $H$ là một không gian Hilbert thực, $C$ là một tập con khác rỗng trong $H$ và $T : C \to C$ là một ánh xạ. Khi đó, ánh xạ $T$ được gọi là thỏa mãn *điều kiện* $(E_m)$ trong $C$ nếu tồn tại $m \ge 1$ sao cho

$$\|x - Ty\| \le m\|x - Tx\| + \|x - y\| \text{ với mọi } x, y \in C.$$

***Nhận xét 1.6.*** **(**[5], p.186)**.** *Nếu $T$ là ánh xạ không giãn trong $C$ thì $T$ thỏa mãn điều kiện $(E_m)$ trong $C$ với $m = 1$.*

Ví dụ sau chứng tỏ rằng tồn tại ánh xạ thỏa mãn điều kiện $(E_m)$ nhưng không là ánh xạ không giãn.

***Ví dụ 1.7.***

Cho $C = [0, 2]$ là tập con của $\mathbb{R}$ và ánh xạ $T : C \to C$ được xác định bởi

$$Tx = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \ne 2 \\ 1 & \text{nếu } x = 2. \end{cases}$$

Khi đó, $T$ là ánh xạ thỏa mãn điều kiện $(E_m)$ với $m = 2$ nhưng $T$ không là ánh xạ không giãn.

Cho ánh xạ $T : C \to C$ và kí hiệu $F(T) = \{x \in C : Tx = x\}$ là tập hợp điểm bất động của ánh xạ $T$. Ta có định nghĩa sau.

***Định nghĩa 1.8.***

([9], Definition 2.1)**.** Cho $H$ là một không gian Hilbert thực, $C$ là một tập con khác rỗng trong $H$ và $T_n : C \to C$ là các ánh xạ thỏa mãn $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n) \ne \emptyset$. Khi đó, họ $\{T_n\}$ được gọi là *đóng đều* nếu với $\{x_n\}$ là dãy trong $C$ sao cho $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ và $\lim_{n\to\infty} \|x_n - T_n x_n\| = 0$ thì $x \in F$.

## 2. Các kết quả chính

Trước hết, chúng tôi thiết lập một số tính chất của tập $F(T)$ với $T$ là ánh xạ thỏa mãn điều kiện $(E_m)$ trong không gian Hilbert thực.

***Mệnh đề 2.1.***

*Cho $H$ là một không gian Hilbert thực, $C$ là một tập con đóng trong $H$ và $T: C \to C$ là ánh xạ thỏa mãn điều kiện $(E_\mu)$. Khi đó, $F(T)$ là tập đóng trong $C$. Hơn nữa, nếu $C$ là tập lồi thì $F(T)$ cũng là tập lồi.*

*Chứng minh*. Lấy $\{z_n\} \subset F(T)$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z \in C$. Do $T$ là ánh xạ thỏa mãn điều kiện $(E_\mu)$ nên

$$\begin{aligned} ||z - Tz|| &= ||z - z_n + z_n - Tz|| \\ &\le ||z_n - z|| + ||z_n - Tz|| \\ &\le ||z_n - z|| + \mu||z_n - Tz_n|| + ||z_n - z|| \\ &= 2||z_n - z||. \end{aligned}$$

Do $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$ nên $||z - Tz|| = 0$. Điều này có nghĩa là $z = Tz$ hay $z \in F(T)$. Vậy $F(T)$ là tập đóng.

Giả sử $C$ là tập lồi. Ta chứng minh $F(T)$ cũng là tập lồi. Với $\lambda \in [0,1]$ và $x, y \in F(T)$, ta chứng minh rằng $z = \lambda x + (1-\lambda)y \in F(T)$. Thật vậy, do $T$ là ánh xạ thỏa mãn điều kiện $(E_\mu)$ nên

$$||x - Tz|| \le \mu||x - Tx|| + ||x - z|| = ||x - z|| = ||x - \lambda x - (1-\lambda)y|| = (1-\lambda)||x - y||,$$

$$||y - Tz|| \le \mu||y - Ty|| + ||y - z|| = ||y - z|| = ||y - \lambda x - (1-\lambda)y|| = \lambda||x - y||.$$

