TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH
TẠP CHÍ KHOA HỌC
KHOA HỌC TỰ NHIÊN VÀ CÔNG NGHỆ
Tập 15, Số 9 (2018): 113-119
ISSN: 1859-3100

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE
NATURAL SCIENCES AND TECHNOLOGY
Vol. 15, No. 9 (2018): 113-119

Email: tapchikhoahoc@hcmue.edu.vn; Website: http://tckh.hcmue.edu.vn

TẬP HỢP CÁC PHẦN TỬ ĐỐI XỨNG CỦA NHÓM CON CHUẨN TẮC TRONG VÀNH CHIA CÓ PHÉP ĐỐI HỢP

Đậu Thị Huế *

Trường Đại học Sài Gòn

Ngày nhận bài: 17-8-2018; ngày nhận bài sửa: 22-8-2018; ngày duyệt đăng: 21-9-2018

TÓM TẮT

Cho D là vành chia tâm F với phép đối hợp ⋆. Trong bài báo này, chúng tôi chứng minh được rằng nếu vết và chuẩn của đạo nhóm cấp n đều chứa trong tâm F thì $\dim_F D \leq 4$. *Kết quả này là mở rộng một kết quả rất cổ điển của Herstein. Ở phần tiếp theo, chúng tôi sẽ trình bày một kết quả cho vành chia có phép đối hợp.*

Từ khóa: vành chia, phép đối hợp, vết, chuẩn.

ABSTRACT

The set of symmetric elements of a normal subgroup in a division ring with involution

Let D be a division ring with center F and with involution ⋆. In this paper, we proved that if trace and norm of the n^{th} *derived subgroup are contained in F then* $\dim_F D \leq 4$. *This is an extension of Herstein's classical result. In the next section, we present a result for division ring with involution.*

Keywords: division ring; involution; trace; norm.

1. Giới thiệu

Cho R là vành có đơn vị. Ánh xạ $\star : R \to R, x \mapsto x^\star$ được gọi là một *phép đối hợp* nếu với bất kì $x, y \in R$, ta có $(x+y)^\star = x^\star + y^\star$; $(xy)^\star = y^\star x^\star$ và $(x^\star)^\star = x$. Tập hợp $S = \{x \in R \mid x^\star = x\}$ được gọi là *tập các phần tử đối xứng* của *R*. Với $x \in R$, những phần tử $x + x^\star$ và $xx^\star$ lần lượt được gọi là *vết* và *chuẩn* của x. Rõ ràng, vết và chuẩn của một phần tử là những phần tử trong S. Những định nghĩa và kết quả cơ bản của vành có phép đối hợp có thể tham khảo trong [1].

Giả sử *A* là tập hợp con của *R*. Ta nói *A* là ⋆-bất biến nếu $x^\star \in A$ với mọi $x \in A$. Đặt $S_A = \{x \in A \mid x^\star = x\}$ là *tập các phần tử đối xứng* của *A*. *Vết* của *A* được định nghĩa là $T_A = \{x + x^\star \mid x \in A\}$ và *chuẩn* của *A* là tập hợp $N_A = \{xx^\star \mid x \in A\}$. Nếu *A* là ⋆-bất biến và đóng với phép cộng thì $T_A \subseteq S_A$. Một cách tương tự, nếu *A* là ⋆-bất biến và đóng với phép

* Email: *huedau172@gmail.com*

nhân thì $N_A \subseteq S_A$. Vành cơ sở mà chúng tôi nghiên cứu trong bài báo này là vành chia. Chúng tôi sẽ mở rộng hai kết quả của Herstein liên quan tới vành chia có phép đối hợp.

