TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH
TẠP CHÍ KHOA HỌC
KHOA HỌC TỰ NHIÊN VÀ CÔNG NGHỆ
Tập 15, Số 6 (2018): 76-88
ISSN: 1859-3100

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE
NATURAL SCIENCES AND TECHNOLOGY
Vol. 15, No. 6 (2018): 76-88

Email: tapchikhoahoc@hcmue.edu.vn; Website: http://tckh.hcmue.edu.vn

SỰ HỘI TỤ CỦA DÃY LẶP ISHIKAWA ĐẾN ĐIỂM BẤT ĐỘNG CỦA ÁNH XẠ ĐƠN ĐIỆU THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN (E) TRONG KHÔNG GIAN BANACH SẮP THỨ TỰ

Nguyễn Trung Hiếu*, Phạm Ái Lam

Trường Đại học Đồng Tháp

Ngày nhận bài: 25-4-2018; ngày nhận bài sửa: 11-6-2018; ngày duyệt đăng: 19-6-2018

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi thiết lập sự hội tụ của dãy lặp Ishikawa đến điểm bất động của ánh xạ đơn điệu thỏa mãn điều kiện (E) trong không gian Banach lồi đều sắp thứ tự. Đồng thời, chúng tôi cũng đưa ra ví dụ để chứng tỏ rằng kết quả đạt được là mở rộng của một số kết quả trong tài liệu tham khảo.

Từ khóa: ánh xạ đơn điệu thỏa mãn điều kiện (E), dãy lặp Mann, không gian Banach sắp thứ tự.

ABSTRACT

Convergence of Ishikawa iteration to fixed points of monotone mappings satisfying condition (E) in partially ordered Banach spaces

In this paper, we establish the convergence of Ishikawa iteration to fixed points of monotone mappings satisfying condition (E) in partially ordered uniformly convex Banach spaces. In addition, we provide an example to prove that the obtained results are extensions of some results in the literature.

Keywords: monotone mapping satisfying condition (E), Ishikawa iteration, partially ordered Banach space.

1. Giới thiệu

Ánh xạ không giãn có vai trò quan trọng trong lĩnh vực xấp xỉ điểm bất động bởi những dãy lặp. Với những giả thiết phù hợp, nhiều sự hội tụ của những dãy lặp khác nhau như dãy lặp Mann, dãy lặp Ishikawa, dãy lặp Halpern… đến điểm bất động của ánh xạ không giãn đã được thiết lập. Gần đây, một số tác giả quan tâm nghiên cứu những mở rộng của ánh xạ không giãn. Năm 2011, Garcia-Falset và cộng sự [1] đã giới thiệu khái niệm ánh xạ thỏa mãn điều kiện (E) và thiết lập sự tồn tại điểm bất động của lớp ánh xạ này trong không gian Banach. Năm 2015, Bachar và Khamsi [2] đã đưa ra một cách tiếp cận khác để mở rộng khái niệm ánh xạ không giãn là trang bị thứ tự trên không gian Banach và

* Email: *ngtrunghieu@dthu.edu.vn*

giới thiệu khái niệm ánh xạ đơn điệu không giãn, ánh xạ nửa nhóm đơn điệu không giãn và nghiên cứu xấp xỉ điểm bất động chung của họ ánh xạ nửa nhóm đơn điệu không giãn trong không gian Banach sắp thứ tự; Dehaish và Khamsi [3] đã thiết lập một số kết quả về xấp xỉ điểm bất động của ánh xạ đơn điệu không giãn bởi dãy lặp Mann trong không gian Banach sắp thứ tự. Năm 2016, Song và cộng sự [4] đã nghiên cứu điều kiện đủ cho sự tồn tại điểm bất động và xấp xỉ điểm bất động của ánh xạ đơn điệu không giãn bởi dãy lặp Mann trong không gian Banach lồi đều sắp thứ tự. Năm 2018, Lam và Hiếu [5] đã giới thiệu một lớp ánh xạ tổng quát hơn lớp ánh xạ đơn điệu không giãn và được gọi là ánh xạ đơn điệu thỏa mãn điều kiện (E). Đồng thời, một số kết quả về sự tồn tại và xấp xỉ điểm bất động của lớp ánh xạ này bởi dãy lặp Mann trong không gian Banach lồi đều sắp thứ tự cũng đã được thiết lập. Đến đây, một vấn đề được đặt ra là tiếp tục nghiên cứu xấp xỉ điểm bất động của lớp ánh xạ đơn điệu thỏa mãn điều kiện (E) bởi những dãy lặp tổng quát hơn trong không gian Banach sắp thứ tự. Do đó, trong bài báo này, chúng tôi mở rộng những kết quả về sự hội tụ của dãy lặp Mann đến điểm bất động của ánh xạ đơn điệu không giãn trong bài báo [3, 4] và ánh xạ đơn điệu thỏa mãn điều kiện (E) trong bài báo [5] để thiết lập sự hội tụ của dãy lặp Ishikawa đến điểm bất động của ánh xạ đơn điệu thỏa mãn điều kiện (E) trong không gian Banach lồi đều sắp thứ tự. Trước hết, chúng tôi trình bày một số khái niệm và kết quả cơ bản được sử dụng trong bài báo.

Định nghĩa 1.1. ([3], Definition 2.1)**.**

Cho $(X,\preceq)$ là không gian Banach sắp thứ tự, C là tập con khác rỗng trong X và $f: C \to C$ là ánh xạ. Khi đó,

(1) f được gọi là *ánh xạ đơn điệu* trong C nếu $f(u) \preceq f(v)$ với mọi $u, v \in C$ mà $u \preceq v$.

