TẠP CHÍ KHOA HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH
Tập 16, Số 12 (2019): 877-890

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE
Vol. 16, No. 12 (2019): 877-890

ISSN: 1859-3100

Website: http://journal.hcmue.edu.vn

Bài báo nghiên cứu

SỐ BETTI THỨ HAI CỦA CÁC ĐẠI SỐ LIE LŨY LINH KIỂU JORDAN

***Cao Trần Tứ Hải*[1], *Dương Minh Thành*[2*]**

[1]Trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn, Ninh Thuận

[2]Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh

[*]Tác giả liên hệ: Dương Minh Thành – Email: thanhdm@hcmue.edu.vn

Ngày nhận bài: 15-7-2019; ngày nhận bài sửa: 25-7-2019; ngày duyệt đăng: 15-8-2019

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi tính toán số Betti thứ hai của các đại số Lie lũy linh kiểu Jordan được ra trong Duong, Pinczon và Ushirobira (2012) thông qua cách tính tích super-Poisson trên đại số các dạng đa tuyến tính phản xứng của chúng.

Từ khóa: đại số Lie toàn phương; đối đồng điều; tích super-Poisson

Mở đầu

Đại số Lie toàn phương là một đối tượng đại số xuất hiện trong thời gian gần đây và đã được nghiên cứu ở nhiều khía cạnh khác nhau. Xét về mặt cấu trúc, một đại số Lie toàn phương là kiểu tổng quát của đại số Lie nửa đơn, ở đó dạng Killing sẽ tổng quát thành dạng song tuyến tính đối xứng, bất biến và không suy biến. Khi tồn tại một dạng song tuyến tính như thế, mọi đại số Lie toàn phương đều có thể tách thành tổng trực tiếp trực giao của các ideal không suy biến hoặc là tổng trực tiếp trực giao của một ideal tâm không suy biến và một ideal có tâm đẳng cự toàn bộ (Bordemann, 1997; Favre, & Santharoubane, 1987; Pinczon, & Ushirobira, 2007). Xét về mặt xây dựng, một đại số Lie toàn phương không tầm thường có thể coi như là một mở rộng kép của một đại số Lie toàn phương khác có số chiều nhỏ hơn bởi những đạo hàm phản xứng (Kac, 1985; Medina, & Revoy, 1985), hoặc được xây dựng từ một mở rộng T* của một đại số Lie bởi một đối chu trình cyclic (trong trường hợp giải được chẵn chiều) trong Bordemann (1997). Những ứng dụng trong vật lí của các đại số Lie toàn phương độc giả có thể xem trong Figueroa-O'Farrill và Stanciu (1996).

Một trong những bài toán lí thú khi nghiên cứu một đại số Lie nói chung và đại số Lie toàn phương nói riêng là mô tả được các nhóm đối đồng điều của nó. Santharoubane (1983) đã mô tả được đối đồng điều của đại số Lie Heisenberg $2n+1$ chiều $\mathfrak{h}_{2n+1}$. Gần đây trong Pouseele (2005), tác giả đã đưa ra một phương pháp khác để mô tả đối đồng điều

---

Cite this article as: Cao Tran Tu Hai, & Duong Minh Thanh (2019). The second Betti number of nilpotent Jordan-type Lie algebras. *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science, 16*(12), 877-890.

của một số đại số Lie chứa đại số Lie Heisenberg sao cho đại số Lie Heisenberg này là một ideal đối chiều 1 của nó. Trong trường hợp $\mathfrak{g}$ là một đại số Lie toàn phương, bài toán mô tả nhóm đối đồng điều hệ số trong $\mathbb{C}$ của $\mathfrak{g}$ có liên quan mật thiết đến tích super-Poisson trong bài báo Pinczon et al. (2007). Cách tiếp cận này mở ra một hướng đi trong việc tìm kiếm những họ đại số Lie thích hợp với cách tính thông qua tích super-Poisson và từ đó giúp cung cấp nhiều thông tin cho bài toán nghiên cứu đại số Lie toàn phương. Mục tiêu của chúng tôi trong bài báo này là tính được số Betti thứ hai của họ các đại số Lie lũy linh kiểu Jordan được đưa ra trong Duong et al. (2012).

Bài báo được chia làm 3 mục: Mục đầu tiên nhắc lại một số khái niệm cơ bản và kết quả về đối đồng điều của đại số Lie toàn phương; Mục 2 và Mục 3 trình bày kết quả mô tả số Betti thứ hai của họ các đại số Lie lũy linh kiểu Jordan; được tính bằng phương pháp dựa trên tích super-Poisson.

Các không gian vectơ được xét trong bài báo này là hữu hạn chiều và trên trường số phức $\mathbb{C}$.

1. Đối đồng điều của một đại số Lie toàn phương

Cho $\mathfrak{g}$ là một đại số Lie, V là một không gian vectơ và $\rho : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ là một biểu diễn của $\mathfrak{g}$ trong V. Với $k \geq 0$, kí hiệu $C^k(\mathfrak{g}, V)$ là không gian các ánh xạ k-tuyến tính phản xứng từ $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \times \ldots \times \mathfrak{g}$ vào V nếu $k \geq 1$ và $C^0(\mathfrak{g}, V) = V$. Toán tử *đối bờ* $\delta_k : C^k(\mathfrak{g}, V) \to C^{k+1}(\mathfrak{g}, V)$ được định nghĩa như sau:

$$\delta_k f\left(X_0, \ldots, X_k\right) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \rho(X_i)\left(f(X_0, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_k)\right) + \sum_{i<j}^{k} (-1)^{i+j} f\left(\left[X_j, X_j\right], X_0, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_k\right)$$

với mọi $f \in C^k(\mathfrak{g}, V)$, $X_0, \ldots, X_k \in \mathfrak{g}$, ở đây kí hiệu $\widehat{X_i}$ để chỉ X_i không có trong công thức. Ta nói rằng $f \in C^k(\mathfrak{g}, V)$ là một k-*đối chu trình* nếu $\delta_k f = 0$ và f là một k-*đối bờ* nếu có $g \in C^{k-1}(\mathfrak{g}, V)$ sao cho $f = \delta_{k-1} g$. Kí hiệu $Z^k(\mathfrak{g}, V)$ là tập hợp các k-đối chu trình và $B^k(\mathfrak{g}, V)$ là tập hợp các k-đối bờ, tức là $Z^k(\mathfrak{g}, V) = \mathrm{Ker}\delta_k$ và $B^k(\mathfrak{g}, V) = \mathrm{Im}\,\delta_{k-1}$. Không gian thương $Z^k(\mathfrak{g}, V) / B^k(\mathfrak{g}, V)$ được kí hiệu là $H^k(\mathfrak{g}, V)$ và được gọi là *nhóm đối đồng điều thứ* k của $\mathfrak{g}$ hệ số trong V.

