TẠP CHÍ KHOA HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH
HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE
Tập 17, Số 9 (2020): 1565-1574
Vol. 17, No. 9 (2020): 1565-1574
ISSN: 1859-3100
Website: *http://journal.hcmue.edu.vn*

Bài báo nghiên cứu

MỘT LỚP CON CỦA CÁC ĐẠI SỐ LIE GIẢI ĐƯỢC 7-CHIỀU CÓ CĂN LŨY LINH 5-CHIỀU VÀ BIỂU DIỄN CỦA CHÚNG

***Nguyễn Thị Cẩm Tú*[1,2]**
[1]*Trường Đại học Cần Thơ, Việt Nam*
[2]*Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG TPHCM, Việt Nam*
Tác giả liên hệ: Nguyễn Thị Cẩm Tú – Email: camtu@ctu.edu.vn
Ngày nhận bài: 24-8-2020; ngày nhận bài sửa: 10-9-2020, ngày chấp nhận đăng: 21-9-2020

TÓM TẮT

Bài viết liên quan đến việc phân loại các đại số Lie giải được 7-chiều có căn lũy linh 5-chiều. Cụ thể, tất cả các đại số Lie thực giải được bất khả phân 7-chiều sẽ được xây dựng từ việc chọn trước cho nó một căn lũy linh là một đại số Lie lũy linh 5-chiều đã biết. Kết quả này góp phần vào việc giải quyết triệt để bài toán phân loại các đại số Lie giải được trong trường hợp 7-chiều, vốn vẫn chưa được phân loại đầy đủ. Hơn nữa, bài viết còn mô tả các biểu diễn phụ hợp và đối phụ hợp của lớp các đại số Lie này. Đây là hai biểu diễn quan trọng bậc nhất trong lí thuyết biểu diễn các đại số Lie. Qua đó, chúng ta có cái nhìn trực quan hơn về lớp đại số Lie vừa được xây dựng.

Từ khóa: đại số Lie; đại số Lie giải được; căn lũy linh; biểu diễn

1. Giới thiệu

Lí thuyết Lie được khai sinh từ công trình nghiên cứu của Marius Sophus Lie (1842-1899) vào những thập niên cuối của thế kỉ XIX. Và cho đến nay, một trong những bài toán cơ bản, sơ khai ban đầu của Lí thuyết Lie, đó là bài toán phân loại các đại số Lie (cũng như nhóm Lie), vẫn còn là bài toán mở. Theo Levi (1905) và Malcev (1945), mỗi đại số Lie hữu hạn chiều trên trường có đặc số 0 đều phân tích được thành tổng nửa trực tiếp của một đại số con nửa đơn với ideal giải được tối đại của nó. Do đó, việc phân loại các đại số Lie được quy về phân loại các đại số Lie nửa đơn và các đại số Lie giải được. Bài toán phân loại các đại số Lie nửa đơn đã được giải quyết triệt để bởi Cartan (1894) trên trường phức và bởi Gantmacher (1939) trên trường thực.

Riêng về bài toán phân loại các đại số Lie giải được (bao gồm cả lũy linh) thì phức tạp hơn và đến nay vẫn còn là bài toán mở. Các kết quả phân loại đầy đủ đã biết hầu như đều kết thúc ở số chiều tương đối thấp. Cụ thể, các đại số Lie lũy linh được phân loại nhiều

Cite this article as: Nguyen Thi Cam Tu (2020). A subclass of 7-dimensional solvable Lie algebras having 5-dimensional nilradicals and its representations. *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science, 17*(9), 1565-1574.

nhất đến 8-chiều (Safiulina, 1964; Tsagas, 1999), còn các đại số Lie giải được thì chỉ đến 6-chiều (Mubarakzyanov, 1963; Turkowski, 1990).