Do đó, sử dụng Bổ đề 1.1(2) ta được

$$\begin{aligned} ||z - Tz||^2 &= ||\lambda(x - Tz) + (1-\lambda)(y - Tz)||^2 \\ &= \lambda||x - Tz||^2 + (1-\lambda)||y - Tz||^2 - \lambda(1-\lambda)||x - y||^2 \\ &\le \lambda(1-\lambda)^2||x - y||^2 + (1-\lambda)\lambda^2||x - y||^2 - \lambda(1-\lambda)||x - y||^2 = 0. \end{aligned}$$

Điều này dẫn đến $z = Tz$ hay $z \in F(T)$. Vậy $F(T)$ cũng là tập lồi. □

***Mệnh đề 2.2.***

*Cho $H$ là một không gian Hilbert thực, $C$ là một tập con đóng trong $H$, $T: C \to C$ là ánh xạ thỏa mãn điều kiện $(E_\mu)$ và dãy $\{x_n\} \subset C$ sao cho $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ và $\lim\limits_{n\to\infty} ||x_n - Tx_n|| = 0$. Khi đó, $x \in F(T)$.*

*Chứng minh.* Do $T$ thỏa mãn điều kiện $(E_m)$ trong $C$ nên

$$\|x_n - Tx\| \le m\|x_n - Tx_n\| + \|x_n - x\|.$$

Kết hợp với giả thiết $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ và $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n - Tx_n\| = 0,$ ta suy ra $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n - Tx\| = 0$ hay $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = Tx$. Kết hợp với $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ và tính duy nhất của giới hạn ta được $x = Tx$. Do đó, $x \in F(T)$. □

Định lí sau là một mở rộng của [3, Theorem 3.3] cho họ các ánh xạ thỏa mãn điều kiện $(E_m)$ trong không gian Hilbert thực.

***Định lí 2.3.***

*Cho $H$ là một không gian Hilbert thực, $C$ là một tập con lồi đóng khác rỗng trong $H$ và $T_n : C \to C$ là các ánh xạ đóng đều thỏa mãn điều kiện $(E_m)$ sao cho $F = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F(T_n) \ne \emptyset$. Với $x_0 \in H$ đặt $C_1 = C$ và $x_1 = P_{C_1}x_0$, xét dãy $\{x_n\}$ trong $C$ xác định bởi*

$$\begin{cases} y_n = b_n x_n + (1 - b_n)T_n x_n \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \|y_n - z\| \le \|x_n - z\|\} \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}}x_0, n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

*trong đó $0 \le b_n \le a < 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó, $\{x_n\}$ hội tụ đến $z_0 = P_F x_0$.*

*Chứng minh.* Ta chứng minh theo các bước sau.

*Bước 1. Chứng minh $C_n$ là tập đóng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.*

Với $n = 1$, ta có $C_1 = C$ là tập đóng.

Giả sử rằng $C_n$ là tập đóng với $n \in \mathbb{N}^*$. Ta chứng minh $C_{n+1}$ cũng là tập đóng. Lấy $\{u_{n+1}^{(k)}\}_k$ là dãy trong $C_{n+1}$ và $\{u_{n+1}^{(k)}\}_k$ hội tụ đến $u_{n+1}^{(0)}$. Ta chứng minh $u_{n+1}^{(0)} \in C_{n+1}$. Do $u_{n+1}^{(k)} \in C_{n+1}$ nên $u_{n+1}^{(k)} \in C_n$ và

$$\|y_n - u_{n+1}^{(k)}\| \le \|x_n - u_{n+1}^{(k)}\|. \tag{2.1}$$

Do $C_n$ là tập đóng và $\{u_{n+1}^{(k)}\}_k$ hội tụ đến $u_{n+1}^{(0)}$ nên $u_{n+1}^{(0)} \in C_n$. Mặt khác, khi $k \to \infty$ trong (2.1), ta có $\|y_n - u_{n+1}^{(0)}\| \le \|x_n - u_{n+1}^{(0)}\|$. Do đó, $u_{n+1}^{(0)} \in C_{n+1}$.

*Bước 2. Chứng minh $C_n$ là tập lồi với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.*

Thật vậy, với $z \in C_{n+1}$, sử dụng Bổ đề 1.1 (1), ta được

$$||y_n - z|| \leq ||x_n - z|| \Leftrightarrow ||y_n - z||^2 - ||x_n - z||^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow ||y_n - x_n||^2 + 2\langle y_n - x_n, x_n - z\rangle \leq 0.$$

Với $n = 1$, ta có $C_1 = C$ là tập lồi.