(2) f được gọi là *ánh xạ đơn điệu không giãn* trong C nếu f là ánh xạ đơn điệu và $||f(u) - f(v)|| \leq ||u - v||$ với mọi $u, v \in C$ mà $u \preceq v$.

Định nghĩa 1.2 ([1], Definition 2)**.**

Cho X là không gian Banach, C là tập con khác rỗng trong X và $f: C \to C$ là một ánh xạ. Khi đó, f được gọi là *ánh xạ thỏa mãn điều kiện* (E) nếu tồn tại $\mu \geq 1$ sao cho $|| u - f(v) || \leq \mu || u - f(u) || + || u - v ||$ với mọi $u, v \in C$.

Định nghĩa 1.3. ([5], Định nghĩa 2.1)**.**

Cho $(X,\preceq)$ là không gian Banach sắp thứ tự, C là tập con khác rỗng trong X và $f: C \to C$ là ánh xạ. Khi đó, f được gọi là *ánh xạ đơn điệu thỏa mãn điều kiện* (E) nếu f là ánh xạ đơn điệu và tồn tại $\mu \geq 1$ sao cho

$||u - f(v) || \leq \mu || u - f(u) || + || u - v ||$ với mọi $u, v \in C$ mà $u \preceq v$ hoặc $v \preceq u$.

Ví dụ sau chứng tỏ rằng tồn tại ánh xạ đơn điệu thỏa mãn điều kiện (E) nhưng không là ánh xạ đơn điệu không giãn.

Ví dụ 1.4. Xét $(\mathbb{R},\preceq)$ là không gian Banach sắp thứ tự với chuẩn giá trị tuyệt đối và thứ tự thông thường trên $\mathbb{R}$, $C=[0,2.5]$ là tập con của $\mathbb{R}$ và ánh xạ $f:C\to C$ được xác định bởi $f(u)=\dfrac{u^3}{9}$ với $u\in C$. Khi đó f là ánh xạ đơn điệu thỏa mãn điều kiện (E) nhưng f không là ánh xạ đơn điệu không giãn. Thật vậy, với $u\preceq v$, ta có $u,v\in[0,2.5]$ và $f(u),f(v)\in[0,2.5]$. Khi đó

$$f(u)-f(v)=\frac{u^3}{9}-\frac{v^3}{9}=\frac{1}{9}(u-v)(u^2+uv+v^2)\le 0.$$

Suy ra $f(u)\preceq f(v)$. Do đó, f là ánh xạ đơn điệu. Tiếp theo, ta chứng minh tồn tại $\mu\ge 1$ sao cho với $u\preceq v$ hoặc $v\preceq u$, ta có $||u-f(v)||\le\mu||u-f(u)||+||u-v||$. Ta chỉ cần xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1. Với $u=0$, $v\in[0,2.5]$ ta có

$$||u-f(v)||=||0-\frac{v^3}{9}||=\frac{v^3}{9}\le v=||0-v||=\mu||u-f(u)||+||u-v||.$$

Trường hợp 2. Với $u\in(0,2.5]$, $v\in[0,2.5]$ ta có

$$||u-f(v)||=||u-v+v-f(v)||\le||v-f(v)||+||u-v||.$$

Đặt $g(v)=v-f(v)=v-\dfrac{v^3}{9}$. Khi đó, với $t\in(0,2.5]$ ta có $0<g(t)\le\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. Do đó, tồn tại $\mu\ge 1$ sao cho $||v-f(v)||=||v-\dfrac{v^3}{9}||<\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\le\mu g(u)=\mu||u-f(u)||$. Suy ra

$$||u-f(v)||\le\mu||u-f(u)||+||u-v|| \text{ với } \mu\ge 1.$$

Từ hai trường hợp trên, ta suy ra tồn tại $\mu\ge 1$ sao cho với $u\preceq v$ hoặc $v\preceq u$, ta có

$$||u-f(v)||\le\mu||u-f(u)||+||u-v||.$$

Do đó, f là ánh xạ đơn điệu thỏa mãn điều kiện (E). Tuy nhiên, f không là ánh xạ đơn điệu không giãn. Thật vậy, bằng cách chọn $u=1$ và $v=2.5$ ta có

$$||f(u)-f(v)||=1.625\ge 1.5=||u-v||.$$

Do đó, f không là ánh xạ đơn điệu không giãn. □

Định nghĩa 1.5. ([6], Definition 1.1).

Cho X là không gian Banach. Không gian X được gọi là *thỏa mãn điều kiện Opial yếu* nếu với mỗi $u\in X$ và với mỗi dãy $\{u_n\}$ hội tụ yếu đến u, ta có

$$\liminf_{n\to\infty}||u_n-v||>\liminf_{n\to\infty}||u_n-u|| \text{ với mọi } v\ne u.$$

Lưu ý rằng trong [6], Dozo đã chứng minh rằng bất đẳng thức trên tương đương với $\limsup_{n\to\infty} \| u_n - v \| > \limsup_{n\to\infty} \| u_n - u \|$ với mọi $v \neq u$.

Định nghĩa 1.6. ([7], p.46, p.189).

Cho X Không gian Banach. Khi đó

(1) Không gian X được gọi là *lồi đều* nếu với mọi $\varepsilon \in (0,2]$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho $\| \frac{u+v}{2} \| < 1-\delta$ với $u,v \in X$ mà $\| u \| = \| v \| = 1$ và $\| u - v \| \geq \varepsilon$.