Một trong những trường hợp đáng chú ý nhất của đối đồng điều đại số Lie là khi V một chiều, tức là $V = \mathbb{C}$ (hoặc $\mathbb{R}$). Khi đó $C^0(\mathfrak{g}, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$, $C^k(\mathfrak{g}, \mathbb{C})$ là không gian các ánh xạ k-tuyến tính phản xứng từ $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \times \ldots \times \mathfrak{g}$ vào $\mathbb{C}$, tức là $C^k(\mathfrak{g},\mathbb{C}) = \Lambda^k\left(\mathfrak{g}^*\right)$ và $\delta_k f\left(X_0,\ldots,X_k\right) = \sum_{i<j}^{k}(-1)^{i+j} f\left(\left[X_j, X_j\right], X_0,\ldots,\widehat{X}_i,\ldots,\widehat{X}_j,\ldots,X_k\right)$. Trong trường hợp này, việc mô tả nhóm đối đồng điều $H^k(\mathfrak{g},\mathbb{C})$ cũng như tính toán số Betti $b_k(\mathfrak{g}) = \dim H^k(\mathfrak{g},\mathbb{C})$ là bài toán mà chúng tôi quan tâm.

Cho một không gian vectơ phức V hữu hạn chiều được trang bị một dạng song tuyến tính đối xứng B (ta còn gọi (V,B) là một không gian vectơ *toàn phương*). Pinczon et al. (2007) đã giới thiệu khái niệm tích super-Poisson trên không gian $\Lambda\left(V^*\right)$ chứa các dạng đa tuyến tính phản xứng trên V như sau:

$$\left\{\Omega,\Omega'\right\} = (-1)^{k+1}\sum_{j=1}^{n}\iota_{X_j}(\Omega)\wedge\iota_{X_j}(\Omega'),\ \forall\Omega\in\Lambda^k\left(V^*\right) \text{ và } \Omega'\in\Lambda\left(V^*\right)$$

ở đây, $\left\{X_j\right\}_{j=1}^{n}$ là một cơ sở trực chuẩn của V. Đối với một đại số Lie toàn phương $(\mathfrak{g},B)$ *3-dạng liên kết với* $\mathfrak{g}$ xác định bởi $I\left(X,Y,Z\right) = B([X,Y],Z)$, $\forall X,Y,Z\in\mathfrak{g}$. Pinczon và Ushirobira đã chứng minh được $\left\{I,I\right\} = 0$ và $\delta\Omega = -\left\{I,\Omega\right\}$. Nhờ kết quả này, việc mô tả các nhóm đối đồng điều $H^k(\mathfrak{g},\mathbb{C})$ có thể thông qua tính toán các tích super-Poisson.

2. Kết quả chính

Cho các khối Jordan lũy linh

$$J_1 = (0), J_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, n \geq 2,$$

và không gian vectơ $\mathfrak{q} = \mathbb{C}^{2n}$ với một cơ sở chính tắc $\left\{X_1,\ldots,X_n,Y_1,\ldots,Y_n\right\}$. Xét ánh xạ tuyến tính $C:\mathfrak{q}\to\mathfrak{q}$ với ma trận đối với cơ sở chính tắc là $C = \begin{pmatrix} J_n & 0 \\ 0 & -J_n^t \end{pmatrix}$. Khi đó, $C\in\mathfrak{o}(2n)$. Gọi $\mathfrak{j}_{2n} = \mathfrak{q}\oplus\mathbb{C}X_0\oplus\mathbb{C}Y_0$ là một mở rộng của $\mathfrak{q}$ bởi C với tích Lie được xác định bởi $\left[Y_0,X\right] = C(X)$, $[X,Y] = B(C(X),Y)X_0$, $\forall X,Y\in\mathfrak{q}$, $\left[X_0,\mathfrak{j}_{2n}\right] = 0$. Định nghĩa dạng song tuyến tính B được xác định bởi $B\left(X_i, Y_j\right) = \delta_{ij}$ với $i, j = \overline{0,n}$. Khi đó B là một dạng song tuyến tính đối xứng bất biến, không suy biến và $\mathfrak{j}_{2n}$ cùng với B trở thành một đại số Lie toàn phương. Vì với $n=1$, $\mathfrak{j}_2$ là đại số Lie giao hoán 4 chiều. Đây là trường hợp tầm thường nên trong trường hợp này ta chỉ xét $n \geq 2$.

Ta xét tiếp không gian vectơ $\mathfrak{q} = \mathbb{C}^{2n+1}$ với một cơ sở chính tắc $\left\{X_1, ..., X_n, T, Y_1, ..., Y_n\right\}$. Định nghĩa ánh xạ tuyến tính $C : \mathfrak{q} \to \mathfrak{q}$ với ma trận đối với cơ sở chính tắc $C = \begin{pmatrix} J_{n+1} & M \\ 0 & -J_n^t \end{pmatrix}$, trong đó M là ma trận $(n+1)\times n$ có tất cả các số hạng bằng không ngoại trừ $m_{n+1,n} = -1$. Khi đó $C \in \mathfrak{o}(2n+1)$. Gọi $\mathfrak{j}_{2n+1} = \mathfrak{q} \oplus \mathbb{C}X_0 \oplus \mathbb{C}Y_0$ là mở rộng của $\mathfrak{q}$ bởi C với tích Lie được xác định như sau:

$[Y_0, X] = C(X)$, $[X, Y] = B(C(X), Y)X_0$, $\forall X, Y \in \mathfrak{q}$, $\left[X_0, \mathfrak{j}_{2n+1}\right] = 0$.

Và dạng song tuyến tính được xác định bởi $B\left(X_i, Y_j\right) = \delta_{ij}$ với $i, j = \overline{0,n}$, $B(T,T) = 1$.

Các đại số Lie $\mathfrak{j}_{2n}$, $\mathfrak{j}_{2n+1}$ như trên được gọi là đại số Lie lũy linh kiểu Jordan (xem Duong et al. (2012)). Kết quả chính của bài báo này là định lí sau:

Định lí.

Với các kí hiệu như trên, số Betti thứ hai của các đại số Lie lũy linh kiểu Jordan được cho bởi công thức:

(i) $b_2(\mathfrak{j}_4) = 8,\ b_2\left(\mathfrak{j}_{2n}\right) = n + 2\left[\dfrac{n}{2}\right] + 2$ *với* $n \geq 3.$

(ii) $b_2(\mathfrak{j}_3) = 3,\ b_2\left(\mathfrak{j}_{2n+1}\right) = n + 2\left[\dfrac{n}{2}\right] + 2$ *với* $n \geq 2.$

3. Chứng minh kết quả chính

3.1. Đối đồng điều thứ hai của $\mathfrak{j}_4$ $(n=2)$

Đối với $\mathfrak{j}_4$, ta có các tích Lie khác không như sau: $\left[Y_0, Y_1\right] = -Y_2$, $\left[Y_0, Y_1\right] = C\left(Y_1\right) = -Y_2$, $\left[X_2, Y_1\right] = X_0$. Dạng song tuyến tính xác định bởi $B\left(X_i, Y_j\right) = \delta_{ij}$ với $i, j = \overline{0,2}$. Gọi $\left\{\alpha, \beta, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2\right\}$ là cở sở đối ngẫu của $\left\{X_0, Y_0, X_1, X_2, Y_1, Y_2\right\}$ và $V = span\left\{\alpha_1, \alpha_2\right\}$, $W = span\left\{\beta_1, \beta_2\right\}$. Dễ dàng kiểm tra được 3-dạng liên kết với $\mathfrak{j}_4$ được xác định bởi $I = \beta \wedge \alpha_2 \wedge \beta_1$. Ta có