Cho *D* là vành chia có tâm *F* với phép đối hợp $\star$. Năm 1976, Herstein đã chứng minh rằng nếu tập hợp $S = \{x \in D \mid x^{\star} = x\}$ các phần tử đối xứng của *D* chứa trong *F* thì $\dim_F D \leq 4$. Mặc dù, phát biểu giả thiết là $S \subseteq F$, nhưng trong chứng minh, Herstein chỉ dùng đến tính chất $x + x^{\star}$ và $xx^{\star}$ thuộc *F* với mọi $x \in D$. Chứng minh chi tiết có thể tham khảo trong [1]. Trong bài báo này, chúng tôi mở rộng kết quả của Herstein với giả thiết $x + x^{\star}$ và $xx^{\star}$ thuộc *F* với mọi $x \in D^{(n)}$ thay vì $x \in D$. Nhắc lại rằng $D^{(n)}$ là *đạo nhóm cấp n* của nhóm nhân $D^* = D \setminus \{0\}$ với định nghĩa quy nạp như sau: $D^{(0)} = D^*$ và với $n \geq 1$,

$$D^{(n)} = [D^{(n-1)}, D^{(n-1)}] = \langle [a,b] = aba^{-1}b^{-1} \mid a,b \in D^{(n-1)} \rangle,$$

nhóm con giao hoán tử của $D^{(n-1)}$. Kĩ thuật mà chúng tôi sử dụng trong bài này được kế thừa từ [2] và [3]. Tuy nhiên, để tiện theo dõi, chúng tôi sẽ trình bày lại các kĩ thuật này một cách ngắn gọn trong Mục 2.

Kết quả tiếp theo chúng tôi đề cập là hai kết quả mở rộng của Định lí Cartan-Brauer-Hua cho vành chia: một định lí của Stuth và một định lí của Herstein. Định lí Cartan-Brauer-Hua phát biểu rằng, nếu *D* là vành chia và *K* là vành chia con thực sự của *D* sao cho $xKx^{-1} \subseteq K$ với mọi $x \in D^*$ thì *K* chứa trong tâm của *D*. Năm 1963, Stuth đã mở rộng kết quả này khi chứng minh trong vành chia *D* tâm *F* và *K* là vành chia con thực sự của *D*, nếu *G* là nhóm con á chuẩn tắc của D^* thỏa $G \not\subseteq F$ và $xKx^{-1} \subseteq K$ với mọi $x \in G$ thì $K \subseteq F$. Trong khi đó, Herstein lại mở rộng theo hướng vành chia có phép đối hợp. Cụ thể, cho *D* là vành chia tâm *F* và phép đối hợp $\star$, *K* là vành chia con thực sự của *D* sao cho $xKx^{-1} \subseteq K$ với $x \in S \setminus \{0\}$. Khi đó, nếu $\dim_F D > 4$ thì $K \subseteq F$. Phần cuối của bài báo này, là mở rộng cả hai kết quả trên khi xét giả thiết $xKx^{-1} \subseteq K$ với mọi $x \in S_G$ thay vì $x \in S$ trong kết quả của Herstein hay $x \in G$ trong kết quả của Stuth.

Các kí hiệu trong bài báo này, là các kí hiệu thường dùng. Chẳng hạn, nếu *R* là vành thì *Z*(*R*) là tâm của *R*; R^* là nhóm nhân của *R*; $M_n(R)$ là vành các ma trận cấp *n* với hệ số trên *R*; $GL_n(R)$ là nhóm nhân của $M_n(R)$ và $SL_n(R)$ là nhóm giao hoán tử của $GL_n(R)$. Một ma trận vuông *a* với hệ số trên trường, ta kí hiệu $|a|$ là định thức của *a*.

2. Đồng nhất thức Laurent và đơn thức giao hoán tử

Trong phần này, chúng tôi trình bày một số kĩ thuật liên quan tới *đồng nhất thức Laurent* sẽ được sử dụng trong Mục 3. Cho *F* là trường và $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ là tập hợp *m* biến không giao hoán. Kí hiệu $F\langle X \rangle$ là *vành đa thức Laurent* của *X* trên *F*, nghĩa là, mỗi phần tử $f(X)$ của $F\langle X \rangle$ có dạng

$$f(X)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_{i_1}^{m_{i,1}} x_{i_2}^{m_{i,2}}\cdots x_{i_t}^{m_{i,t}},$$