Giả sử rằng $C_n$ là tập lồi với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Ta chứng minh $C_{n+1}$ là tập lồi. Lấy $u, v \in C_{n+1}$. Ta chứng minh $\alpha u + (1-\alpha)v \in C_{n+1}$ với $\alpha \in [0,1]$. Thật vậy, do $u, v \in C_{n+1}$ nên $u, v \in C_n$ và

$$||y_n - x_n||^2 + 2\langle y_n - x_n, x_n - u\rangle \leq 0, \quad ||y_n - x_n||^2 + 2\langle y_n - x_n, x_n - v\rangle \leq 0. \quad (2.2)$$

Do $C_n$ là tập lồi và $u, v \in C_n$ nên $\alpha u + (1-\alpha)v \in C_n$. Mặt khác, từ (2.2) ta có

$$\alpha||y_n - x_n||^2 + 2\alpha\langle y_n - x_n, x_n - u\rangle \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha||y_n - x_n||^2 + 2\alpha\langle y_n - x_n, x_n\rangle - 2\alpha\langle y_n - x_n, u\rangle \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha||y_n - x_n||^2 + 2\alpha\langle y_n - x_n, x_n\rangle - 2\langle y_n - x_n, \alpha u\rangle \leq 0 \quad (2.3)$$

và

$$(1-\alpha)||y_n - x_n||^2 + 2(1-\alpha)\langle y_n - x_n, x_n - v\rangle \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\alpha)||y_n - x_n||^2 + 2(1-\alpha)\langle y_n - x_n, x_n\rangle - 2\langle y_n - x_n, (1-\alpha)v\rangle \leq 0. \quad (2.4)$$

Khi đó, từ (2.3) và (2.4) ta được

$$||y_n - x_n||^2 + 2\langle y_n - x_n, x_n\rangle - 2\langle y_n - x_n, \alpha u + (1-\alpha)v\rangle \leq 0$$

$$\Leftrightarrow ||y_n - x_n||^2 + 2\langle y_n - x_n, x_n - [\alpha u + (1-\alpha)v]\rangle \leq 0.$$

Điều này có nghĩa là $\alpha u + (1-\alpha)v \in C_{n+1}$ hay $C_{n+1}$ là tập lồi.

*Bước 3. Chứng minh $F \subset C_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.*

Với $n = 1$, ta có $F = F(T_1) \subset C = C_1$.

Giả sử rằng $F \subset C_n$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Ta chứng minh $F \subset C_{n+1}$. Thật vậy, với $u \in F$, ta có $u \in C_n$ và

$$||y_n - u|| = ||\beta_n x_n + (1-\beta_n)T_n x_n - u||$$

$$= ||\beta_n(x_n - u) + (1-\beta_n)(T_n x_n - u)||$$

$\leq b_n\|x_n - u\| + (1- b_n)\|T_n x_n - u\|$

$\leq b_n \| x_n - u \| + (1- b_n)(m\| u - T_n u \| + \| x_n - u \|)$

$= b_n\|x_n - u\| + (1- b_n)\|x_n - u\|$

$= \|x_n - u\|.$

Điều này có nghĩa là $u \in C_{n+1}$. Do đó, $F \subset C_{n+1}$.

*Bước 4. Chứng minh $\{x_n\}$ hội tụ đến $p$ và $p \in F$.*

Với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, vì $x_{n+1} = P_{C_{n+1}}x_0$ nên theo Bổ đề 1.3, ta có $\langle z - x_{n+1}, x_{n+1} - x_0\rangle \geq 0$ với $z \in C_{n+1}$. Theo Mệnh đề 2.1, ta có $F(T_n)$ là tập con lồi đóng của $C$. Kết hợp với giả thiết $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n) \neq \emptyset$, ta có $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$ là tập con lồi đóng khác rỗng của $C$. Khi đó, theo Bổ đề 1.2, tồn tại phần tử duy nhất $z_0 \in F$ sao cho $z_0 = P_F x_0$. Do $x_{n+1} = P_{C_{n+1}}x_0$ nên

$$\|x_{n+1} - x_0\| \leq \|z - x_0\| \text{ với mọi } z \in C_{n+1}. \tag{2.5}$$

Khi đó, do $z_0 \in F \subset C_{n+1}$ nên từ (2.5) ta có $\|x_{n+1} - x_0\| \leq \|z_0 - x_0\|$. Điều này có nghĩa là $\{\|x_n - x_0\|\}$ bị chặn. Vì $x_n = P_{C_n}x_0$ nên