$B^2\left(\mathfrak{j}_4\right) = span\left\{\iota_X(I) : X \in \mathfrak{j}_4\right\} = span\left\{\alpha_2 \wedge \beta_1, \beta \wedge \alpha_2, \beta \wedge \beta_1\right\}$ và

$\dim B^2\left(\mathfrak{j}_4\right) = 3.$

Ta tính toán $\{I,.\}$ trên các hạng tử trực tiếp ta suy ra

$$H^2\left(\mathfrak{j}_4\right) = span\begin{Bmatrix}[\alpha\wedge\alpha_2],[\alpha\wedge\beta_1],[\beta\wedge\alpha_1],[\beta\wedge\beta_2],[\alpha_1\wedge\alpha_2],\\ [\beta_1\wedge\beta_2],[\alpha\wedge\beta+\alpha_2\wedge\beta_2],[\alpha\wedge\beta-\alpha_1\wedge\beta_1]\end{Bmatrix}$$ và do đó $b_2(\mathfrak{j}_4) = 8.$

3.2. Đối đồng điều thứ hai của $\mathfrak{j}_{2n}$ *với* $n > 2$

Ta có các tích Lie khác không như sau: $\left[Y_0, X_2\right] = X_1$, ..., $\left[Y_0, X_n\right] = X_{n-1}$, $\left[Y_0, Y_1\right] = -Y_2$, ..., $\left[Y_0, Y_{n-1}\right] = -Y_n$, $[X_2, Y_1] = X_0$, $[X_3, Y_2] = X_0$, ..., $[X_{n-1}, Y_{n-2}] = X_0$, $[X_n, Y_{n-1}] = X_0$. Dạng song tuyến tính xác định bởi $B\left(X_i, Y_j\right) = \delta_{ij}$. Gọi $\{\alpha,\beta,\alpha_1,...,\alpha_n,\beta_1,...,\beta_n\}$ là cở sở đối ngẫu của $\{X_0, Y_0, X_1,..., X_n, Y_1,..., Y_n\}$ và $V = span\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$, $\mathrm{W} = span\{\beta_1,...,\beta_n\}$. Dễ dàng kiểm tra được 3-dạng liên kết với $\mathfrak{j}_{2n}$ được xác định bởi $I = \beta\wedge\left(\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_{i+1}\wedge\beta_i\right)$. Ta có

$$B^2\left(\mathfrak{j}_{2n}\right) = span\{\iota_X(I) : X\in\mathfrak{j}_{2n}\} = span\left\{\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_{i+1}\wedge\beta_i, \beta\wedge\alpha_{i+1}, \beta\wedge\beta_i : i = \overline{1,n-1}\right\}$$

và $\dim B^2\left(\mathfrak{j}_{2n}\right) = 2n-1$. Không gian $C^2\left(\mathfrak{j}_{2n},\mathbb{C}\right)$ được phân tích thành tổng trực tiếp các không gian các 2-dạng: $\alpha\wedge(V\oplus W)$, $\beta\wedge(V\oplus W)$, $\wedge^2(\mathrm{V})$, $\wedge^2(\mathrm{W})$, $V\wedge\mathrm{W}$, $\langle\alpha\wedge\beta\rangle$. Sau đây ta tính toán toán tử $\{I,.\}$ trên các hạng tử trực tiếp này.

(1)Trên $\alpha\wedge(V\oplus W)$, ta có $\ker\{I,\alpha\wedge(V\oplus W)\} = \{0\}$.

(2)Trên $\beta\wedge(V\oplus W)$, tính toán trực tiếp ta được $\dim\ker\{I,\beta\wedge(V\oplus W)\} = 2n.$

(3) Trên $\wedge^2(\mathrm{V})$, ta có

$\{I,\alpha_{n-1}\wedge\alpha_n\} = 0$, $\{I,\alpha_i\wedge\alpha_n\} = \beta\wedge\alpha_{i+1}\wedge\alpha_n$ với $1\le i < n-1$,

$\{I,\alpha_i\wedge\alpha_{i+1}\} = \beta\wedge\alpha_i\wedge\alpha_{i+2}$ với $1\le i < n-1$,

$\{I,\alpha_i\wedge\alpha_j\} = \beta\wedge\alpha_{i+1}\wedge\alpha_j + \beta\wedge\alpha_i\wedge\alpha_{j+1}$ với $1\le i < j-1, j\le n-1$.

Do đó $\alpha_{n-1}\wedge\alpha_n\in\ker\{I,\wedge^2(V)\}$. Chú ý rằng mọi $\omega\in\ker\{I,\wedge^2(V)\}$ đều có dạng

$$\omega = \sum_{2\le i+1<j\le n-1}^{n-1} a_{ij}\alpha_i\wedge\alpha_j + \sum_{i=1}^{n-2} b_i\alpha_i\wedge\alpha_{i+1} + \sum_{j=1}^{n-2} c_j\alpha_j\wedge\alpha_n + d.\alpha_{n-1}\wedge\alpha_n \in\ker\{I,\wedge^2(V)\}.$$

Giả sử $\omega = \sum_{i=1}^{n-2} b_i\alpha_i\wedge\alpha_{i+1} + \sum_{j=1}^{n-2} c_j\alpha_j\wedge\alpha_n \in\ker\{I,\wedge^2(V)\}$ sao cho các b_i không đồng thời bằng không. Ta có $\{I,\omega\}=\sum_{i=1}^{n-2} b_i.\beta\wedge\alpha_i\wedge\alpha_{i+2}+\sum_{j=1}^{n-2} c_j.\beta\wedge\alpha_{j+1}\wedge\alpha_n=0$. Gọi i_0 là chỉ số sao cho $b_{i_0}\neq 0$ (không mất tính tổng quát, ta có thể chọn $b_{i_0}=1$). Để triệt tiêu $\left\{I,\alpha_{i_0}\wedge\alpha_{i_0+1}\right\}=\beta\wedge\alpha_{i_0}\wedge\alpha_{i_0+2}$ ta phải có $i_0+2=n, c_{i_0-1}=-b_{i_0}$ nên

$$\omega=\alpha_{n-2}\wedge\alpha_{n-1}-\alpha_{n-3}\wedge\alpha_n \text{ hay } \alpha_{n-3}\wedge\alpha_n-\alpha_{n-2}\wedge\alpha_{n-1}\in\ker\left\{I,\wedge^2(V)\right\}.$$

Giả sử $\omega=\sum_{2\le i+1<j\le n-1}^{n-1} a_{ij}\alpha_i\wedge\alpha_j+\sum_{i=1}^{n-2} b_i\alpha_i\wedge\alpha_{i+1}+\sum_{j=1}^{n-2} c_j\alpha_j\wedge\alpha_n\in\ker\left\{I,\wedge^2(V)\right\}$ sao cho các a_{ij} không đồng thời bằng không. Ta có

$$\left\{I,\omega\right\}=\sum_{2\le i+1<j\le n-1}^{n-1} a_{ij}.\left(\beta\wedge\alpha_{i+1}\wedge\alpha_j+\beta\wedge\alpha_i\wedge\alpha_{j+1}\right)$$

$$+\sum_{i=1}^{n-2} b_i.\beta\wedge\alpha_i\wedge\alpha_{i+2}+\sum_{j=1}^{n-2} c_j.\beta\wedge\alpha_{j+1}\wedge\alpha_n=0.$$