(2) Kí hiệu X^* là tập hợp các phiếm hàm tuyến tính liên tục từ X vào $\mathbb{R}$ và X^{**} là tập hợp các phiếm hàm tuyến tính liên tục từ X^* vào $\mathbb{R}$. Xét ánh xạ chính tắc $J : X \to X^{**}$ xác định bởi $J(u)(f) = f(u)$ với $u \in X,\ f \in X^*$. Khi đó, X được gọi là *không gian Banach phản xạ* nếu $J(X) = X^{**}$.

Nhận xét 1.7. ([7], Proposition 6). *Nếu X là không gian Banach lồi đều thì X là không gian Banach phản xạ.*

Bổ đề 1.8. ([8], Theorem 2).

Với số thực $q \geq 1$ và $r \geq 0$. Không gian Banach X là lồi đều nếu và chỉ nếu tồn tại hàm liên tục lồi tăng nghiêm ngặt $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ sao cho $\varphi(0) = 0$ và $\| tu + (1-t)v \|^q \leq t \| u \|^q + (1-t) \| v \|^q - \omega(q,t)\varphi(\| u - v \|)$ với mọi $u,v \in B_r(0) := \{u \in E : \| u \| \leq r\}$, $\omega(q,t) = t^q(1-t) + t(1-t)^q$, $t \in [0,1]$. Đặc biệt, với $q = 2, t = \frac{1}{2}$, ta có $\| \frac{u+v}{2} \|^2 \leq \frac{1}{2} \| u \|^2 + \frac{1}{2} \| v \|^2 - \frac{1}{4}\varphi(\| u - v \|)$.

Bổ đề 1.9. ([9], Lemma 1.3).

Cho X là không gian Banach lồi đều. Giả sử rằng $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ là hai dãy trong X với $a_n \in [\alpha,\beta] \subset (0,1)$, $c \geq 0$ sao cho $\limsup_{n\to\infty} \| x_n \| \leq c$, $\limsup_{n\to\infty} \| y_n \| \leq c$ và $\limsup_{n\to\infty} \| a_n x_n + (1-a_n)y_n \| = c$. Khi đó $\lim_{n\to\infty} \| x_n - y_n \| = 0$.

Kí hiệu $F(f) = \{x \in C : f(x) = x\}$ là tập hợp điểm bất động của ánh xạ $f : C \to C$ và $F_{\preceq}(f) = \{p \in F(f) : p \preceq x_1\}$ với x_1 là số hạng thứ nhất trong dãy lặp Mann xác định bởi: $x_1 \in C, x_{n+1} = a_n x_n + (1-a_n)f(x_n)$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, trong đó $\{a_n\}$ là dãy trong $(0,1)$. Kết quả sau là sự hội tụ của dãy lặp Mann cho ánh xạ đơn điệu thỏa mãn điều kiện (E) trong không gian Banach lồi đều sắp thứ tự được thiết lập trong [5].

Định lí 1.10. ([5], Định lí 2.8).

Cho $(X,\preceq)$ là không gian Banach lồi đều sắp thứ tự, C là tập con compact, lồi đóng khác rỗng trong X, $f: C \to C$ là ánh xạ đơn điệu thỏa mãn điều kiện (E) sao cho $F_{\preceq}(f) \neq \varnothing$, $\{x_n\}$ là dãy lặp Mann thỏa mãn $f(x_1) \preceq x_1$ và $\limsup_{n\to\infty} a_n(1-a_n) > 0$. Khi đó, dãy $\{x_n\}$ hội tụ đến $p \in F_{\preceq}(f)$.

2. Các kết quả chính

Trước hết, ta giả sử rằng thứ tự $\preceq$ và chuẩn $||.||$ trên X thỏa mãn điều kiện sau

(H1): Với $\alpha \in [0,1]$, $a \preceq b$ *và* $c \preceq d$, *ta có* $\alpha a + (1-\alpha)c \preceq \alpha b + (1-\alpha)d.$

(H2): Nếu tồn tại $a, b \in X$ *sao cho* $a \preceq u \preceq b$ *với* $u \in X$ *thì tồn tại* $\lambda > 0$ *sao cho* $||u|| \le \lambda \max\{||a||, ||b||\}.$

Xét dãy lặp Ishikawa $\{u_n\}$ xác định bởi:

$$u_1 \in C, \begin{cases} u_{n+1} = a_n u_n + (1-a_n) f(v_n) \\ v_n = b u_n + (1-b) f(u_n). \end{cases} \text{với mọi } n \in \mathbb{N}^*,$$

trong đó, $\{a_n\}$ là dãy trong $[0,1]$, $b \in (0,1)$ và ánh xạ f ánh xạ từ C vào C. Trước hết, chúng tôi thiết lập một số tính chất của ánh xạ đơn điệu thỏa mãn điều kiện (E) và tính chất của dãy lặp Ishikawa cho ánh xạ này trong không gian Banach sắp thứ tự.

Nhận xét 2.1. *Cho $(X,\preceq)$ là không gian Banach sắp thứ tự, C là tập con khác rỗng trong X, $f: C \to C$ là ánh xạ đơn điệu thỏa mãn điều kiện (E) sao cho $F(f) \neq \varnothing$. Khi đó, $\| f(u) - p \| \le \| u - p \|$ với mọi $u \in C$ và $p \in F(f)$ mà $p \preceq u$ hoặc $u \preceq p$.*

Chứng minh. Thật vậy, vì f là ánh xạ đơn điệu thỏa mãn điều kiện (E) nên với mọi $u \in C$ và $p \in F(f)$ mà $p \preceq u$ hoặc $u \preceq p$, ta có

$$\| f(u) - p \| = \| p - f(u) \| \le \mu \| p - f(p) \| + \| u - p \| = \| u - p \|. \qquad \square$$

Bổ đề 2.2.