Như đã biết, mọi đại số Lie giải được $\mathcal{G}$ đều có duy nhất một căn lũy linh, được kí hiệu là $NR(\mathcal{G})$. Số chiều của nó phải thỏa mãn không nhỏ hơn một nửa số chiều của $\mathcal{G}$ (xem (1)). Do đó, nếu lấy $\mathcal{G}$ 7-chiều thì $\dim NR(\mathcal{G}) \geq 4$, tức là $\dim NR(\mathcal{G}) \in \{4, 5, 6, 7\}$. Trong đó, các trường hợp căn lũy linh là 4, 6 và 7-chiều đã được phân loại (Parry, 2007; Parry, 2007; Hindeleh, & Thompson, 2008). Cho nên, bài viết này sẽ xem xét phân loại các đại số Lie giải được 7-chiều với căn lũy linh là trường hợp còn lại, tức căn lũy linh 5-chiều.

Cụ thể, bài viết xây dựng tất cả các đại số Lie thực giải được bất khả phân 7-chiều từ việc chọn trước cho nó căn lũy linh là một trong số các đại số Lie lũy linh 5-chiều được phân loại bởi Dixmier (1958).

Bài viết gồm năm phần: phần giới thiệu, phần xây dựng bài toán và cách thức tiến hành phân loại. Kết quả chính của bài viết sẽ được thành lập trong phần 3, phần 4 mô tả các biểu diễn phụ hợp và đối phụ hợp, cuối cùng là nhận xét kết luận.

2. Xây dựng bài toán

2.1. Các khái niệm cơ bản

Trước hết, ta nhắc lại một vài khái niệm cơ bản và kết quả đã biết đối với các đại số Lie giải được.

- *Dãy dẫn xuất (DS)* của đại số Lie $\mathcal{G}$ là

  $\mathcal{G}^0 \coloneqq \mathcal{G} \supset \mathcal{G}^1 \coloneqq [\mathcal{G},\mathcal{G}] \supset \cdots \supset \mathcal{G}^k \coloneqq [\mathcal{G}^{k-1},\mathcal{G}^{k-1}] \supset \cdots.$

  Đại số Lie $\mathcal{G}$ được gọi là *giải được* nếu dãy *DS* dừng, tức là tồn tại số tự nhiên k sao cho $\mathcal{G}^k = 0$.

- *Dãy tâm dưới (LS)* của đại số Lie $\mathcal{G}$ là

  $\mathcal{G}_0 \coloneqq \mathcal{G} \supset \mathcal{G}_1 \coloneqq [\mathcal{G},\mathcal{G}] \supset \cdots \supset \mathcal{G}_k \coloneqq [\mathcal{G},\mathcal{G}_{k-1}] \supset \cdots.$

  Đại số Lie $\mathcal{G}$ được gọi là *lũy linh* nếu dãy *LS* dừng, tức là tồn tại số tự nhiên k sao cho $\mathcal{G}_k = 0$.

- *Căn lũy linh* của đại số Lie giải được $\mathcal{G}$, được lí hiệu là $NR(\mathcal{G})$, là ideal lũy linh lớn nhất của $\mathcal{G}$. Căn lũy linh là duy nhất và số chiều của nó, theo Mubarakzyanov (1966), phải thỏa mãn

$$\dim NR(\mathcal{G}) \geq \frac{1}{2}\dim\mathcal{G}. \qquad (1)$$

- Một đại số Lie được gọi là *bất khả phân* nếu không thể phân tích thành tổng trực tiếp của hai đại số con thật sự.

- Phần tử N của đại số Lie $\mathcal{G}$ là lũy linh trong $\mathcal{G}$ nếu

  $\big[\ldots\big[[X,N],N\big]\ldots N\big] = 0 \quad \forall X \in \mathcal{G}.$

- Tập các phần tử $\{X_i\}_{i=1,\ldots,n}$ của đại số Lie $\mathcal{G}$ là *độc lập tuyến tính lũy linh* nếu không có tổ hợp tuyến tính không tầm thường nào của chúng lũy linh trong $\mathcal{G}$.

- Tập các ma trận $\{A_i\}_{i=1,\dots,n}$ là *độc lập tuyến tính lũy linh* nếu không có tổ hợp tuyến tính không tầm thường nào của chúng là ma trận lũy linh.