Gọi i_0 là số nhỏ nhất sao cho tồn tại $j_0>i_0+1$ để $a_{i_0j_0}\neq 0$ (không mất tính tổng quát, ta có thể chọn $a_{i_0j_0}=1$). Nếu $j_0<n-1$, để triệt tiêu $a_{i_0j_0}\beta\wedge\alpha_{i_0}\wedge\alpha_{j_0+1}$ phải có $a_{i_0-1,j_0+1}=-a_{i_0,j_0}\neq 0$, mâu thuẫn với tính nhỏ nhất của i_0. Do đó $j_0=n-1$. Nếu $i_0=1$ thì $\left\{I,\alpha_{i_0}\wedge\alpha_{j_0}\right\}=\left\{I,\alpha_1\wedge\alpha_{n-1}\right\}=\beta\wedge\alpha_2\wedge\alpha_{n-1}+\beta\wedge\alpha_1\wedge\alpha_n$. Theo cách tính $\{I,\omega\}$, ta không thể triệt tiêu $\beta\wedge\alpha_1\wedge\alpha_n$, vô lí, do đó $i_0>1$. Do

$$\left\{I,\alpha_{i_0}\wedge\alpha_{j_0}\right\}=\beta\wedge\alpha_{i_0+1}\wedge\alpha_{j_0}+\beta\wedge\alpha_{i_0}\wedge\alpha_n$$

nên $c_{i_0-1}=-a_{i_0j_0}, a_{i_1j_1}=-a_{i_0j_0}$ với $i_1=i_0+1, j_1=j_0-1$. Ta lại có

$$\left\{I,\alpha_{i_1}\wedge\alpha_{j_1}\right\}=\beta\wedge\alpha_{i_1+1}\wedge\alpha_{j_1}+\beta\wedge\alpha_{i_1}\wedge\alpha_{j_1+1}$$

nên $a_{i_2j_2}=-a_{i_1j_1}$ với $i_2=i_1+1, j_2=j_1-1$. Tiếp tục quá trình này ta được $a_{i_sj_s}=-a_{i_{s-1}j_{s-1}}$ với $i_s=i_{s-1}+1=i_0+s, j_s=j_{s-1}-1=n-s-1$ sao cho $j_s=i_s+2$ hoặc $j_s=i_s+3$.

Nếu $j_s=i_s+2$ thì $\left\{I,\alpha_{i_s}\wedge\alpha_{j_s}\right\}=\beta\wedge\alpha_{i_s+1}\wedge\alpha_{i_s+2}+\beta\wedge\alpha_{i_s}\wedge\alpha_{i_s+3}$. Từ cách tính $\{I,\omega\}$ trên, ta không thể triệt tiêu $\beta\wedge\alpha_{i_s+1}\wedge\alpha_{i_s+2}$, do đó trường hợp này không xảy ra.

Nếu $j_s=i_s+3$ thì $\left\{I,\alpha_{i_s}\wedge\alpha_{j_s}\right\}=\beta\wedge\alpha_{i_s+1}\wedge\alpha_{i_2+3}+\beta\wedge\alpha_{i_s}\wedge\alpha_{i_2+4}$. Khi đó để triệt tiêu $\beta\wedge\alpha_{i_s+1}\wedge\alpha_{i_2+3}$, ta cần chọn $b_{i_s+1}=-a_{i_sj_s}$. Nên ta cần chọn $i_0>1, s\ge 0$ sao cho $i_0+s+3=n-s-1$ hay $i_0=n-2l$ với $2\le l\le\left[\dfrac{n}{2}\right]-1$.

Do đó $\ker\left\{I,\wedge^2\left(\mathrm{V}\right)\right\} == span\left\{\sum_{i=1}^{k}(-1)^i\alpha_{n-2k+i}\wedge\alpha_{n-i+1} : k=1,2,...,\left[\frac{n}{2}\right]\right\}$.

(4) Trên $\wedge^2(\mathrm{W})$, tương tự như trong tính toán trên $\wedge^2(\mathrm{V})$, ta có

$$\ker\left\{I,\wedge^2(\mathrm{W})\right\} = span\left\{\sum_{i=1}^{k}(-1)^i\beta_i\wedge\beta_{2k-i+1} : k=1,2,...,\left[\frac{n}{2}\right]\right\}.$$

(5) Trên $V\wedge\mathrm{W}$, với $i=\overline{1,n-1}$, $j=\overline{2,n}$ ta có

$$\left\{I,\alpha_i\wedge\beta_j\right\} = \beta\wedge\alpha_{i+1}\wedge\beta_j - \beta\wedge\alpha_i\wedge\beta_{j-1},$$

$$\left\{I,\alpha_n\wedge\beta_j\right\} = -\beta\wedge\alpha_n\wedge\beta_{j-1},\ \left\{I,\alpha_i\wedge\beta_1\right\} = \beta\wedge\alpha_{i+1}\wedge\beta_1,\ \left\{I,\alpha_n\wedge\beta_1\right\}=0.$$

Do đó $\alpha_n\wedge\beta_1\in\ker\{I,V\wedge\mathrm{W}\}$. Giả sử $\sum_{i=1}^{n-1}b_i\alpha_i\wedge\beta_1+\sum_{j=2}^{n}c_j\alpha_n\wedge\beta_j\in\ker\{I,V\wedge\mathrm{W}\}$ sao cho các b_i không đồng thời bằng không. Ta có

$$\{I,\omega\} = \sum_{i=1}^{n-1}b_i.\beta\wedge\alpha_{i+1}\wedge\beta_1 - \sum_{j=2}^{n}c_j.\beta\wedge\alpha_n\wedge\beta_{j-1} = 0.$$

Gọi i_0 là số nhỏ nhất sao cho $b_{i_0}\neq 0$. Nếu $i_0<n-1$, do $\left\{I,\alpha_{i_0}\wedge\beta_1\right\} = \beta\wedge\alpha_{i_0+1}\wedge\beta_1$ ta không thể triệt tiêu được nên $i_0=n-1$. Khi đó để triệt tiêu $\left\{I,\alpha_{i_0}\wedge\beta_1\right\} = \beta\wedge\alpha_n\wedge\beta_1$, ta chỉ cần chọn $c_2=b_{n-1}$ do đó $\alpha_{n-1}\wedge\beta_1+\alpha_n\wedge\beta_2\in\ker\{I,V\wedge V\}$. Giả sử

$$\omega = \sum_{\substack{i=\overline{1,n-1},\\ j=\overline{2,n}}} a_{ij}\alpha_i\wedge\beta_j^2 + \sum_{i=1}^{n-1}b_i\alpha_i\wedge\beta_1 + \sum_{j=2}^{n}c_j\alpha_n\wedge\beta_j\in\ker\{I,V\wedge\mathrm{W}\}$$

sao cho các a_{ij} không đồng thời bằng không. Ta có

$$\left\{I,\omega\right\} = \sum_{\substack{i=\underline{1,n}-1,\\ j=2,n}} a_{ij}.\left(\beta\wedge\alpha_{i+1}\wedge\beta_j - \beta\wedge\alpha_i\wedge\beta_{j-1}\right)$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1}b_i.\beta\wedge\alpha_{i+1}\wedge\beta_1 - \sum_{j=2}^{m}c_j.\beta\wedge\alpha_n\wedge\beta_{j-1} = 0.$$