$$\|x_n - x_0\| \leq \|z - x_0\| \text{ với mọi } z \in C_n. \tag{2.6}$$

Do $C_{n+1} \subset C_n$ nên $x_{n+1} = P_{C_{n+1}}x_0 \in C_{n+1} \subset C_n$. Do đó, từ (2.6) ta được $\|x_n - x_0\| \leq \|x_{n+1} - x_0\|$ hay $\{\|x_n - x_0\|\}$ là dãy đơn điệu tăng. Kết hợp với tính bị chặn của $\{\|x_n - x_0\|\}$, ta suy ra tồn tại giới hạn của $\{\|x_n - x_0\|\}$. Đặt

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = r. \tag{2.7}$$

Với mọi $m \geq n$ ta có $C_m \subset C_n$. Vì $x_{n+1} = P_{C_{n+1}}x_0$ nên theo Bổ đề 1.3, ta có $\langle z - x_{n+1}, x_{n+1} - x_0\rangle \geq 0$ với $z \in C_{n+1}$. Mà $x_{m+1} = P_{C_{m+1}}x_0 \in C_{m+1} \subset C_{n+1}$ nên ta có $\langle x_{m+1} - x_{n+1}, x_{n+1} - x_0\rangle \geq 0$. Khi đó, theo Bổ đề 1.1(1), ta có

$$\begin{aligned}\|x_{m+1} - x_{n+1}\|^2 &= \|x_{m+1} - x_0 - (x_{n+1} - x_0)\|^2\\ &= \|x_{m+1} - x_0\|^2 - \|x_{n+1} - x_0\|^2 - 2\langle x_{m+1} - x_{n+1}, x_{n+1} - x_0\rangle\end{aligned}$$

$$\leq \|x_{m+1} - x_0\|^2 - \|x_{n+1} - x_0\|^2. \tag{2.8}$$

Từ (2.7) và (2.8), ta suy ra $\lim_{m,n\to\infty} \|x_m - x_n\| = 0$. Do đó, $\{x_n\}$ là dãy Cauchy trong $C$. Mặt khác, do $C$ là tập đóng trong không gian Hilbert thực $H$ nên $C$ có tính đầy đủ. Khi đó, tồn tại $p \in C$ sao cho

$$\lim_{n\to\infty} x_n = p. \tag{2.9}$$

Vì $x_{n+1} = P_{C_{n+1}} x_0 \in C_{n+1}$ nên $\|y_n - x_{n+1}\| \leq \|x_n - x_{n+1}\|$. Suy ra

$$\|y_n - x_{n+1}\| \leq \|x_n - p\| + \|x_{n+1} - p\|. \tag{2.10}$$

Kết hợp (2.9) với (2.10), ta được $\lim_{n\to\infty} \|y_n - x_{n+1}\| = 0$. Ta lại có

$$\|y_n - x_n\| \leq \|y_n - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - x_n\|.$$

Suy ra $\lim_{n\to\infty} \|y_n - x_n\| = 0$. Mặt khác, từ $y_n = b_n x_n + (1 - b_n) T_n x_n$ ta được

$$\|x_n - T_n x_n\| = \frac{1}{1 - b_n}\|y_n - x_n\| \leq \frac{1}{1 - a}\|y_n - x_n\|.$$ Suy ra $\lim_{n\to\infty} \|x_n - T_n x_n\| = 0.$

Kết hợp điều này với (2.9) và giả thiết $\{T_n\}$ là họ các ánh xạ đóng đều, ta suy ra $p \in F$.

*Bước 5. Chứng minh* $p = P_F x_0$.