2.2. Thành lập bài toán và cách thức tiến hành phân loại

Giả sử cho trước một đại số Lie lũy linh 5-chiều $\mathfrak{n}$, có cơ sở là $\{X_i\}_{i=1,\dots,5}$. Dĩ nhiên, cấu trúc Lie của $\mathfrak{n}$, hay nói cách khác, các móc Lie $[X_i, X_j]$ hoàn toàn được xác định với mọi $1 \le i, j \le 5$. Ta sẽ mở rộng $\mathfrak{n}$ để có được đại số Lie giải được bất khả phân 7-chiều $\mathcal{G}$ nhận $\mathfrak{n}$ làm căn lũy linh. Cụ thể, ta mở rộng bằng cách bổ sung thêm 2 phần tử $\{X, Y\}$ độc lập tuyến tính lũy linh. Lúc này, cần xác định các móc Lie

$[X, Y]$, $[X, X_i]$, $[Y, X_i]$ với $i = 1, \dots, 5$.

Do $\mathcal{G}$ giải được nên đại số dẫn xuất $[\mathcal{G}, \mathcal{G}]$ nằm trong căn lũy linh $\mathfrak{n}$ của $\mathcal{G}$. Vì vậy, ta có thể giả sử

$$[X, Y] = \sum_{j=1}^{5} \sigma_j X_j, \quad [X, X_i] = \sum_{j=1}^{5} a_{ij} X_j, \quad [Y, X_i] = \sum_{j=1}^{5} b_{ij} X_j \quad \text{với } i = 1, \dots, 5.$$

Gọi σ_i (với $i = 1, \dots, 5$) là các *hằng số cấu trúc*. Đặt $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ và gọi là các *ma trận cấu trúc*. Bài toán phân loại các đại số Lie $\mathcal{G}$ lúc này được quy về phân loại cặp ma trận cấu trúc A, B và các hằng số cấu trúc σ_i. Trong quá trình phân loại, ta áp đặt hai điều kiện cần dưới đây:

(1) Các đồng nhất thức Jacobi đối với 25 bộ ba

(X, X_i, X_j), (Y, X_i, X_j), (X, Y, X_k) với mọi $1 \le i < j \le 5, 1 \le k \le 5$;

(2) Tập hai phần tử $\{X, Y\}$ độc lập tuyến tính lũy linh. Điều này tương đương với tập hai ma trận cấu trúc $\{A, B\}$ độc lập tuyến tính lũy linh.

Cuối cùng, ta sử dụng kĩ thuật đổi cơ sở thích hợp nhằm đơn giản hoá cấu trúc Lie đang xét.

Mục 3 dưới đây sẽ tính toán cụ thể đối với trường hợp căn lũy linh là đại số Lie lũy linh 5-chiều $\mathfrak{g}_{5,3}$, đây là một trong chín đại số Lie lũy linh 5-chiều được phân loại bởi Dixmier (1958) như đã giới thiệu ở Mục 1.

3. Các đại số Lie thực giải được bất khả phân 7-chiều với căn lũy linh $\mathfrak{g}_{5,3}$

Đại số Lie $\mathfrak{g}_{5,3}$ có một cơ sở $\{X_i\}_{i=1,\dots,5}$ với các móc Lie không tầm thường là

$$[X_1, X_2] = X_4, \ [X_1, X_4] = [X_2, X_3] = X_5. \tag{2}$$

Trước hết, ta áp dụng đồng nhất thức Jacobi cho 20 bộ ba (X, X_i, X_j) và (Y, X_i, X_j), $1 \le i < j \le 5$, thì cặp ma trận (A, B) được quy về

$$\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{13} + a_{45} & a_{25} \\ 0 & 0 & 2a_{11} & -a_{12} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{11} + a_{22} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a_{11} + a_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{13} + b_{45} & b_{25} \\ 0 & 0 & 2b_{11} & -b_{12} & b_{35} \\ 0 & 0 & 0 & b_{11} + b_{22} & b_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2b_{11} + b_{22} \end{bmatrix} \right).$$