Gọi i_0 là số nhỏ nhất sao cho tồn tại j_0 để $a_{i_0j_0}\neq 0$ (không mất tính tổng quát, ta có thể chọn $a_{i_0j_0}=1$). Nếu $j_0>2$, để triệt tiêu $-a_{i_0j_0}\beta\wedge\alpha_{i_0}\wedge\beta_{j_0-1}$ phải có $a_{i_0-1,j_0-1}=a_{i_0,j_0}\neq 0$, mâu thuẫn với tính nhỏ nhất của i_0. Do đó $j_0=2$. Nếu $i_0=1$ thì

$$\left\{I,\alpha_{i_0}\wedge\beta_{j_0}\right\} = \left\{I,\alpha_1\wedge\beta_2\right\} = \beta\wedge\alpha_2\wedge\beta_2 - \beta\wedge\alpha_1\wedge\beta_1,$$

khi đó ta không thể triệt tiêu $-\beta\wedge\alpha_1\wedge\beta_1$, vô lí. Nên $i_0>1$. Do

$$\{I,\alpha_{i_0}\wedge\beta_{j_0}\}=\beta\wedge\alpha_{i_0+1}\wedge\beta_{j_0}-\beta\wedge\alpha_{i_0}\wedge\beta_1$$

nên $b_{i_0-1}=a_{i_0j_0}, a_{i_1j_1}=a_{i_0j_0}$ với $i_1=i_0+1, j_1=j_0+1$. Ta lại có

$$\{I,\alpha_{i_1}\wedge\beta_{j_1}\}=\beta\wedge\alpha_{i_1+1}\wedge\beta_{j_1}-\beta\wedge\alpha_{i_1}\wedge\beta_{j_1-1}$$

nên $a_{i_2j_2}=a_{i_1j_1}$ với $i_2=i_1+1, j_2=j_1+1$. Tiếp tục quá trình này đến lúc nào đó, ta được $a_{i_sj_s}=a_{i_{s-1}j_{s-1}}$ với $i_s=i_{s-1}+1=i_0+s, j_s=j_{s-1}+1=s+2$ sao cho $i_0+s=n-1$ hoặc $s+3=n$.

Nếu $i_0+s\le n-1$ và $s+2=n$ thì

$$\{I,\alpha_{i_s}\wedge\beta_{j_s}\}=\beta\wedge\alpha_{i_s+1}\wedge\beta_n-\beta\wedge\alpha_{i_0}\wedge\beta_{n-1},$$

ta không thể triệt tiêu $\beta\wedge\alpha_{i_s+1}\wedge\beta_n$ nên trường hợp này không xảy ra.

Nếu $i_0+s=n-1$ và $s+2<n$ thì

$$\{I,\alpha_{i_s}\wedge\beta_{j_s}\}=\beta\wedge\alpha_n\wedge\beta_{j_s}-\beta\wedge\alpha_{n-1}\wedge\beta_{j_s-1}.$$

Để triệt tiêu $\beta\wedge\alpha_n\wedge\beta_{j_s}$ cần chọn $c_{j_s+1}=a_{i_sj_s}$. Do đó để có $\omega\in\ker\{I,V\wedge \mathrm{W}\}$ ta phải có $i_0>1, s\ge 0$, sao cho $i_0+s=n-1$ và $s+2<n$. Điều này tương đương với $1<i_0\le n-1$. Ta chỉ cần chọn $i_0=2,\ldots,n-1$. Do đó

$$\ker\{I,V\wedge\mathrm{W}\}=span\begin{Bmatrix}\alpha_1\wedge\beta_1+\alpha_2\wedge\beta_2+\ldots.+\alpha_n\wedge\beta_n,\ldots.,\\ \alpha_{n-2}\wedge\beta_1+\alpha_{n-1}\wedge\beta_2+\alpha_n\wedge\beta_3,\alpha_{n-1}\wedge\beta_1+\alpha_n\wedge\beta_2,\alpha_n\wedge\beta_1\end{Bmatrix}$$

hay $\ker\{I,V\wedge\mathrm{W}\}=span\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\wedge\beta_i,\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_{i+1}\wedge\beta_i,\sum_{i=1}^{n-2}\alpha_{i+2}\wedge\beta_i,\ldots,\alpha_n\wedge\beta_1\right\}$.

(6) Trên $\langle\alpha\wedge\beta\rangle$, ta có $\{I,\alpha\wedge\beta\}=\beta\wedge\left(\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_{i+1}\wedge\beta_i\right)$ thuộc $\{I,(V\wedge\mathrm{W})\}$.

Đồng thời, ta tính được

$\left\{I,\alpha\wedge\beta-\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)\alpha_i\wedge\beta_i\right\}=0$ nên $\alpha\wedge\beta-\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)\alpha_i\wedge\beta_i\in\ker\{I,.\}$

Từ tất cả các điều tính toán trên, ta suy ra kết quả về các 2-đối chu trình và đối đồng điều như sau.

$$Z^2(\mathrm{j}_{2n})=\beta\wedge(V\oplus W)\oplus\ker\{I,\wedge^2(\mathrm{V})\}\oplus\ker\{I,\wedge(\mathrm{W})\}\oplus\ker\{I,V\wedge\mathrm{W}\}$$
$$\oplus\left\langle\alpha\wedge\beta-\sum_{i=1}^{n}(n+1-i)\alpha_i\wedge\beta_i\right\rangle.$$

Do đó $\dim Z^2(\mathfrak{j}_{2n}) = 2n + 2\left[\frac{n}{2}\right] + n + 1 = 3n + 2\left[\frac{n}{2}\right] + 1$. Vậy $b_2(\mathfrak{j}_{2n}) = n + 2\left[\frac{n}{2}\right] + 2$.

3.3. *Đối đồng điều thứ hai của* $\mathfrak{j}_3$ ($n = 1$)

Ta có các tích Lie khác không như sau: $[Y_0, T] = X_1$, $[Y_0, Y_1] = -T$, $[T, Y_1] = X_0$. Dạng song tuyến tính xác định bởi $B(X_i, Y_j) = \delta_{ij}$ với $i, j = \overline{0,2}$, $B(T,T) = 1$. Gọi $\{\alpha, \beta, \alpha_1, \gamma, \beta_1\}$ là cở sở đối ngẫu của $\{X_0, Y_0, X_1, T, Y_1\}$. Dễ dàng kiểm tra được 3-dạng liên kết với $\mathfrak{j}_3$ được xác định bởi $I = \beta \wedge \gamma \wedge \beta_1$.

Khi đó $B^2(\mathfrak{j}_3) = span\{\gamma \wedge \beta_1, \beta \wedge \beta_1, \beta \wedge \gamma\}$ và $\dim B^2(\mathfrak{j}_3) = 3$. Tính toán ta được $H^2(\mathfrak{j}_3) = span\{[\beta \wedge \alpha_1], [\beta_1 \wedge \alpha], [\beta \wedge \alpha - \beta_1 \wedge \alpha_1]\}$ và $b_2(\mathfrak{j}_3) = 3$.