Cho $(X,\preceq)$ là không gian Banach sắp thứ tự, C là một tập con lồi đóng khác rỗng trong X, $f: C \to C$ là ánh xạ đơn điệu và $\{u_n\}$ là dãy lặp Ishikawa sao cho $f(u_1) \preceq u_1$. Khi đó

(1) *$f(v_n) \preceq u_{n+1} \preceq u_n$ và $v_{n+1} \preceq v_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.*

(2) *Nếu dãy $\{u_n\}$ hội tụ yếu đến điểm $u \in C$ thì $u \preceq u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.*

Chứng minh. (1) *Chứng minh rằng*

$$f(v_n) \preceq u_{n+1} \preceq u_n \text{ và } v_{n+1} \preceq v_n \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*. \tag{2.1}$$

Vì $f(u_1) \preceq u_1$ và $b \in (0,1)$ nên $f(u_1) \preceq b u_1 + (1-b) f(u_1) \preceq u_1$. Mà

$v_1 = bu_1 + (1-b)f(u_1).$

Do đó

$$f(u_1) \preceq v_1 \preceq u_1. \tag{2.2}$$

Kết hợp điều này với f là ánh xạ đơn điệu ta có $f(v_1) \preceq f(u_1) \preceq v_1 \preceq u_1$. Do $f(v_1) \preceq u_1$ với $a_1 \in [0,1]$ nên $f(v_1) \preceq a_1u_1 + (1-a_1)f(v_1) \preceq u_1$. Suy ra

$$f(v_1) \preceq u_2 \preceq u_1. \tag{2.3}$$

Từ (2.3) và f là ánh xạ đơn điệu ta có $f(u_2) \preceq f(u_1)$. Vì $u_2 \preceq u_1$ và $f(u_2) \preceq f(u_1)$ nên

$$v_2 = bu_2 + (1-b)f(u_2) \preceq bu_1 + (1-b)f(u_1) = v_1. \tag{2.4}$$

Từ (2.3) và (2.4) ta có $f(v_1) \preceq u_2 \preceq u_1$ và $v_2 \preceq v_1$. Do đó (2.1) đúng với $n = 1$.

Giả sử (2.1) đúng với $n = k$, ta có $f(v_k) \preceq u_{k+1} \preceq u_k$ và $v_{k+1} \preceq v_k$ với $k \in \mathbb{N}^*$. Ta sẽ chứng minh (2.1) đúng với $n = k+1$, tức là chứng minh $f(v_{k+1}) \preceq u_{k+2} \preceq u_{k+1}$ và $v_{k+2} \preceq v_{k+1}$ với mọi $k \in \mathbb{N}^*$. Thật vậy, vì $v_{k+1} \preceq v_k$ và f là ánh xạ đơn điệu nên $f(v_{k+1}) \preceq f(v_k)$ với mọi $k \in \mathbb{N}^*$. Kết hợp điều này với $f(v_k) \preceq u_{k+1}$ ta được $f(v_{k+1}) \preceq f(v_k) \preceq u_{k+1}$ với mọi $k \in \mathbb{N}^*$. Suy ra

$f(v_{k+1}) \preceq a_{k+1}u_{k+1} + (1-a_{k+1})f(v_{k+1}) \preceq u_{k+1}$ với mọi $k \in \mathbb{N}^*$. Do đó

$$f(v_{k+1}) \preceq u_{k+2} \preceq u_{k+1}. \tag{2.5}$$

Từ (2.5) và f là ánh xạ đơn điệu ta có $f(u_{k+2}) \preceq f(u_{k+1})$. Vì $u_{k+2} \preceq u_{k+1}$ và $f(u_{k+2}) \preceq f(u_{k+1})$ nên

$$v_{k+2} = bu_{k+1} + (1-b)f(u_{k+1}) \preceq bu_{k+2} + (1-b)f(u_{k+2}) = v_{k+1}. \tag{2.6}$$

Từ (2.5) và (2.6) ta có $f(v_{k+1}) \preceq u_{k+2} \preceq u_{k+1}$ và $v_{k+2} \preceq v_{k+1}$. Do đó, (2.1) đúng với $n = k+1$ với mọi $k \in \mathbb{N}^*$. Vậy (2.1) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

(2) Nếu dãy $\{u_n\}$ hội tụ yếu đến điểm $u \in C$ thì $u \preceq u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

Với mỗi $k \in \mathbb{N}^*$, ta có $(\leftarrow, u_k] = \{x \in C: \ x \preceq u_k\}$ là lồi đóng và $\{u_n\}$ là dãy đơn điệu giảm nên $u_n \in (\leftarrow, u_k]$ với mọi $n \geq k$. Do $\{u_n\}$ hội tụ yếu đến điểm $u \in C$. Suy ra $u \in (\leftarrow, u_k]$ hay $u \preceq u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. □

Bổ đề 2.3.

Cho $(X,\preceq)$ là không gian Banach sắp thứ tự, C là một tập con lồi đóng khác rỗng trong X, $f: C \to C$ là ánh xạ đơn điệu thỏa mãn điều kiện (E) sao cho $F(f) \neq \varnothing$ và $\{u_n\}$ là dãy lặp Ishikawa sao cho $p \preceq f(u_1) \preceq u_1$ với mọi $p \in F(f)$. Khi đó,

(1) *Dãy $\{u_n\}$ và $\{v_n\}$ là bị chặn theo chuẩn.*

(2) $\| u_{n+1} - u \| \leq \| u_n - u \|$ *và tồn tại giới hạn* $\lim_{n\to\infty} \| u_n - u \|$ *với mọi* $u \in F(f)$.