Thực hiện phép đổi cơ sở

$X := X - a_{45}X_1 - a_{35}X_2 + a_{25}X_3 + a_{15}X_4;$

$Y := Y - b_{45}X_1 - b_{35}X_2 + b_{25}X_3 + b_{15}X_4,$

thì móc Lie $[X, Y]$ không đổi về dạng, còn cặp ma trận (A, B) tiếp tục được đơn giản thành

$$\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}+a_{35} & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 2a_{11} & -a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{11}+a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a_{11}+a_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14}+b_{35} & 0 \\ 0 & b_{22} & b_{23} & b_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 2b_{11} & -b_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{11}+b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2b_{11}+b_{22} \end{bmatrix}\right)$$

hay ta lí hiệu lại như sau

$$\left(\begin{bmatrix} a & c & d & e & \\ & b & f & d & \\ & & 2a & -c & \\ & & & a+b & \\ & & & & 2a+b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u & w & p & q & \\ & v & r & p & \\ & & 2u & -w & \\ & & & u+v & \\ & & & & 2u+v \end{bmatrix}\right).$$

Tiếp tục áp dụng đồng nhất thức Jacobi cho 5 bộ ba (X, Y, X_i), $1 \leq i \leq 5$, ta được

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = 0 \\ (a-b)w = (u-v)c \\ (2a-b)r = (2u-v)f \\ ap + wf = cr + du \\ 2cp + ev = 2dw + bq. \end{cases} \tag{3}$$

Điều kiện để $\{A, B\}$ độc lập tuyến tính lũy linh là

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} a & u \\ b & v \end{bmatrix} = 2. \tag{4}$$

Ta lại thực hiện đổi cơ sở

$X := X + \gamma X_5, \quad Y := Y + \delta X_5$

thì chỉ thay đổi móc Lie $[X, Y]$ như dưới đây

$[X, Y] = [\sigma_5 + \delta(2a + b) - \gamma(2u + v)]X_5.$

Do điều kiện (4) nên $(2a + b)^2 + (2u + v)^2 \neq 0$, nghĩa là ta luôn chọn được γ, δ thích hợp để làm triệt tiêu hằng số cấu trúc σ_5, nói cách khác, móc Lie $[X, Y] = 0$.

Đến đây, trước khi tiếp tục việc đơn giản hóa cặp ma trận cấu trúc, ta sẽ chia bài toán thành ba trường hợp dựa vào dạng của các ma trận cấu trúc như sau

- Cả A và B đều có dạng chéo;
- Chỉ A hoặc B có dạng chéo;
- Cả A và B đều không có dạng chéo.

3.1. Cả A và B đều có dạng chéo

Trong trường hợp này, hệ phương trình (3) luôn đúng. Mặt khác, do điều kiện (4) nên $a^2 + u^2 \neq 0$. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $a \neq 0$. Thực hiện phép đổi cơ sở

$$X \coloneqq \frac{1}{a}X, \quad Y \coloneqq Y - \frac{u}{a}X$$

thì chỉ cặp ma trận (A, B) thay đổi và có dạng như sau

$$(\text{diag}(1, x, 2, 1+x, 2+x), \ \text{diag}(0, y, 0, y, y)) \quad \text{với } x \in \mathbb{R}; y \neq 0.$$

Ta thực hiện thêm một phép đổi cơ sở nữa

$$X \coloneqq X - \frac{x}{y}Y, \ Y \coloneqq \frac{1}{y}Y$$

thì thu được đại số Lie có các ma trận cấu trúc A, B và móc Lie $[X, Y]$ như sau

$$\begin{cases} A = \text{diag}(1,0,2,1,2) \\ B = \text{diag}(0,1,0,1,1) \\ \quad [X, Y] = 0. \end{cases}$$

3.2. *Chỉ A hoặc B có dạng chéo*

Không mất tính tổng quát, ta giả sử A chéo và B không chéo. Lúc này, hệ phương trình (3) trở thành

$$\begin{cases} (a-b)w = 0 \\ (2a-b)r = 0 \\ \quad ap = 0 \\ \quad bq = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Nhằm làm triệt tiêu các phần tử nằm ngoài đường chéo của ma trận cấu trúc B, ta thực hiện phép đổi cơ sở trong nội bộ căn lũy linh $\mathfrak{g}_{5,3}$, lí hiệu phép biến đổi này bởi (G), sao cho các móc Lie ở (2) không thay đổi. Cụ thể, ta đặt

$$N' \coloneqq GN \quad \text{với} \begin{cases} N = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_5 \end{bmatrix}^T; N' = \begin{bmatrix} X_1' & X_2' & X_3' & X_4' & X_5' \end{bmatrix}^T \\ G = \begin{bmatrix} 1 & g_1 & g_2 & g_3 & \\ & 1 & g_4 & g_2 & \\ & & 1 & -g_1 & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} (g_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, 4;\ g_1 g_4 = 0) \end{cases}$$

thì cặp ma trận (A, B) biến đổi thành (GAG^{-1}, GBG^{-1}). Ta sẽ xét hai trường hợp con.