3.4. *Đối đồng điều thứ hai của* $\mathfrak{j}_{2n+1}$ **với** $n \geq 2$

Ta có các tích Lie $[Y_0, X_2] = X_1$,..., $[Y_0, X_n] = X_{n-1}$, $[Y_0, Y_1] = -Y_2$,..., $[Y_0, Y_{n-1}] = -Y_n$, $[Y_0, Y_n] = -T$, $[X_2, Y_1] = X_0$, $[X_3, Y_2] = X_0$,..., $[X_{n-1}, Y_{n-2}] = X_0$, $[X_n, Y_{n-1}] = X_0$. Dạng song tuyến tính xác định bởi $B(X_i, Y_j) = \delta_{ij}$ với $i, j = \overline{0,n}$, $B(T,T) = 1$. Gọi $\{\alpha, \beta, \alpha_1, ..., \alpha_n, \gamma, \beta_1, ..., \beta_n\}$ là cở sở đối ngẫu của $\{X_0, Y_0, X_1, ..., X_n, T, Y_1, ..., Y_n\}$ và $V = span\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$, $W = span\{\beta_1, ..., \beta_n\}$. Dễ dàng kiểm tra được 3-dạng liên kết với $\mathfrak{j}_{2n+1}$ được xác định bởi: $I = \beta \wedge \Omega$. Ta có

$$B^2(\mathfrak{j}_{2n+1}) = span\{\Omega, \beta \wedge \alpha_{i+1}, \beta \wedge \beta_j, \beta \wedge \gamma : i = \overline{1, n-1}, j = \overline{1,n}\}$$

và $\dim B^2(\mathfrak{j}_{2n+1}) = 2n + 1$. $C^2(\mathfrak{j}_{2n+1})$ được phân tích thành tổng trực tiếp các không gian các 2-dạng:

$\alpha \wedge (V \oplus W)$, $\beta \wedge (V \oplus W)$, $\langle \alpha \wedge \gamma \rangle$, $\langle \beta \wedge \gamma \rangle$, $\wedge^2(V)$, $\wedge^2(W)$,
$((V \oplus \gamma \oplus W) \wedge W) \setminus (\wedge^2 W)$, $\gamma \wedge V$, $\langle \alpha \wedge \beta \rangle$.

Sau đây ta tính toán toán tử $\{I, .\}$ trên các hạng tử trực tiếp này.

(1) Trên $\alpha \wedge (V \oplus W)$, $\ker\{I, \alpha \wedge (V \oplus W)\} = \{0\}$.

(2) Trên $\beta \wedge (V \oplus W)$, $\dim \ker\{I, \beta \wedge (V \oplus W)\} = 2n$.

(3) Trên $\langle \alpha \wedge \gamma \rangle$, ta có $\{I, \alpha \wedge \gamma\} = \gamma \wedge \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{i+1} \wedge \beta_i - \alpha \wedge \beta \wedge \beta_n$.

(4) Trên $\langle \beta \wedge \gamma \rangle$, ta có $\{I, \beta \wedge \gamma\} = 0$. Và trên $\wedge^2(V)$, ta có $ker\{I, \wedge^2(V)\} = \{0\}$.

(5) Trên $\wedge^2(W)$, tương tự như trong tính toán đối đồng điều của j_{2n}, ta có

$$ker\{I, \wedge^2(W)\} = span\left\{\sum_{i=1}^{k}(-1)^i \beta_{n-2k+i} \wedge \beta_{n-i+1} : k = 1, 2, \dots, \left[\frac{n}{2}\right]\right\}.$$

(6) Trên $\left(\left(V \oplus \gamma \oplus W\right) \wedge W\right) \setminus \left(\wedge^2 W\right)$, với $i = \overline{1, n-1}, j = \overline{2, n}$ ta có

$$\{I, \alpha_i \wedge \beta_j\} = \beta \wedge \alpha_{i+1} \wedge \beta_j - \beta \wedge \alpha_i \wedge \beta_{j-1},$$

$$\{I, \alpha_n \wedge \beta_j\} = \beta \wedge \gamma \wedge \beta_j - \beta \wedge \alpha_n \wedge \beta_{j-1},$$

$$\{I, \alpha_i \wedge \beta_1\} = \beta \wedge \alpha_{i+1} \wedge \beta_1, \ \{I, \alpha_n \wedge \beta_1\} = \beta \wedge \gamma \wedge \beta_1.$$

Nên $\{I, V \wedge W\} \subset \left(\beta \wedge V \wedge W\right) \oplus \left(\beta \wedge \gamma \wedge W\right)$.

$$\{I, \gamma \wedge \beta_i\} = -\beta \wedge \beta_n \wedge \beta_i - \beta \wedge \gamma \wedge \beta_{i-1}, \ i = \overline{2, n-1},$$

$$\{I, \gamma \wedge \beta_n\} = -\beta \wedge \gamma \wedge \beta_{n-1}, \ \{I, \gamma \wedge \beta_1\} = -\beta \wedge \beta_n \wedge \beta_1.$$

Nên $\{I, \gamma \wedge W\} \subset \left(\beta \wedge \beta_n \wedge W\right) \oplus \left(\beta \wedge \gamma \wedge \mathrm{W}\right)$. Giả sử

$$\omega = \sum_{\substack{i=\overline{1,n-1},\\ j=\overline{2,n}}} a_{ij}\alpha_i \wedge \beta_j + \sum_{i=1}^{n-1} b_i\alpha_i \wedge \beta_1 + \sum_{j=2}^{n} c_j\alpha_n \wedge \beta_j + d.\alpha_n \wedge \beta_1$$

$$+ \sum_{1<i+1<j\le n} a'_{ij}\beta_i \wedge \beta_j + \sum_{i=2}^{n-1} b'_i\beta_i \wedge \beta_{i+1} + \sum_{j=3}^{n} c'_j\beta_1 \wedge \beta_j + d'\beta_1 \wedge \beta_2$$

$$+\sum_{i=2}^{n-1} x_i\gamma \wedge \beta_i + y\gamma \wedge \beta_n + z\gamma \wedge \beta_1 \in ker\left\{I, \left(\left(V \oplus \gamma \oplus W\right) \wedge W\right) \setminus \left(\wedge^2 W\right)\right\}.$$

Ta có $\{I, \omega\} = \sum_{\substack{i=\overline{1,n-1},\\ j=\overline{2,n}}} a_{ij}\left(\beta \wedge \alpha_{i+1} \wedge \beta_j - \beta \wedge \alpha_i \wedge \beta_{j-1}\right) + \sum_{i=1}^{n-1} b_i\beta \wedge \alpha_{i+1} \wedge \beta_1$

$$+\sum_{j=2}^{n} c_j\left(\beta \wedge \gamma \wedge \beta_j - \beta \wedge \alpha_n \wedge \beta_{j-1}\right) + d.\beta \wedge \gamma \wedge \beta_1$$

$$- \sum_{1<i+1<j\le n} a'_{ij}\left(\beta \wedge \beta_{i-1} \wedge \beta_j + \beta \wedge \beta_i \wedge \beta_{j-1}\right)$$

$$-\sum_{i=2}^{n-1} b'_i\beta \wedge \beta_{i-1} \wedge \beta_{i+1} - \sum_{j=3}^{n} c'_j\beta \wedge \beta_1 \wedge \beta_{j-1}$$

$$-\sum_{i=2}^{n-1} x_i\left(\beta\wedge\beta_n\wedge\beta_i+\beta\wedge\gamma\wedge\beta_{i-1}\right)-y.\beta\wedge\gamma\wedge\beta_{n-1}-z\beta\wedge\beta_n\wedge\beta_1=0.$$