Chứng minh. (1) *Chứng minh rằng $\{u_n\}$ và $\{v_n\}$ là dãy bị chặn theo chuẩn.*

Trước hết, ta chứng minh rằng $\{u_n\}$ và $\{v_n\}$ là dãy bị chặn theo thứ tự $\preceq$.

Theo Bổ đề 2.2.(1), ta có $u_n \preceq u_1$ và $v_n \preceq u_1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ hay $\{u_n\}$ là dãy bị chặn trên bởi u_1 và $\{v_n\}$ là dãy bị chặn trên bởi v_1.

Tiếp theo ta chứng minh $p \preceq u_n$ và $p \preceq v_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. (2.7)

Do $p \preceq u_1$ với $p \in F(f)$ và f là ánh xạ đơn điệu nên $p = f(p) \preceq f(u_1)$. Kết hợp điều này với (2.2) ta có $p \preceq f(u_1) \preceq v_1 \preceq u_1$. Suy ra (2.7) đúng với $n = 1$.

Giả sử (2.7) đúng với $n = k \geq 1$, ta có $p \preceq u_k$, $p \preceq v_k$ ta chứng minh $p \preceq u_{k+1}$ và $p \preceq v_{k+1}$. Thật vậy, do $p \preceq v_k$, $p \preceq u_k$ kết hợp với f là ánh xạ đơn điệu, ta có

$$p = a_k p + (1-a_k)p = a_k p + (1-a_k)f(p) \preceq a_k u_k + (1-a_k)f(v_k) = u_{k+1} \quad (2.8)$$

Hơn nữa, từ (2.8) với f là ánh xạ đơn điệu ta được

$$p = bp + (1-b)p = bp + (1-b)f(p) \preceq bu_{k+1} + (1-b)f(u_{k+1}) = v_{k+1} \quad (2.9)$$

Từ (2.8) và (2.9) ta có $p \preceq u_{k+1}$, $p \preceq v_{k+1}$ với $k \in \mathbb{N}^*$. Ta chứng minh được (2.7) đúng với $n = k+1$ với mọi $k \in \mathbb{N}^*$. Do đó, $\{u_n\}$ và $\{v_n\}$ là dãy bị chặn theo thứ tự $\preceq$. Vì $p \preceq u_n \preceq u_1$ và $p \preceq v_n \preceq u_1$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ nên theo giả thiết (H2) ta có $\{u_n\}$ và $\{v_n\}$ là dãy bị chặn theo chuẩn.

(2) *Chứng minh rằng* $\| u_{n+1} - u \| \leq \| u_n - u \|$ *và tồn tại giới hạn* $\lim_{n\to\infty} \| u_n - u \|$ *với* $u \in F(f)$.

Thật vậy, với $u \in F(f)$, ta có $u \preceq f(u_1) \preceq u_1$. Bằng lập luận tương tự như chứng minh trong (2.7), ta có $u \preceq u_n$ và $u \preceq v_n$ với $n \in \mathbb{N}^*$. Bằng cách sử dụng Nhận xét 2.1, ta có

$$\begin{aligned} \| u_{n+1} - u \| &= \| a_n u_n + (1-a_n)f(v_n) - u \| \\ &= \| a_n u_n - a_n u + (1-a_n)f(v_n) - u + a_n u \| \end{aligned}$$

$$\leq (1-a_n)\,||\,f(v_n)-u\,||+a_n\,||\,u_n-u\,||$$
$$\leq (1-a_n)\,||\,v_n-u\,||+a_n\,||\,u_n-u\,||\,. \qquad (2.10)$$

Hơn nữa, theo Nhận xét 2.1, ta cũng có

$$\begin{aligned}||\,v_n-u\,|| &= ||bu_n+(1-b)f(u_n)-u||\\ &= ||bu_n-bu+(1-b)f(u_n)-u+bu||\\ &\leq (1-b)||f(u_n)-u||+b||u_n-u||\\ &\leq (1-b)||u_n-u||+b||u_n-u||\\ &\leq ||u_n-u||.\end{aligned} \qquad (2.11)$$

Do đó, $||\,u_{n+1}-u\,||\leq a_n\,||\,u_n-u\,||+(1-a_n)\,||\,u_n-u\,||=||\,u_n-u\,||$.

Suy ra $\{||\,u_n-u\,||\}$ là dãy đơn điệu giảm. Mặt khác, ta có $0\leq||\,u_n-u\,||$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$. Do đó, tồn tại $\lim\limits_{n\to\infty}||\,u_n-u\,||$ với mọi $n\in\mathbb{N}^*$. □

Mệnh đề 2.4.

Cho $(X,\preceq)$ là không gian Banach lồi đều sắp thứ tự, C là tập con lồi đóng khác rỗng trong X, $f:C\to C$ là ánh xạ đơn điệu thỏa mãn điều kiện (E) sao cho $F(f)\neq\varnothing$ và $\{u_n\}$ là dãy lặp Ishikawa thỏa mãn $p\preceq f(u_1)\preceq u_1$ với mọi $p\in F(f)$. Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty}||\,u_n-f(u_n)\,||=0$.