3.2.1. *Trường hợp $w \neq 0$*

Hệ phương trình (5) kéo theo $a = b$ và $p = q = r = 0$. Thực hiện phép biến đổi (G) với $g_2 = g_3 = g_4 = 0$ thì A không đổi, còn B chỉ thay đổi w thành $w' = w + (v-u)g_1$. Nếu $v \neq u$ thì chọn $g_1 = \frac{-w}{v-u}$, B được quy về dạng chéo. Ngược lại, $v = u$, mâu thuẫn điều kiện (4).

3.2.2. *Trường hợp $w = 0$*

Thực hiện phép biến đổi (G) với $g_1 = 0$ thì (A, B) được quy về

$$\left(\begin{bmatrix} a & & ag_2 & bg_3 & \\ & b & (2a-b)g_4 & ag_2 & \\ & & 2a & & \\ & & & a+b & \\ & & & & 2a+b \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u & & p' & q' & \\ & v & r' & p' & \\ & & 2u & & \\ & & & u+v & \\ & & & & 2u+v \end{bmatrix}\right).$$

trong đó

$$\begin{aligned} p' &= p + ug_2 \\ q' &= q + vg_3 \\ r' &= r + (2u-v)g_4. \end{aligned}$$

Do điều kiện (4) nên $u^2 + v^2 \neq 0$, tức là ta chỉ có các khả năng dưới đây của u, v

$u = 0,\ v \neq 0 \quad (a)$

$u \neq 0,\ v = 0 \quad (b)$

$2u = v \neq 0 \quad (c)$

$2u \neq v \neq 0 \quad (d)$

- Với (a), ta chọn $g_2 = 0$, $g_3 = \frac{-q}{v}$ và $g_4 = \frac{r}{v}$ thì

$$B = \begin{bmatrix} 0 & & p & & \\ & v & & p & \\ & & 0 & & \\ & & & v & \\ & & & & v \end{bmatrix}.$$

Mặt khác, ta có

$$u = 0 \xrightarrow{(4)} a \neq 0 \xrightarrow{(5)} p = 0$$

hay B là ma trận chéo.

- Với (b), ta chọn $g_2 = \frac{-p}{u}$, $g_3 = 0$ và $g_4 = \frac{-r}{2u}$ thì

$$B = \begin{bmatrix} u & & & q & \\ & 0 & & & \\ & & 2u & & \\ & & & u & \\ & & & & 2u \end{bmatrix}.$$

Mặt khác, ta có

$$v = 0 \xrightarrow{(4)} b \neq 0 \xrightarrow{(5)} q = 0$$

hay B cũng là ma trận chéo.

- Với (c), ta chọn $g_2 = \frac{-p}{u}$, $g_3 = \frac{-q}{v}$ và $g_4 = 0$ thì

$$B = \begin{bmatrix} u & & & & \\ & 2u & r & & \\ & & 2u & & \\ & & & 3u & \\ & & & & 4u \end{bmatrix}.$$

Nếu $r = 0$ thì B chéo. Ngược lại, từ hệ phương trình (5) dẫn đến $2a = b$, mâu thuẫn điều kiện (4).

- Với (d), chọn $g_2 = \frac{-p}{u}$, $g_3 = \frac{-q}{v}$, $g_4 = \frac{-r}{2u-v}$ thì B luôn được quy về ma trận chéo.

Phép biến đổi (G) trong cả (a), (b), (c) và (d) luôn đảm bảo ma trận A không thay đổi do hệ phương trình (5). Như vậy, trường hợp **3.2** này được quy về trường hợp **3.1**.