Để triệt tiêu $\beta\wedge\gamma\wedge\beta_n$ ta phải có $c_n=0$. Ta có

$\left\{I,c_n.\alpha_n\wedge\beta_n\right\}=c_n\left(\beta\wedge\gamma\wedge\beta_n-\beta\wedge\alpha_n\wedge\beta_{n-1}\right).$

Để triệt tiêu $\beta\wedge\alpha_n\wedge\beta_{n-1}$ ta phải có $c_n=a_{n-1,n-1}$. Ta có

$\left\{I,a_{n-1,n-1}.\alpha_{n-1}\wedge\beta_{n-1}\right\}=a_{n-1,n-1}\left(\beta\wedge\alpha_n\wedge\beta_{n-1}-\beta\wedge\alpha_{n-1}\wedge\beta_{n-2}\right).$

Tiếp tục triệt tiêu $\beta\wedge\alpha_{n-1}\wedge\beta_{n-2}$, ta có $a_{n-1,n-1}=a_{n-2,n-2}$. Tiếp tục quá trình triệt tiêu này, ta được $0=c_n=a_{n-1,n-1}=a_{n-2,n-2}=a_{n-3,n-3}=\ldots=a_{2,2}=b_1$. Để triệt tiêu $\beta\wedge\gamma\wedge\beta_{n-1}$ ta phải có $y=c_{n-1}$. Ta có

$\left\{I,c_{n-1}.\alpha_n\wedge\beta_{n-1}\right\}=c_{n-1}\left(\beta\wedge\gamma\wedge\beta_{n-1}-\beta\wedge\alpha_n\wedge\beta_{n-2}\right).$

Để triệt tiêu $\beta\wedge\alpha_n\wedge\beta_{n-2}$ ta phải có $c_{n-1}=a_{n-1,n-2}$. Ta có

$\left\{I,a_{n-1,n-2}.\alpha_{n-1}\wedge\beta_{n-2}\right\}=a_{n-1,n-2}\left(\beta\wedge\alpha_n\wedge\beta_{n-2}-\beta\wedge\alpha_{n-1}\wedge\beta_{n-3}\right).$

Lập luận tương tự như trên ta được

$y=c_{n-1}=a_{n-1,n-2}=a_{n-2,n-3}=a_{n-3,n-4}=\ldots=a_{3,2}=b_2.$

$0=x_{n-1}=c_{n-2}=a_{n-1,n-3}=a_{n-2,n-4}=a_{n-3,n-5}=\ldots=a_{4,2}=b_3.$

Chú ý rằng để triệt tiêu $\beta\wedge\alpha_1\wedge\beta_1$, ta phải có $a_{1,2}=0$. Giả sử $k>1$ sao cho $x_{n-k}\neq 0$. Để triệt tiêu $\left\{I,x_{n-k}.\gamma\wedge\beta_{n-k}\right\}=-x_{n-k}\left(\beta\wedge\beta_n\wedge\beta_{n-k}+\beta\wedge\gamma\wedge\beta_{n-k-1}\right)$, ta phải có:

(a) $x_{n-k}=c_{n-k-1}$. Ta có

$\left\{I,c_{n-k-1}.\alpha_n\wedge\beta_{n-k-1}\right\}=c_{n-k-1}\left(\beta\wedge\gamma\wedge\beta_{n-k-1}-\beta\wedge\alpha_n\wedge\beta_{n-k-2}\right).$

Để triệt tiêu $\beta\wedge\alpha_n\wedge\beta_{n-k-2}$ ta phải có $c_{n-k-1}=x_{n-1,n-k-1}$, từ đó dẫn tới

$$x_{n-k}=c_{n-k-1}=a_{n-1,n-k-1}=a_{n-2,n-k-2}=a_{n-3,n-k-3}=\ldots=a_{k,2}=b_{k-1}$$

(b) $x_{n-k}=a'_{n-k+1,n}$. Ta có

$\left\{I,a'_{n-k+1,n}.\beta_{n-k+1,n}\wedge\beta_n\right\}=-a'_{n-k+1,n}\left(\beta\wedge\beta_{n-k}\wedge\beta_n+\beta\wedge\beta_{n-k+1}\wedge\beta_{n-1}\right).$

Để triệt tiêu $\beta\wedge\beta_{n-k+1}\wedge\beta_{n-1}$ ta phải có $a'_{n-k+1,n}=-a'_{n-k+2,n-1}$, từ đó suy ra

$$x_{n-k}=a'_{n-k+1,n}=-a'_{n-k+2,n-1}=a'_{n-k+3,n-2}=\ldots=(-1)^l a'_{n-k+1+l,n-l},$$

trong đó $n-k+1+l+3=n-l$ hoặc $n-k+1+l+2=n-l$.

- Nếu $n-k+1+l+3=n-l$, ta viết lại $k=2l+4$, đặt $n-k+1+l=m$, ta có $\left\{I, a'_{m,m+3}.\beta_m \wedge \beta_{m+3}\right\} = -a'_{m,m+3}\left(\beta \wedge \beta_{m-1} \wedge \beta_{m+3} + \beta \wedge \beta_m \wedge \beta_{m+2}\right)$.

Nên $a'_{m,m+3} = -b'_{m+1}$ và $\left\{I, b'_{m+1}.\beta_{m+1} \wedge \beta_{m+2}\right\} = -b'_m \beta \wedge \beta_m \wedge \beta_{m+2}$. Đến đây ta triệt tiêu được tất cả nên trường hợp k chẵn này nhận.

- Nếu $n-k+1+l+2=n-l$, ta viết lại $k=2l+3$, đặt $n-k+1+l=m$, ta có $\left\{I, a'_{m,m+2}.\beta_m \wedge \beta_{m+2}\right\} = -a'_{m,m+2}\left(\beta \wedge \beta_{m-1} \wedge \beta_{m+2} + \beta \wedge \beta_m \wedge \beta_{m+1}\right)$.

Đến đây ta không thể triệt tiêu $\beta \wedge \beta_m \wedge \beta_{m+1}$. Do đó trường hợp k lẻ không xảy ra. Cụ thể hơn, ta tìm những 2-dạng triệt tiêu qua tác động của toán tử $\{I, .\}$ bằng cách xét hai trường hợp của n.