trong đó, $\alpha_i \in F, x_{i_j} \in X$ và $m_{i,j} \in \mathbb{Z}$. Mỗi phần tử của vành đa thức Laurent $F\langle X\rangle$ được gọi là đa thức Laurent. Với một bộ $(c_1,c_2,\cdots,c_m)$; trong đó $c_i \in R$ là các phần tử khả nghịch, ta hiểu $f(c_1,c_2,\cdots,c_m)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i c_{i_1}^{m_{i,1}} c_{i_2}^{m_{i,2}}\cdots c_{i_t}^{m_{i,t}}$ là giá trị của đa thức *f* khi các biến x_i được thay thế bằng giá trị c_i. Cho *R* là một vành mà tâm của nó chứa *F*. Ta nói *R* thỏa một *đồng nhất thức Laurent* nếu tồn tại một đa thức Laurent $f(X)$ khác 0 trên *F* sao cho với mọi bộ $(c_1,c_2,\cdots,c_m)$, trong đó c_i khả nghịch trên *R*, ta có $f(c_1,c_2,\cdots,c_m)=0$. Đặt $L(R)$ là tập hợp tất cả các đồng nhất thức Laurent của *R*.

Bổ đề 2.1.

Cho D là vành chia với tâm F. Nếu $\dim_F D=d^2$ *và* $M_d(F)$ *là vành ma trận với hệ số trên F thì* $L(D)=L(M_n(F))$.

Chứng minh. Đây là một trường hợp đặc biệt của [4, Theorem 11].

Trong bài này, ta xét một số đơn thức Laurent đặc biệt sau: giả sử $m=2^n$ với *n* là số tự nhiên, tức là, $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_{2^n}\}$ gồm 2^n biến. Ta định nghĩa bằng quy nạp dãy các đơn thức Laurent như sau. Đặt $u_1(x_1,x_2)=[x_1,x_2]=x_1x_2x_1^{-1}x_2^{-1}$. Giả sử $u_{n-1}(x_1,x_2,\cdots,x_{2^{n-1}})$ đã được định nghĩa. Khi đó,

$$u_n(x_1,\cdots,x_{2^n})=[u_{n-1}(x_1,\cdots,x_{2^{n-1}}),u_{n-1}(x_{2^{n-1}+1},\cdots,x_{2^n})].$$

Đơn thức u_n vừa định nghĩa ở trên được gọi là *đơn thức giao hoán tử cấp n*. Chú ý rằng đơn thức giao hoán tử được xây dựng không phụ thuộc vào trường cơ sở *F*. Hơn thế nữa, ta có mối quan hệ giữa đơn thức giao hoán tử cấp *n* và đạo nhóm cấp *n* của một nhóm như sau:

Bổ đề 2.2.

Cho G là nhóm nhân, $G^{(n)}$ *là đạo nhóm cấp n của G và* u_n *được định nghĩa ở trên. Khi đó với* $c_1,c_2,\cdots,c_{2^n}\in G$, *ta có* $u_n(c_1,c_2,\cdots,c_{2^n})\in G^{(n)}$.

Chứng minh. Chứng minh có thể tham khảo trong [2, Lemma 4].

Một trong những hệ quả của bổ đề trên là nếu *G* là nhóm giải được với $G^{(n)}=1$ thì $u_n(c_1,c_2,\cdots,c_{2^n})=1$ với mọi $c_i\in G$. Điều này tương đương với nếu *G* giải được thì tồn tại *n* sao cho $1-u_n(x_1,x_2,\cdots,x_{2^n})=0$ là đồng nhất thức của *G*.