3.3. Cả A và B đều không có dạng chéo

3.3.1. Trường hợp $w = 0$

Sử dụng kết quả của B sau khi thực hiện phép biến đổi (G) (xem trường hợp con *3.2.2* của trường hợp **3.2**), thì với khả năng (d), B luôn được quy về dạng chéo, còn lại thì

- Với (a), từ hệ phương trình (3) ta có $ap = 0$. Mà $u = 0$ nên kết hợp điều kiện (4) thì $a \neq 0$ hay $p = 0$. Vậy, B được quy về dạng chéo.
- Với (b), từ hệ phương trình (3) ta có $bq = 0$. Mà $v = 0$ nên kết hợp điều kiện (4) thì $b \neq 0$ hay $q = 0$. Vậy, B được quy về dạng chéo.
- Với (c), từ hệ phương trình (3) ta có $(2a - b)r = 0$. Mà $2u = v$ nên kết hợp điều kiện (4) thì $2a - b \neq 0$ hay $r = 0$. Vậy, B cũng được quy về dạng chéo.

3.3.2. Trường hợp $w \neq 0$

Trước hết nhận thấy, nếu $c = 0$ thì làm tương tự như đối với B, ta luôn quy được A về dạng chéo. Do đó, ta chỉ xét $cw \neq 0$. Lúc này, nếu $u - v = 0$ thì hệ phương trình (3) kéo theo $a - b = 0$. Điều này mâu thuẫn điều kiện (4). Vậy $u - v$ phải khác 0. Thực hiện phép biến đổi (G) với $g_2 = g_3 = g_4 = 0$, ta luôn chọn được g_1 thích hợp để quy w về 0, và trở lại trường hợp con *3.3.1* vừa xét ở trên.

Tóm lại, trường hợp **3.3** này lại được quy về trường hợp **3.2**. Như vậy, chỉ có một đại số Lie thực giải được bất khả phân 7-chiều có căn lũy linh là $\mathfrak{g}_{5,3}$ được xây dựng ở trường hợp **3.1**.

Tất cả những tính toán ở trên đã chứng minh một cách chi tiết cho định lí được phát biểu bên dưới. Đây cũng là kết quả chính mà bài viết muốn đề cập đến.

Định lí 1.

Cho $\mathcal{G}$ là một đại số Lie thực giải được 7-chiều sao cho căn lũy linh của nó là đại số Lie lũy linh 5-chiều $\mathfrak{g}_{5,3}$. Khi đó, nếu $\mathcal{G}$ bất khả phân thì $\mathcal{G}$ phải đẳng cấu với đại số Lie $\mathcal{L} = \operatorname{span}\{X_i\}_{i=1,\dots,7}$ với các móc Lie không tầm thường là

$[X_1,X_2]=X_4,\quad [X_1,X_4]=X_5,\quad [X_2,X_3]=X_5,$
$[X_6,X_1]=X_1,\quad [X_6,X_3]=2X_3,\quad [X_6,X_4]=X_4,\quad [X_6,X_5]=2X_5,$
$[X_7,X_2]=X_2,\quad [X_7,X_4]=X_4,\quad [X_7,X_5]=X_5.$

4. Biểu diễn phụ hợp và đối phụ hợp

Như đã biết, biểu diễn phụ hợp và đối phụ hợp là hai biểu diễn quan trọng bậc nhất trong lí thuyết biểu diễn đại số Lie. Mục 4 này sẽ mô tả tường minh các biểu diễn này của đại số Lie $\mathcal{L}$, cụ thể là mô tả biểu diễn phụ hợp của $\mathcal{L}$ trên chính nó và biểu diễn đối phụ hợp của $\mathcal{L}$ trên không gian đối ngẫu $\mathcal{L}^*$ của nó. Ở đây, $\mathcal{L}$ chính là đại số Lie duy nhất đã được xây dựng ở Mục 3.

4.1. Biểu diễn phụ hợp của $\mathcal{L}$

Biểu diễn phụ hợp của $\mathcal{L}$ là đồng cấu đại số Lie $\mathrm{ad}:\mathcal{L}\to \mathrm{gl}(\mathcal{L})$, $g\mapsto \mathrm{ad}g$ với $\mathrm{ad}g$ được xác định như sau

$\mathrm{ad}g(h)=[g,h]$ với mọi $h\in\mathcal{L}$.