Do $x_{n+1} = P_{C_{n+1}} x_0$ nên theo Bổ đề 1.3, ta có $\langle y - x_{n+1}, x_{n+1} - x_0 \rangle \geq 0$ với mọi $y \in C_{n+1}$. Với mọi $q \in F \subset C_{n+1}$, ta có $\langle q - x_{n+1}, x_{n+1} - x_0 \rangle \geq 0$. Cho $n \to +\infty$ ta được $\langle q - p, p - x_0 \rangle \geq 0$. Do đó, theo Bổ đề 1.3 ta có $p = P_F x_0$. □

Tiếp theo, bằng cách sử dụng Định lí 2.3, chúng tôi nhận được một số kết quả cho sự hội tụ của dãy lặp dạng hỗn hợp của ánh xạ thỏa mãn điều kiện $(E_m)$ và ánh xạ không giãn trong không gian Hilbert. Trong đó, Hệ quả 2.4 và Hệ quả 2.5 lần lượt là sự tổng quát của [3, Theorem 4.1] và [3, Theorem 4.2] từ ánh xạ không giãn sang ánh xạ thỏa mãn điều kiện $(E_m)$.

***Hệ quả 2.4.***

*Cho $H$ là một không gian Hilbert thực, $C$ là một tập con lồi đóng trong $H$ và $T: C \to C$ là ánh xạ thỏa mãn điều kiện $(E_m)$ sao cho $F(T) \neq \emptyset$. Với $x_0 \in H$ đặt $C_1 = C$ và $x_1 = P_{C_1} x_0$, xét dãy $\{x_n\}$ trong $C$ xác định bởi*

$$\begin{cases} y_n = \beta_n x_n + (1-\beta_n)Tx_n \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : ||y_n - z|| \le ||x_n - z||\} \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}}x_0, n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

*trong đó* $0 \le \beta_n \le a < 1$ *với mọi* $n \in \mathbb{N}^*$. *Khi đó,* $\{x_n\}$ *hội tụ đến* $z_0 = P_{F(T)}x_0$.

*Chứng minh.* Bằng cách chọn $T_n = T$ với $n \in \mathbb{N}^*$, từ Định lí 2.3 và Mệnh đề 2.2, ta nhận được điều phải chứng minh. □

***Hệ quả 2.5.***

*Cho* $H$ *là một không gian Hilbert thực,* $C$ *là một tập con lồi đóng trong* $H$ *và* $T : C \to C$ *là ánh xạ thỏa mãn điều kiện* $(E_m)$ *sao cho* $F(T) \ne \emptyset$. *Với* $x_0 \in H$ *đặt* $C_1 = C$ *và* $x_1 = P_{C_1}x_0$, *xét dãy* $\{x_n\}$ *trong* $C$ *xác định bởi*

$$\begin{cases} y_n = \beta_n x_n + (1-\beta_n)((1-\alpha_n)x_n + \alpha_n Tx_n) \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : ||y_n - z|| \le ||x_n - z||\} \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}}x_0, n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

*trong đó* $0 < a \le \alpha_n \le 1$, $0 \le \beta_n \le b < 1$ *với mọi* $n \in \mathbb{N}^*$. *Khi đó,* $\{x_n\}$ *hội tụ đến* $z_0 = P_{F(T)}x_0$.

*Chứng minh.* Đặt $T_n x = (1-\alpha_n)x + \alpha_n Tx$ với $x \in C$ và $n \in \mathbb{N}^*$. Ta chứng minh $\{T_n\}$ là họ ánh xạ thỏa mãn các giả thiết của Định lí 2.3. Thật vậy,

(1) Với $\{x_n\}$ là một dãy trong $C$ sao cho $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ và $\lim_{n\to\infty} ||x_n - T_n x_n|| = 0$. Vì

$$||x_n - T_n x_n|| = ||x_n - (1-\alpha_n)x_n - \alpha_n Tx_n|| = ||\alpha_n x_n - \alpha_n Tx_n|| = \alpha_n ||x_n - Tx_n||$$

nên kết hợp với $0 < a \le \alpha_n \le 1$ ta có $\lim_{n\to\infty} ||x_n - Tx_n|| = 0$. Từ Mệnh đề 2.2, ta suy ra $x \in F(T)$. Do đó, $\{T_n\}$ là họ ánh xạ đóng đều.

(2) Với $x, y \in C$, ta có

$$\begin{aligned} ||x - T_n y|| &= ||x - (1-\alpha_n)y - \alpha_n Ty|| \\ &= ||x + (1-\alpha_n)x - (1-\alpha_n)x - (1-\alpha_n)y - \alpha_n Ty|| \\ &= ||(1-\alpha_n)(x-y) + \alpha_n(x - Ty)|| \\ &\le (1-\alpha_n)||x-y|| + \alpha_n||x - Ty|| \\ &\le (1-\alpha_n)||x-y|| + \alpha_n(m||x - Tx|| + ||x-y||) \end{aligned}$$

$\leq \|x - y\| + m a_n \|x - Tx\|$

$\leq \|x - y\| + m\|x - T_n x\|.$

Do đó, $\{T_n\}$ là họ ánh xạ thỏa mãn điều kiện $(E_m)$.