Chứng minh. Theo Bổ đề 2.3.(1), ta có $\{u_n\}$ và $\{f(v_n)\}$ bị chặn theo chuẩn. Do đó theo Bổ đề 1.8 với $q=2, t=a_n$, sử dụng (2.11) và Nhận xét 2.1 với $p\in F(f)$, ta có

$$\begin{aligned}||\,u_{n+1}-p\,||^2 &= ||\,a_nu_n+(1-a_n)f(v_n)-p\,||^2\\ &= ||\,a_nu_n-a_np+(1-a_n)f(v_n)-p+a_np\,||^2\\ &= ||\,(1-a_n)(f(v_n)-p)+a_n(u_n-p)\,||^2\\ &\leq (1-a_n)\,||\,f(v_n)-p\,||^2+a_n\,||\,u_n-p\,||^2-a_n(1-a_n)\varphi(||\,u_n-f(v_n)\,||)\\ &\leq (1-a_n)\,||\,u_n-p\,||^2+a_n\,||\,u_n-p\,||^2-a_n(1-a_n)\varphi(||\,u_n-f(v_n)\,||)\\ &= ||\,u_n-p\,||^2-a_n(1-a_n)\varphi(||\,u_n-f(v_n)\,||).\end{aligned}$$

Suy ra

$$a_n(1-a_n)\varphi(||\,u_n-f(v_n)\,||)\leq||\,u_n-p\,||^2-||\,u_{n+1}-p\,||^2\,. \qquad (2.12)$$

Theo Bổ đề 2.3, ta có giới hạn $\lim\limits_{n\to\infty} \| u_n - p \|$ tồn tại. Đặt $\lim\limits_{n\to\infty} \| u_n - p \| = c.$ Khi đó từ (2.12) ta có $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(\| u_n - f(v_n) \|) = 0.$ Khi đó, sử dụng tính chất của hàm φ, ta được $\lim\limits_{n\to\infty} \| u_n - f(v_n) \| = 0.$ Sử dụng Nhận xét 2.1 ta có

$$\| u_n - p \| \le \| u_n - f(v_n) \| + \| f(v_n) - p \| \le \| u_n - f(v_n) \| + \| v_n - p \| \tag{2.13}$$

Cho $n \to \infty$ trong (2.13) ta được

$$c = \limsup_{n\to\infty} \| u_n - p \| \le \limsup_{n\to\infty} \| v_n - p \| . \tag{2.14}$$

Tương tự như trong chứng minh (2.11), ta có $\| v_n - p \| \le \| u_n - p \|$. Do đó

$$\limsup_{n\to\infty} \| v_n - p \| \le \limsup_{n\to\infty} \| u_n - p \| = c. \tag{2.15}$$

Từ (2.14) và (2.15) ta suy ra $\limsup\limits_{n\to\infty} \| v_n - p \| = c.$ Khi đó,

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} \| b(u_n - p) + (1-b)(f(u_n) - p) \| &= \limsup_{n\to\infty} \| bu_n + (1-b)f(u_n) - p \| \\ &= \limsup_{n\to\infty} \| v_n - p \| = c. \end{aligned}$$

Từ Nhận xét 2.1, ta có $\limsup\limits_{n\to\infty} \| f(u_n) - p \| \le \limsup\limits_{n\to\infty} \| u_n - p \| = c.$ Do đó, theo Bổ đề 1.9, ta được $\lim\limits_{n\to\infty} \| u_n - f(u_n) \| = 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. □

Tiếp theo, chúng tôi thiết lập điều kiện đủ cho sự hội tụ yếu của dãy lặp Ishikawa về điểm bất động của ánh xạ đơn điệu thỏa mãn điều kiện (E) trong không gian Banach lồi đều sắp thứ tự.

Định lí 2.5.

Cho $(X, \preceq)$ là không gian Banach lồi đều sắp thứ tự và thỏa mãn điều kiện Opial yếu, C là tập con lồi đóng khác rỗng trong X, $f : C \to C$ là ánh xạ đơn điệu thỏa mãn điều kiện (E) sao cho $F(f) \neq \varnothing$ và $\{u_n\}$ là dãy lặp Ishikawa thỏa mãn $p \preceq f(u_1) \preceq u_1$ với mọi $p \in F(f)$. Khi đó, dãy $\{u_n\}$ hội tụ yếu đến $u \in F(f)$.

Chứng minh. Theo Bổ đề 2.3.(1), ta có $\{u_n\}$ là dãy bị chặn theo chuẩn. Do X là không gian Banach lồi đều nên X là không gian Banach phản xạ. Khi đó tồn tại dãy con $\{u_{n(k)}\}$ của $\{u_n\}$ sao cho $\{u_{n(k)}\}$ hội tụ yếu đến $u \in C.$ Theo Bổ đề 2.2.(2) ta có $u \preceq u_{n(k)}$. Do f là ánh xạ đơn điệu thỏa điều kiện (E) nên

$$\| u_{n(k)} - f(u) \| \le \mu \| u_{n(k)} - f(u_{n(k)}) \| + \| u_{n(k)} - u \| . \tag{2.16}$$

Hơn nữa, theo Mệnh đề 2.4 ta có

$$\lim_{k\to\infty} \| u_{n(k)} - f(u_{n(k)}) \| = 0. \tag{2.17}$$

Từ (2.16) và (2.17) ta có

$$\limsup_{k\to\infty} \| u_{n(k)} - f(u) \| \le \limsup_{k\to\infty} \| u_{n(k)} - u \|. \quad 2.18)$$

Tiếp theo ta chứng minh $u = f(u)$. Giả sử $u \neq f(u)$. Do $\{u_{n(k)}\}$ là dãy hội tụ yếu đến u và X thỏa mãn điều kiện Opial yếu ta có

$$\limsup_{k\to\infty} \| u_{n(k)} - f(u) \| > \limsup_{k\to\infty} \| u_{n(k)} - u \|.$$

Điều này mâu thuẫn với (2.18). Do đó $u = f(u)$. Khi đó, theo Mệnh đề 2.3.(2), ta có $\lim_{n\to\infty} \| u_n - u \|$ tồn tại.