Nhân của biểu diễn phụ hợp bằng với tâm của $\mathcal{L}$, lí hiệu bởi $Z(\mathcal{L})$. Hơn nữa, dễ dàng tính được $Z(\mathcal{L})=0$. Vì vậy, biểu diễn phụ hợp của $\mathcal{L}$ là một biểu diễn trung thành.

Lấy $g\in\mathcal{L}$, giả sử $g=\sum_{i=1}^{7}x_iX_i$ $(x_i\in\mathbb{R})$. Ta tính ảnh của cơ sở $C=\{X_i\}_{i=1,\dots,7}$ qua đồng cấu $\mathrm{ad}g$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{ad}g(X_1)&=[g,X_1]=-x_2X_4-x_4X_5+x_6X_1\\
\mathrm{ad}g(X_2)&=[g,X_2]=x_1X_4-x_3X_5+x_7X_2\\
\mathrm{ad}g(X_3)&=[g,X_3]=x_2X_5+2x_6X_3\\
\mathrm{ad}g(X_4)&=[g,X_4]=x_1X_5+(x_6+x_7)X_4\\
\mathrm{ad}g(X_5)&=[g,X_5]=(2x_6+x_7)X_5\\
\mathrm{ad}g(X_6)&=[g,X_6]=-x_1X_1-2x_3X_3-x_4X_4-2x_5X_5\\
\mathrm{ad}g(X_7)&=[g,X_7]=-x_2X_2-x_4X_4-x_5X_5.
\end{aligned}$$

Đồng nhất $\mathrm{ad}g$ với ma trận biểu diễn của nó ứng với cơ sở C, khi đó ta được

$$\mathcal{L}\cong\left\{\begin{bmatrix}
x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_1 & 0\\
0 & x_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & -x_2\\
0 & 0 & 2x_6 & 0 & 0 & -2x_3 & 0\\
-x_2 & x_1 & 0 & x_6+x_7 & 0 & -x_4 & -x_4\\
-x_4 & -x_3 & x_2 & x_1 & 2x_6+x_7 & -2x_5 & -x_5\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix} : x_1,\dots,x_7\in\mathbb{R}\right\}.$$

4.2. Biểu diễn đối phụ hợp của $\mathcal{L}$

Lấy đối ngẫu và đảo dấu của biểu diễn phụ hợp ta được biểu diễn đối phụ hợp ad^* của $\mathcal{L}$ trên không gian đối ngẫu $\mathcal{L}^*$. Cụ thể, biểu diễn đối phụ hợp được mô tả như sau

$$
\begin{array}{llllllll}
\mathrm{ad}^*: & \mathcal{L} & \longrightarrow & \mathrm{gl}(\mathcal{L}^*) & & & & \\
& g & \longmapsto & \mathrm{ad}^* g: & \mathcal{L}^* & \longrightarrow & \mathcal{L}^* & \\
& & & & f & \longmapsto & \mathrm{ad}^* g(f): \mathcal{L} \longrightarrow & \mathbb{R} \\
& & & & & & \quad h \longmapsto & \langle \mathrm{ad}^* g(f), h\rangle = \langle f, -\mathrm{ad}g(h)\rangle.
\end{array}
$$

Ta dễ dàng tính được $\ker(\mathrm{ad}^*) = Z(\mathcal{L})$, nên biểu diễn đối phụ hợp của $\mathcal{L}$ cũng là một biểu diễn trung thành.

Lấy $g \in \mathcal{L}$, giả sử $g = \sum_{i=1}^{7} x_i X_i$ $(x_i \in \mathbb{R})$. Chọn cơ sở đối ngẫu $C^* = \{X_i^*\}_{i=1,\dots,7}$ cho $\mathcal{L}^*$. Đồng nhất $\mathrm{ad}^* g$ với ma trận biểu diễn của nó ứng với cơ sở C^*. Khi đó, ta có $\mathrm{ad}^* g = -(\mathrm{ad}g)^T$, hay ta có

$$
\mathcal{L} \cong \left\{ \begin{bmatrix}
-x_6 & 0 & 0 & x_2 & x_4 & 0 & 0 \\
0 & -x_7 & 0 & -x_1 & x_3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -2x_6 & 0 & -x_2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -(x_6 + x_7) & -x_1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -(2x_6 + x_7) & 0 & 0 \\
x_1 & 0 & 2x_3 & x_4 & 2x_5 & 0 & 0 \\
0 & x_2 & 0 & x_4 & x_5 & 0 & 0
\end{bmatrix} : x_1, \dots, x_7 \in \mathbb{R} \right\}.
$$