(3) Do $F(T) \neq \emptyset$ nên tồn tại $u \in C$ sao cho $Tu = u$. Mặt khác, với mỗi $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $\|u - T_n u\| = a_n \|u - Tu\| = 0$. Do đó, $u \in F(T_n)$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ hay $\bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n) \neq \emptyset$. Hơn nữa, ta cũng có $F(T) = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$. Như vậy $\{T_n\}$ là họ ánh xạ thỏa mãn các giả thiết của Định lí 2.3. Do đó, $\{x_n\}$ hội tụ đến $z_0 = P_{F(T)} x_0$. □

Vì mỗi ánh xạ không giãn là ánh xạ thỏa mãn điều kiện $(E_m)$ nên từ Định lí 2.3, Hệ quả 2.4 và Hệ quả 2.5, ta nhận được kết quả sau.

***Hệ quả 2.6.***

*Cho $H$ là một không gian Hilbert thực, $C$ là một tập con lồi đóng khác rỗng trong $H$ và $T_n : C \to C$ là các ánh xạ không giãn, đóng đều sao cho $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n) \neq \emptyset$. Với $x_0 \in H$ đặt $C_1 = C$ và $x_1 = P_{C_1} x_0$, xét dãy $\{x_n\}$ trong $C$ xác định bởi*

$$\begin{cases} y_n = b_n x_n + (1 - b_n) T_n x_n \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \|y_n - z\| \leq \|x_n - z\|\} \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}} x_0, n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

*trong đó $0 \leq b_n \leq a < 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó, $\{x_n\}$ hội tụ đến $z_0 = P_F x_0$.*

***Hệ quả 2.7.***

**(**[3], Theorem 3.3**).** *Cho $H$ là một không gian Hilbert thực, $C$ là một tập con lồi đóng trong $H$ và $T : C \to C$ là ánh xạ không giãn sao cho $F(T) \neq \emptyset$. Với $x_0 \in H$ đặt $C_1 = C$ và $x_1 = P_{C_1} x_0$, xét dãy $\{x_n\}$ trong $C$ xác định bởi*

$$\begin{cases} y_n = b_n x_n + (1 - b_n) T x_n \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \|y_n - z\| \leq \|x_n - z\|\} \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}} x_0, n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

*trong đó $0 \leq b_n \leq a < 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó, $\{x_n\}$ hội tụ đến $z_0 = P_{F(T)} x_0$.*

***Hệ quả 2.8*** **(**[3], Theorem 3.4)**.**

*Cho $H$ là một không gian Hilbert thực, $C$ là một tập con lồi đóng trong $H$ và $T: C \to C$ là ánh xạ không giãn sao cho $F(T) \neq \emptyset$. Với $x_0 \in H$ đặt $C_1 = C$ và $x_1 = P_{C_1} x_0$, xét dãy $\{x_n\}$ trong $C$ xác định bởi*

$$\begin{cases} y_n = b_n x_n + (1 - b_n)((1 - a_n)x_n + a_n T x_n) \\ C_{n+1} = \{z \in C_n : \|y_n - z\| \leq \|x_n - z\|\} \\ x_{n+1} = P_{C_{n+1}} x_0, n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

*trong đó $0 < a \leq a_n \leq 1$, $0 \leq b_n \leq b < 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó, $\{x_n\}$ hội tụ đến $z_0 = P_{F(T)} x_0$.*

Cuối cùng, chúng tôi xây dựng ví dụ minh họa cho sự hội tụ của dãy lặp trong Hệ quả 2.4.