Tiếp theo ta chứng minh $\{u_n\}$ hội tụ yếu đến $u \in F(f)$. Giả sử $\{u_n\}$ không hội tụ yếu đến $u \in F(f)$. Khi đó, tồn tại dãy con $\{u_{n(i)}\}$ hội tụ yếu đến $u^* \in C$ mà $u^* \neq u$. Lập luận tương tự như trên ta có $u^* = f(u^*)$ và tồn tại giới hạn $\lim_{n\to\infty} \| u_n - u^* \|$.

Do X thỏa mãn điều kiện Opial yếu, ta có

$$\limsup_{i\to\infty} \| u_{n(i)} - u \| > \limsup_{i\to\infty} \| u_{n(i)} - u^* \|. \tag{2.19}$$

Mặt khác, vì $\{u_{n(k)}\}$ hội tụ yếu đến $u \in C$ và $u^* \neq u$ nên theo điều kiện Opial yếu, ta có

$$\limsup_{k\to\infty} \| u_{n(k)} - u^* \| > \limsup_{k\to\infty} \| u_{n(k)} - u \|. \tag{2.20}$$

Do $\lim_{n\to\infty} \| u_n - u \|$ và $\lim_{n\to\infty} \| u_n - u^* \|$ tồn tại nên từ (2.19), (2.20) ta có

$$\lim_{n\to\infty} \| u_n - u \| > \lim_{n\to\infty} \| u_n - u^* \| \text{ và } \lim_{n\to\infty} \| u_n - u^* \| > \lim_{n\to\infty} \| u_n - u \|.$$

Điều này là một mâu thuẫn. Do đó $\{u_n\}$ hội tụ yếu đến $u \in F(f)$. □

Tiếp theo, chúng tôi thiết lập điều kiện đủ cho sự hội tụ của dãy lặp Ishikawa đến điểm bất động của ánh xạ đơn điệu thỏa mãn điều kiện (E) trong không gian Banach lồi đều sắp thứ tự.

Định lí 2.6.

Cho $(X, \preceq)$ là không gian Banach lồi đều sắp thứ tự, C là tập con compact, lồi đóng khác rỗng trong X, $f : C \to C$ là ánh xạ đơn điệu thỏa mãn điều kiện (E) sao cho $F(f) \neq \varnothing$ và $\{u_n\}$ là dãy lặp Ishikawa thỏa mãn $p \preceq f(u_1) \preceq u_1$ với mọi $p \in F(f)$. Khi đó, dãy $\{u_n\}$ hội tụ đến $u \in F(f)$.

Chứng minh. Vì $p \preceq f(u_1) \preceq u_1$ nên theo Mệnh đề 2.4, ta có $\lim\limits_{n\to\infty} \| u_n - f(u_n) \| = 0.$ Do C là tập con compact nên tồn tại dãy con $\{u_{n(k)}\}$ của $\{u_n\}$ sao cho $\{u_{n(k)}\}$ hội tụ đến $u \in C.$ Khi đó, từ Bổ đề 2.3, ta có $u \preceq u_{n(k)} \preceq u_1$ với mọi $k \in \mathbb{N}^*.$

Hơn nữa, vì f là ánh xạ đơn điệu thỏa mãn điều kiện (E) nên

$$\| u_{n(k)} - f(u) \| \le \mu \| u_{n(k)} - f(u_{n(k)}) \| + \| u_{n(k)} - u \| . \tag{2.21}$$

Kết hợp (2.21) và $\lim\limits_{n\to\infty} \| u_n - f(u_n) \| = 0,$ ta có $\lim\limits_{k\to\infty} \| u_{n(k)} - f(u) \| = 0$ hay $\{u_{n(k)}\}$ hội tụ đến $f(u).$ Kết hợp điều này với kết quả $\{u_{n(k)}\}$ hội tụ đến $u,$ ta có $f(u) = u.$ Hơn nữa, từ Mệnh đề 2.3.(2), ta có $\lim\limits_{n\to\infty} \| u_n - u \|$ tồn tại. Kết hợp với dãy con $\{u_{n(k)}\}$ của $\{u_n\}$ hội tụ đến $u \in F(f)$ ta được $\{u_n\}$ hội tụ đến $u \in F(f).$ □

Cuối cùng, chúng tôi đưa ra ví dụ về việc ứng dụng những kết quả được thiết lập để chứng minh giới hạn của dãy số có dạng dãy lặp Ishikawa. Đồng thời, ví dụ này cũng chứng tỏ rằng việc mặt lí thuyết những kết quả được thiết lập là áp dụng được cho ánh xạ được chỉ ra nhưng những kết quả trong [3, 4] là không áp dụng được. Hơn nữa, ví dụ này cũng chứng tỏ rằng sự hội tụ của dãy lặp Ishikawa đến điểm bất động của ánh xạ được đưa ra là nhanh hơn sự hội tụ của dãy lặp Mann đến điểm bất động của ánh xạ này.