Tiếp theo, ta sẽ xét một đa thức Laurent đặc biệt liên quan tới phần tử đại số. Để tiện trình bày sau này, giả sử $X=\{x,y_1,\cdots,y_d\}$. Đặt

$$g_d(x, y_1, y_2, \cdots, y_d) = \sum_{\sigma \in S_{d+1}} \operatorname{sign}(\sigma) x^{\sigma(0)} y_1 x^{\sigma(1)} y_2 \cdots x^{\sigma(d-1)} y_n x^{\sigma(d)},$$

trong đó, S_{d+1} là nhóm hoán vị của $\{0,1,\cdots,d+1\}$ và $\operatorname{sign}(\sigma)$ là dấu của hoán vị $\sigma \in S_{d+1}$. Khi đó, rõ ràng $g(x, y_1, \cdots, y_d)$ là một đa thức Laurent trong $F\langle X\rangle$. Đa thức này dùng để nghiên cứu những phần tử đại số bậc bị chặn trên *F*. Nhắc lại, cho vành *R* có tâm chứa *F*. Một phần tử $a \in R$ được gọi *đại số* trên *F* nếu nó là nghiệm của một đa thức khác 0 với hệ số trên *F*, tức là tồn tại $a_0, a_1, \cdots, a_n \in F$ không đồng thời bằng 0 sao cho $a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$. Ta nói *a* là phần tử *đại số bậc n* trên *F* nếu *a* đại số trên *F* và *n* là số nhỏ nhất thỏa $a_n a^n + a_{n-1} a^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$. Kết quả sau đây cho ta mối quan hệ của một phần tử bậc bị chặn và *g*.

Bổ đề 2.3.

Cho D là vành chia có tâm F sao cho $\dim_F D < \infty$ *và* $M_n(D)$ *là vành ma trận vuông cấp n với hệ số trên D. Với* $a \in M_n(D)$, *các phát biểu sau là tương đương.*

(1) a là phần tử đại số trên F bậc $\leq d$ *;*

(2) với mọi $b_1, b_2, \cdots, b_d \in M_n(D), g_d(a, b_1, b_2, \cdots, b_d) = 0$.

Chứng minh. Bổ đề chỉ là trường hợp riêng của [5, Corollary 2.3.8].

3. Vết và chuẩn của đạo nhóm cấp n

Bổ đề 3.1.

Cho $M_d(F)$ *là vành ma trận cấp d trên F và* $u_n(x_1, x_2, \cdots, x_{2^n})$ *được định nghĩa trong Bổ đề 2.2. Khi đó, nếu F vô hạn thì tồn tại* $c_1, c_2, \cdots, c_{2^n} \in GL_d(F)$ *sao cho* $u_n(c_1, c_2, \cdots, c_{2^n})$ *đại số trên F bậc d.*

Chứng minh. Trước hết, ta chứng minh bằng quy nạp theo *n* phát biểu sau: với mọi phần tử $a \in SL_d(F)$, tồn tại $a_1, a_2, \cdots, a_{2^n} \in GL_d(F)$ sao cho $a = u_n(a_1, \cdots, a_{2^n})$. Nếu $n = 1$, theo [6], với mọi $a \in SL_d(F)$, tồn tại $a_1, a_2 \in GL_n(F)$ sao cho $a = a_1 a_2 a_1^{-1} a_2^{-1} = u_1(a_1, a_2)$. Giả sử kết quả đúng với $n-1$, tức là, với mọi phần tử $b \in SL_d(F)$, tồn tại $b_1, b_2, \cdots, b_{2^{n-1}} \in GL_d(F)$ sao cho $u_{n-1}(b_1, b_2, \cdots, b_{2^{n-1}}) = b$. Với $a \in SL_d(F)$, tồn tại $c_1, c_2 \in GL_n(F)$ sao cho $a = c_1 c_2 c_1^{-1} c_2^{-1}$ (theo [6]). Đặt $b_1 = \frac{1}{|c_1|} c_1, b_2 = \frac{1}{|c_2|} c_2$. Suy ra, $a = b_1 b_2 b_1^{-1} b_2^{-1}$ và $b_1, b_2 \in SL_d(F)$. Theo giả thiết quy nạp, tồn tại $a_1, a_2, \cdots, a_{2^n} \in GL_d(F)$ sao cho $b_1 = u_{n-1}(a_1, a_2, \cdots, a_{2^{n-1}})$ và $b_2 = u_{n-1}(a_{2^{n-1}+1}, a_{2^{n-1}+2}, \cdots, a_{2^n})$. Suy ra, $a = u_n(a_1, a_2, \cdots, a_{2^n})$. Vậy phát biểu được chứng minh.