***Ví dụ 2.9.***

Xét $C = [-3, -1]$ và ánh xạ $T: C \to C$ xác định bởi $Tx = \dfrac{2}{x} - 1$ với $x \in C$. Cho dãy $\{x_n\}$ xác định bởi $x_0 \in [-3, -1]$ và $x_{n+1} \in \{u_{n+1} \in C_{n+1} : |u_{n+1} - x_0| \text{ nhỏ nhất}\}$ với $y_n = b_n x_n + (1 - b_n)(\dfrac{2 - x_n}{x_n})$ và $C_{n+1} = \{z \in C_n : z \leq \dfrac{x_n + y_n}{2}, y_n \leq x_n\}$, trong đó $0 \leq b_n \leq a < 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó $\lim_{n \to \infty} x_n = -2$. Ta cần chứng minh $T$ là ánh xạ thỏa mãn điều kiện $(E_m)$. Thật vậy, với $x, y \in C$, ta có $\|x - Ty\| = \|x - y + y - Tx\| \leq \|y - Ty\| + \|x - y\|$. Ta xét hai trường hợp sau.

*Trường hợp 1.* Với $x = -2$, ta có

$$\|x - Ty\| = |-2 - Ty| = |-1 - \frac{2}{y}| = |\frac{-y - 2}{y}| \leq |-y - 2| = \|x - y\|.$$

Suy ra $\|x - Ty\| \leq m\|x - Tx\| + \|x - y\|$ với $m \geq 1$.

*Trường hợp 2.* Với $x \neq -2$, đặt $f(x) = x - \dfrac{2}{x} + 1$, $x \in [-3, -1]$. Khi đó, $f$ đơn điệu tăng trên $C$ và $f(-2) = 0$. Suy ra, tồn tại $c \in C$ sao cho $|f(c)| = \min_{x \in C, x \neq -2} |f(x)| \neq 0$. Do đó, tồn tại $m \geq 1$ sao cho

$||y - Ty|| \le |f(-1)| = 2 \le m|f(c)| \le m||x - Tx||$.

Suy ra $||x - Ty|| \le m||x - Tx|| + ||x - y||$.

Từ hai trường hợp trên, ta suy ra tồn tại $m \ge 1$ sao cho $||x - Ty|| \le m||x - Tx|| + ||x - y||$ với $m \ge 1$ và $x, y \in C$ hay ánh xạ $T$ là ánh xạ thỏa mãn điều kiện $(E_m)$. Do đó, dãy $\{x_n\}$ thỏa mãn các giả thiết của Hệ quả 2.4. Do đó, theo Hệ quả 2.4, dãy $\{x_n\}$ hội tụ đến $z_0 = P_{F(T)}x_0 = -2$.

Mặt khác, $T$ không là ánh xạ không giãn. Thật vậy, chọn $x = -1, y = -1.5$, ta có $||Tx - Ty|| = 0.67 > 0.5 = ||x - y||$. Vì vậy, Hệ quả 2.7 không áp dụng được cho dãy $\{x_n\}$.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] S. Reich, "Weak convergence theorems for nonexpansive mappings in Banach spaces," *J. Math. Anal. Appl.*, 67(2), pp.274-276, 1979.

[2] K. Nakajo and W. Takahashi, "Strong convergence theorems for nonexpansive mappings and nonexpansive semigroups," *J. Math. Anal. Appl.*, 279(2), pp.372-379, 2003.

[3] W. Takahashi, Y. Takeuchi, and R. Kubota, "Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces," *J. Math. Anal. Appl.*, 341(1), pp.276-286, 2008.

[4] T. Suzuki, "Fixed point theorems and convergence for some generalized nonexpansive mappings," *J. Math. Anal. Appl.*, 340(2), pp.1088-1095, 2008.

[5] J. Garcia-Falset, E. Llorens-Fuster, and T. Suzuki, "Fixed point theory for a class of generalized nonexpansive mappings," *J. Math. Anal. Appl*., 375(1), pp.185-195, 2011.

[6] M. Bagherboum, "Approximating fixed points of mappings satisfying condition (*E*) in Busemann space," *Numer. Algor.*, 71(1), pp.25-39, 2016.

[7] C. Martinez-Yanes and X. Xu, "Strong convergence of the CQ method for fixed point iteration processes," *Nonlinear Anal.*, 64, pp.2400-2411, 2006.

[8] G. Marino and H. Xu, "Weak and strong convergence theorems for strict pseudo-contractions in Hilbert spaces," *J. Math. Anal. Appl.*, 329, pp.43-52, 2007.

[9] J. Zhang, Y. Su, and Q. Cheng, "Uniformly closed replaced AKTT or *AKTT condition to get strong convergence theorems for a countable family of relatively quasi-nonexpansive mappings and systems of equilibrium problems," *Fixed Point Theory Appl.*, 2014:103, pp.1-17, 2014.