Ví dụ 2.7. Xét dãy số $\{u_n\}$ xác định bởi:

$$u_1 = 0.5,\ u_{n+1} = \frac{2n+1}{3n+2} u_n + \frac{n+1}{9(3n+2)} v_n^3,\ v_n = \frac{u_n}{3} + \frac{2u_n^3}{27} \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*.$$

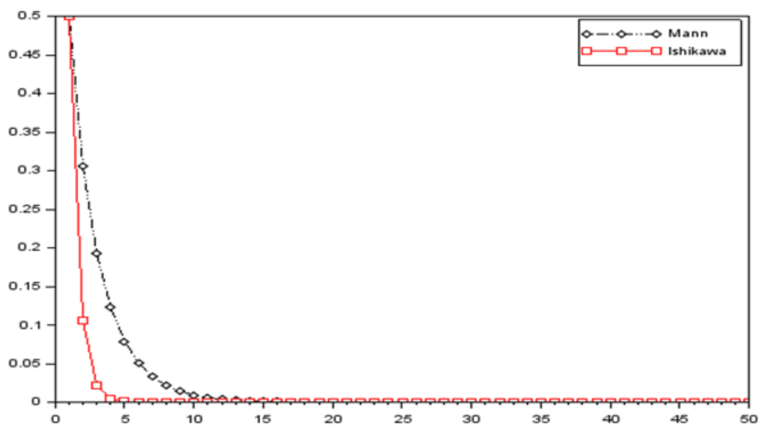
Khi đó, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0.$ Thật vậy, xét $(\mathbb{R}, \preceq)$ là không gian Banach sắp thứ tự với chuẩn giá trị tuyệt đối và thứ tự thông thường trên $\mathbb{R},$ $C = [0{,}2.5]$ là tập con của $\mathbb{R}$ và ánh xạ $f : C \to C$ được xác định bởi $f(u) = \dfrac{u^3}{9}$ với $u \in C.$ Khi đó, theo Ví dụ 1.3, ta có f là ánh xạ đơn điệu thỏa mãn điều kiện $(E).$ Do đó, dãy $\{u_n\}$ có dạng dãy lặp Ishikawa với

$$u_1 = 0.5,\ \begin{cases} u_{n+1} = a_n u_n + (1 - a_n) f(v_n) \\ v_n = \dfrac{1}{3} u_n + \dfrac{2}{3} f(u_n) \end{cases} \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*, \text{ trong đó } a_n = \frac{2n+1}{3n+2}, b = \frac{1}{3}.$$

Khi đó, dãy $\{u_n\}$ thỏa mãn các giả thiết của Định lí 2.6 với $F(f) = \{p \in C : f(p) = p\} = \{0\}.$ Vì vậy, theo Định lí 2.6 ta có dãy $\{u_n\}$ hội tụ đến

$0 \in F(f)$. Tuy nhiên, theo Ví dụ 1.3, ta có f không là ánh xạ đơn điệu không giãn. Do đó, các kết quả trong [3,4] không áp dụng được cho dãy $\{u_n\}$ và ánh xạ f được chỉ ra.

Để ý rằng với ánh xạ f và $a_n = \dfrac{2n+1}{3n+2}$ được chỉ ra như trên, dãy lặp Mann $\{x_n\}$ như trong Định lí 1.10 xác định bởi: $x_1 = 0.5,\ x_{n+1} = \dfrac{2n+1}{3n+2}x_n + \dfrac{n+1}{9(3n+2)}x_n^3$ cũng hội tụ về $0 \in F(f)$. Tuy nhiên, sự hội tụ của dãy lặp Ishikawa về $0 \in F(f)$ là nhanh hơn sự hội tụ của dãy lặp Mann về $0 \in F(f)$. Bằng lập trình trên phần mềm Scilab-6.0.0 với $n = 50$, chúng tôi minh họa dáng điệu hội tụ đến 0 của dãy lặp Mann và dãy lặp Ishikawa như sau



$\square$

❖ ***Tuyên bố về quyền lợi:*** *Các tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.*

❖ ***Lời cảm ơn:*** *Bài báo này được hỗ trợ bởi Trường Đại học Đồng Tháp với Đề tài nghiên cứu khoa học mã số SPD2017.02.43.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] J.Garcia-Falset, E. Llorens-Fuster, and T. Suzuki, "Fixed point theory for a class of generalized nonexpansive mappings," *J. Math. Anal. Appl.*, 375(1), pp.185-195, 2011.

[2] M. Bachar and M. A. Khamsi, "On common approximate fixed points of monotone nonexpansive semigroups in Banach spaces," *Fixed Point Theory Appl.*, 2015:160, pp.1-12, 2015.

[3] B. A. B. Dehaish and M. A. Khamsi, "Mann iteration process for monotone nonexpansive mappings," *Fixed Point Theory Appl.*, 2015:177, pp.1-8, 2015.

[4] Y. Song, P. Kumam, and Y. J. Cho, "Fixed point theorems and iterative approximations for monotone nonexpansive mappings in ordered Banach spaces," *Fixed Point Theory Appl.*, 2016:73, pp.1-11, 2016.

[5] P. A. Lam và N. T. Hiếu, "Sự tồn tại và xấp xỉ điểm bất động của ánh xạ đơn điệu thỏa mãn điều kiện (E) trong không gian Banach sắp thứ tự," *Tạp chí Khoa học Đại học Đồng Tháp,* 31, pp. 65-73, 2018.

[6] E. L. Dozo, "Multivalued nonexpansive mappings and Opial's condition," *Proc. Amer. Math. Soc.*, 38(2), pp.286-292, 1973.

[7] B. Beauzamy, "Introduction to Banach spaces and their geometry," *North-Holland*, Amsterdam, 1982.

[8] H. K. Xu, "Inequality in Banach space with applications," *Nonlinear Anal.*, 16, pp.1127-1138, 1991.

[9] J. Schu, "Weak and strong convergence to fixed points of asymptotically nonexpansive mappings," *Bull. Aust. Math. Soc.*, 43, pp.153-159, 1991.