Tiếp theo, xét ma trận đường chéo $a=(a_{ii})_{1\le i\le d}$, trong đó $a_{ii}\ne a_{jj}$ với mọi $1\le i\ne j\le d$ và $a_{11}a_{22}\cdots a_{dd}=1$. Để thấy được sự tồn tại của *a*, ta xét các trường hợp sau: Trường hợp $char(F)=0$, chọn $a_{ii}=i$ với $1\le i<d$ và $a_{dd}=1^{-1}2^{-1}\cdots(d-1)^{-1}$; trường hợp $char(F)=p>0$, gọi $\mathbb{F}_p$ là trường con nguyên tố của *F*. Do *F* vô hạn nên mở rộng trường $F/\mathbb{F}_p$ hoặc là mở rộng không đại số hoặc là mở rộng vô hạn sinh. Nếu *u* là phần tử không đại số trên $\mathbb{F}_p$, ta chọn $a_{ii}=u^i$ với $1\le i<d$ và $a_{dd}=u^{\frac{-d(d-1)}{2}}$. Nếu $F/\mathbb{F}_p$ vô hạn sinh, thì ta chọn chọn a_{ii} sao cho $\mathbb{F}_p(a_{11})\not\subseteq\mathbb{F}_p(a_{11},a_{22})\not\subseteq\cdots\not\subseteq\mathbb{F}_p(a_{11},a_{22},\cdots,a_{(d-1)(d-1)})$ và $a_{dd}=a_{11}^{-1}a_{22}^{-1}\cdots a_{(d-1)(d-1)}^{-1}$. Như vậy, *a* tồn tại. Mặt khác, đa thức đặc trưng của *a* là $(x-a_{11})(x-a_{22})\cdots(x-a_{dd})$ và $a\in SL_d(F)$ do định thức của *a* bằng $a_{11}a_{22}\cdots a_{dd}=1$. Theo phát biểu trên, tồn tại $a_1,a_2,\cdots,a_{2^n}\in GL_n(F)$ sao cho $a=u_n(a_1,a_2,\cdots,a_{2^n})$. Bổ đề được chứng minh.

Định lí 3.2.

Cho D là vành chia tâm F với phép đối hợp ⋆. Nếu vết và chuẩn của $D^{(n)}$ *đều chứa trong tâm F thì* $\dim_F D\le 4$.

Chứng minh.

Giả sử $x+x^{\star},xx^{\star}\in F$ với mọi $x\in D$. Trước hết, ta chứng minh với $x\in D$ nếu $xx^{\star}=\lambda\in F$ thì $x^{\star}x=\lambda$.

Thật vậy, nếu $x=0$ thì $xx^{\star}=x^{\star}x=0$. Nếu $x\in D\setminus\{0\}$ thì $x^{\star}=x^{-1}\lambda=\lambda x^{-1}$, do đó $x^{\star}x=x^{-1}x=\lambda$. Với $x\in D^{(n)}$, ta có $x^2-(x+x^{\star})x+xx^{\star}=0$. Hơn nữa, $x+x^{\star}=\alpha, xx^{\star}=\beta\in F$, nên x là nghiệm của phương trình $t^2-\alpha t+\beta=0$. Như vậy, mọi phần tử của $D^{(n)}$ đều đại số bậc ≤ 2 trên *F*. Nếu *F* hữu hạn thì các phần tử $D^{(n)}$ đều xoắn. Áp dụng [7, Theorem 8], ta được $D^{(n)}\subseteq F$. Như vậy, D^* giải được. Theo [8], *D* giao hoán. Khi đó, $\dim_F D=1$ thỏa định lí. Giả sử *F* là trường vô hạn và $D^{(n)}\not\subseteq F$. Khi đó, tồn tại $a\in D^{(n)}\setminus F$. Vì $D^{(n)}$ là nhóm con chuẩn tắc của D^* nên $axa^{-1}x^{-1}\in D^{(n)}$ với mọi $x\in D^*$. Suy ra, $axa^{-1}x^{-1}$ đại số bậc ≤ 2 trên *F*. Do đó, theo [3, Theorem 10] ta có $\dim_F D<\infty$. Đặt $\dim_F D=d^2$, ta sẽ chứng minh $d\le 2$. Cho $g(x_0,y_1,y_2)$ và $u_n(x_1,\cdots,x_{2^n})$ được định nghĩa như trong Bổ đề 2.2. Đặt $f(x_1,\cdots,x_{2^n},y_1,y_2)=g(u_n(x_1,\cdots,x_{2^n}),y_1,y_2)$. Giả sử $c_1,c_2,\cdots,c_{2^n}\in D^*$ và $d_1,d_2\in D^*$. Khi đó, $u_n(c_1,c_2,\cdots,c_{2^n})\in D^{(n)}$ theo Bổ đề 2.2, kéo theo $u_n(c_1,c_2,\cdots,c_{2^n})$ đại số trên F bậc ≤ 2. Áp dụng Bổ đề 2.3, nhận được