(i) Nếu n chẵn, $n=2p$: $ker\left\{I, \left(\left(V \oplus \gamma \oplus W\right) \wedge W\right) \setminus \left(\wedge^2 W\right)\right\}$

$$= span\{\gamma \wedge \beta_n + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{i+1} \wedge \beta_i, \gamma \wedge \beta_{n-2} + \sum_{i=1}^{n-3} \alpha_{i+3} \wedge \beta_i - \beta_{n-1} \wedge \beta_n,$$

$$\ldots, \gamma \wedge \beta_2 + \alpha_{2p} \wedge \beta_1 - \beta_3 \wedge \beta_{2p} + \beta_4 \wedge \beta_{2p-1} + \ldots + (-1)^{(p-2)} \beta_{p-2} \wedge \beta_{p-1}\}.$$

Do đó $dimker\left\{I, \left(\left(V \oplus \gamma \oplus W\right) \wedge W\right) \setminus \left(\wedge^2 W\right)\right\} = p.$

(ii) Nếu n lẻ, $n=2p+1$: $ker\left\{I, \left(\left(V \oplus \gamma \oplus W\right) \wedge W\right) \setminus \left(\wedge^2 W\right)\right\}$

$$= span\{\gamma \wedge \beta_n + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_{i+1} \wedge \beta_i, \gamma \wedge \beta_{n-2} + \sum_{i=1}^{n-3} \alpha_{i+3} \wedge \beta_i + \beta_n \wedge \beta_{n-1},$$

$$\ldots, \gamma \wedge \beta_3 + \alpha_{2p} \wedge \beta_1 + \alpha_{2p+1} \wedge \beta_2 - \beta_4 \wedge \beta_{2p+1} + \beta_5 \wedge \beta_{2p} - \ldots + (-1)^{p+3} \beta_{p+2} \wedge \beta_{p+3},$$

$$\gamma \wedge \beta_1 - \beta_2 \wedge \beta_{2p+1} + \beta_3 \wedge \beta_{2p} - \beta_4 \wedge \beta_{2p-1} + \ldots + (-1)^{p-1} \beta_{p-2} \wedge \beta_{p-1}\}.$$

Do đó $dimker\left\{I, \left(\left(V \oplus \gamma \oplus W\right) \wedge W\right) \setminus \left(\wedge^2 W\right)\right\} = p+1$. Nói chung cả hai trường hợp của n ta đều nhận đươc $dimker\left\{I, \left(\left(V \oplus \gamma \oplus W\right) \wedge W\right) \setminus \left(\wedge^2 W\right)\right\} = \left[\frac{n+1}{2}\right]$.

(7) Trên $\gamma \wedge V$, $\left\{I, \gamma \wedge \alpha_i\right\} = -\beta \wedge \beta_n \wedge \alpha_i + \beta \wedge \gamma \wedge \alpha_{i+1}$ với $i = \overline{1, n-1}$ và $\left\{I, \gamma \wedge \alpha_n\right\} = -\beta \wedge \beta_n \wedge \alpha_n$ nên $\left\{I, \gamma \wedge V\right\} \subset \left(\beta \wedge \beta_n \wedge V\right) \oplus \left(\beta \wedge \gamma \wedge V\right)$. Giả sử

$$\omega = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \gamma \wedge \alpha_i + b.\gamma \wedge \alpha_n \in \ker\left\{I, \gamma \wedge V\right\}.$$

Ta có $\left\{I,\omega\right\} = \sum_{i=1}^{n-1} a_i\left(\beta\wedge\beta_n\wedge\alpha_i + \beta\wedge\gamma\wedge\alpha_{i+1}\right) - b.\beta\wedge\beta_n\wedge\alpha_n = 0$. Do đó $b = 0$ dẫn đến $a_i = 0$. Vì vậy $ker\left\{I,\gamma\wedge V\right\} = \left\{0\right\}$.

(8) Trên $\left\langle\alpha\wedge\beta\right\rangle$, ta có $\left\{I,\alpha\wedge\beta\right\} = \beta\wedge\left(\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_{i+1}\wedge\beta_i\right) \in \left\{I,\left(V\wedge W\right)\right\}$. Đồng thời, ta tính được $\left\{I,\alpha\wedge\beta - \sum_{i=1}^{n}(n+1-i)\alpha_i\wedge\beta_i\right\} = 0$ nên

$$\alpha\wedge\beta - \sum_{i=1}^{n}(n+1-i)\alpha_i\wedge\beta_i \in ker\left\{I,.\right\}.$$

Từ đó ta có kết quả như sau:

$$Z^2\left(\mathfrak{j}_{2n}\right) = \beta\wedge(V\oplus W)\oplus\left\langle\beta\wedge\gamma\right\rangle\oplus ker\left\{I,\wedge^2\left(W\right)\right\}$$
$$\oplus\left(\left(V\oplus\gamma\oplus W\right)\wedge W\right)\setminus\left(\wedge^2 W\right)\oplus\left\langle\alpha\wedge\beta - \sum_{i=1}^{n}(n+1-i)\alpha_i\wedge\beta_i\right\rangle.$$

Do đó $dimZ^2\left(\mathfrak{j}_{2n}\right) = 2n + \left[\frac{n}{2}\right] + + \left[\frac{n+1}{2}\right] + 2$ và $b_2\left(\mathfrak{j}_{2n+1}\right) = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n+1}{2}\right] + 1.$

❖ ***Tuyên bố về quyền lợi:*** *Các tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Bordemann, M. (1997). Nondegenerate invariant bilinear forms on nonassociative algebras. *Acta. Math. Uni. Comenianac, 66*(2), 151-201.

Duong, M. T., Pinczon, G. & Ushirobira, R. (2012). A new invariant of quadratic Lie algebras. *Alg. and Rep. Theory, 15*(6), 1163-1203.

Favre, G., & Santharoubane, L. J. (1987). Symmetric, invariant, non-degenerate bilinear form on a Lie algebra. *J. Algebra, 105*, 451-464.

Figueroa-O'Farrill, J. M., & Stanciu, S. (1996). On the structure of symmetric self-dual Lie algebras. *J. Math. Phys, 37*, 4121-4134.

Kac, V. (1985). *Infinite-dimensional Lie algebras*. Cambrigde University Press, New York.

Medina, A., & Revoy, P. (1985). Algèbres de Lie et produit scalaire invariant. *Ann. Sci. Éc. Norm. Sup., 4ème sér. 18*, 553-561.

Pinczon, G., & Ushirobira, R. (2007). New Applications of Graded Lie Algebras to Lie Algebras, Generalized Lie Algebras, and Cohomology. *J. Lie Theory, 17*, 633-667.

Pouseele, H. (2005). On the cohomology of extensions by a Heisenberg Lie algebra. *Bull. Austral. Math. Soc., 71*, 459-470

Santharoubane, L. J. (1983). Cohomology of Heisenberg Lie algebras. *Proc. Amer. Math. Soc., 87*, 23-28.

THE SECOND BETTI NUMBER OF NILPOTENT JORDAN-TYPE LIE ALGEBRAS

Cao Tran Tu Hai[1], *Duong Minh Thanh*[2*]

[1]*Le Quy Don High School for the Gifted, Ninh Thuan Province*

[2]*Ho Chi Minh City Unversity of Education*

[*]*Corresponding author: Duong Minh Thanh – Email: thanhdm@hcmue.edu.vn*

Received: July 15, 2019; Revised: July 25, 2019; Accepted: August 15, 2019

ABSTRACT

In this paper, we calculate the second Betti number of nilpotent Jordan-type Lie algebras in Duong, Pinczon and Ushirobira (2012) through computing super-Poisson brackets on their algebra of multi – skew symmetric forms.

Keywords: Quadratic Lie algebras; Cohomology; super-Poisson bracket