$$f(c_1,\cdots,c_{2^n},d_1,d_2)=g(u_n(c_1,\cdots,c_{2^n}),d_1,d_2)=0,$$

Nghĩa là $f(x_1,\cdots,x_{2^n},y_1,y_2)=0$ là đồng nhất thức Laurent của *D*. Theo Bổ đề 2.1, $f(x_1,\cdots,x_{2^n},y_1,y_2)=0$ là đồng nhất thức của $M_d(F)$. Tiếp tục áp dụng Bổ đề 2.3, $u_n(c_1,c_2,\cdots,c_{2^n})$ đại số bậc ≤ 2 trên *F* với mọi $c_1,c_2,\cdots,c_{2^n}\in GL_d(F)$. Theo Bổ đề 3.1, ta có $d\le 2$. Định lí được chứng minh.

4. Mở rộng định lí Stuth cho vành chia có phép đối hợp

Trong mục này, chúng tôi sẽ mở rộng Định lí Stuth và Herstein cho vành chia có phép đối hợp. Nhắc lại, Định lí Stuth phát biểu như sau:

Định lí 4.1.

[9] *Cho D là vành chia tâm F và K là vành chia con thực sự của D, G là nhóm con á chuẩn tắc của D^*, $G\not\subseteq F$. Nếu $xKx^{-1}\subseteq K$ với mọi $x\in G$ thì $K\subseteq F$.*

Liên quan tới vành chia có phép đối hợp, Herstein đã chứng minh kết quả sau.

Định lí 4.2.

[10] *Cho D là vành chia có tâm F với phép đối hợp $\star$ và K là vành chia con thực sự của D. Đặt $S=\{x\in D \mid x^{\star}=x\}$ là tập những phần tử đối xứng của D. Khi đó, nếu $\dim_F D>4$ và $xKx^{-1}\subseteq K$ với mọi $x\in S\setminus\{0\}$ thì $K\subseteq F$.*

Một chú ý rằng, trường hợp $\dim_F D=4$ định lí của Herstein không còn đúng nữa. Chẳng hạn, xét vành chia quaternion thực $\mathrm{H}=\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}i\oplus\mathbb{R}j\oplus\mathbb{R}k$ và phép đối hợp được định nghĩa như sau: $(a+bi+cj+dk)^{\star}=a-bi-cj-dk$ với mọi $a+bi+cj+dk\in\mathrm{H}$. Khi đó, $S=\mathbb{R}$. Xét $\mathbb{C}=\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}i$. Rõ ràng $\mathbb{C}$ là vành chia ($\mathbb{C}$ là trường) con thực sự của H và $x\mathbb{C}x^{-1}\subseteq\mathbb{C}$ với mọi $x\in S\setminus\{0\}$. Tuy nhiên, $\mathbb{C}$ không chứa trong tâm $\mathbb{R}$ của H.

Hơn thế nữa, theo kết quả của Herstein (xem [1]), nếu $S\subseteq F$ thì $\dim_F D=4$, chúng tôi sẽ mở rộng *S* cho tập S_G với *G* là nhóm con á chuẩn tắc của D^*. Cụ thể, chúng tôi chứng minh kết quả sau:

Định lí 4.3.

Cho D là vành chia tâm F với phép đối hợp $\star$. Giả sử G là nhóm con á chuẩn tắc của D^* sao cho G là $\star$-bất biến và $S_G=\{x\in N \mid x^{\star}=x\}$ là tập không chứa trong tâm F. Nếu K là vành chia con thực sự của D sao cho $xKx^{-1}\subseteq K$ với mọi $x\in S_G$ thì $K\subseteq F$.

Chứng minh.

Giả sử $\langle S_G\rangle$ là nhóm con sinh bởi S_G. Ta sẽ chứng minh $\langle S_G\rangle$ là nhóm con chuẩn tắc của G. Thật vậy, với $\forall x\in G, \forall a\in S_G$ ta có $xax^{-1}=xax^{\star}\left(x^{\star}\right)^{-1}x^{-1}=\left(xax^{\star}\right)\left(xx^{\star}\right)^{-1}$. Dễ thấy, $\left(xax^{\star}\right)^{\star}=xax^{\star}$ và $\left(xx^{\star}\right)^{\star}=xx^{\star}$. Do đó, $xax^{\star}\in\langle S_G\rangle,\left(xx^{\star}\right)^{-1}\in\langle S_G\rangle$. Nói cách khác, $xax^{-1}\in\langle S_G\rangle$. Suy ra, $\langle S_G\rangle\lhd G=G_0\lhd G_1\lhd\ldots\lhd D^*$. Vậy $\langle S_G\rangle\lhd\lhd D^*,\langle S_G\rangle\not\subseteq F$.

Với mọi $a \in \langle S_G \rangle$, $a = a_1^{n_1} a_2^{n_2} \ldots a_t^{n_t}$ trong đó $n_i \in \mathbb{Z}, a_i \in S_G$. Khi đó, $aKa^{-1} = a_1^{n_1} a_2^{n_2} \ldots a_t^{n_t} K a_t^{-n_t} a_{t-1}^{-n_{t-1}} \ldots a_1^{-n_1}$. Rõ ràng,

$$a_t^{n_t} K a_t^{-n_t} = a_t \ldots a_t \left(a_t K a_t^{-1} \right) a_t^{-1} \ldots a_t^{-1} \subset K.$$

Vì vậy, $aKa^{-1} \subseteq K$ với mọi $a \in \langle S_G \rangle$. Theo Định lí 4.1, $K \subseteq F$.

❖ ***Tuyên bố về quyền lợi:*** *Tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] I. N. Herstein, *Ring with involution*. The University of Chicago Press Chicago and London, 1976.

[2] M. Aaghabali, M. H. Bien, "Certain Simple Maximal Subfields in Division Rings," *arXiv:1708.08385v1*, submitted.

[3] M. Aaghabali, S. Akbari, M. H. Bien, "Division Algebras with Left Algebraic Commutators," *Algebra and Repr. Theory*, 21, pp.807-816, 2018.

[4] S. A. Amitsur, "Rational identities and applications to algebra and geometry," *J. Algebra* 3, pp.304 - 359, 1966.

[5] K.I. Beidar, W.S. Martindale and A.V. Mikhalev, "Rings with Generalized Identities," *Marcel Dekker, Inc.*, New York-Basel-Hong Kong, 1996.

[6] R.C. Thompson, "Commutators in the special and general linear groups," *Trans. Amer. Math. Soc.*, 101, pp.16 -33, 1961.

[7] I. N. Herstein, "Multiplicative commutators in division rings," *Israel J. Math.*, 31, pp.180-188, 1978.

[8] W. R. Scott, *Group theory*. Dover Publications Inc., New York, second edition, 1987.

[9] C. J. Stuth, "A generalization of the Cartan-Brauer-Hua Theorem," *University of Wisconsin*, pp.211-217, 1964.

[10] I. N. Herstein, "A remark on division rings with involution," *Indian J. Pure Appl. Math.*, 9, pp.267- 269, 1978.