5. Kết luận

Bài viết đã xây dựng được một lớp con của lớp các đại số Lie thực giải được 7-chiều với căn lũy linh 5-chiều. Lớp con này có căn lũy linh $\mathfrak{g}_{5,3}$ và thực chất chỉ gồm một đại số Lie bất khả phân duy nhất, sai khác nhau một đẳng cấu, được phát biểu trong Định lí 1. Với cách thức tương tự, nhưng thay căn lũy linh $\mathfrak{g}_{5,3}$ lần lượt bởi các đại số Lie lũy linh 5-chiều còn lại trong kết quả phân loại của Dixmier (1958), ta có thể thiết lập tất cả các đại số Lie thực giải được 7-chiều với căn lũy linh 5-chiều. Và khi đó, lớp đại số Lie thực giải được 7-chiều xem như được phân loại hoàn toàn. Vấn đề này sẽ được xem xét ở các nghiên cứu tiếp theo.

❖ ***Tuyên bố về quyền lợi:*** *Tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Cartan, E. (1894). Sur la structure des groupes de transformations finis et continus. *Thèse*. Nony, Paris.

Dixmier, J. (1958). Sur les represéntations unitaires des groupes de Lie nilpotents III. *Canad. J. Math*, 321-348.

Hindeleh, & Thompson (2008). Seven dimensional Lie algebras with a fourdimensional nilradical. *Algebras, Groups, and Geometries*, 243-265.

Gantmacher, F. R. (1939). On the classification of real simple Lie groups. *Sb. Math*, 217-250.

Gong, M. P. (1998). *Classification of Nilpotent Lie algebras of Dimension 7* (Over Algebraically Closed Fields and R). PhD. Thesis. University of Waterloo, Ontario, Canada.

Levi, E. E. (1905). Sulla struttura dei gruppi finiti e continui. *Atti Accad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Natur*, 551-565.

Malcev, A. I. (1945). On solvable Lie algebras. *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat*, 329-356.

Mubarakzyanov, G. (1963). Classification of solvable Lie algebras of dimension 6 with one nonnilpotent basis element. *Izv. Vyssh Uchebn. Zaved. Mat*, 104-116.

Mubarakzyanov, G. (1966). Some theorems on solvable Lie algebras. *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat*, 95-98.

Parry, A. R. (2007). A classification of real indecomposable solvable Lie algebras of small dimension with codimension one nilradicals. *Master Thesis*. Utah State University, Logan, Utah.

Safiulina, E. (1964). Classification of nilpotent Lie algebras of dimension seven. *Math. Methods Phys. Izd. Kazan. Univ*, 66-69.

Tsagas, G. (1999). Classification of nilpotent Lie algebras of dimension eight. *J. Inst. Math. Comput. Sci. Math. Ser*, 179-183.

Turkowski, R. (1990). Solvable Lie algebras of dimension six. *J. Math. Phys*, 1344-1350.

A SUBCLASS OF 7-DIMENSIONAL SOLVABLE LIE ALGEBRAS HAVING 5-DIMENSIONAL NILRADICALS AND ITS REPRESENTATIONS

***Nguyen Thi Cam Tu*[1,2]**

[1]*Can Tho University, Vietnam*

[2]*University of Science, Vietnam National University Ho Chi Minh City, Vietnam*

[*]*Corresponding author: Nguyen Thi Cam Tu – Email: camtu@ctu.edu.vn*

Received: August 24, 2020; Revised: September 10, 2020; Accepted: September 21, 2020

ABSTRACT

The paper is to classify seven-dimensional solvable Lie algebras that have the five-dimensional nilpotent Lie algebras as their nilradical. All seven-dimensional indecomposable solvable Lie algebras with a given nilradical are constructed. This result contributes to the complete classification of the class of seven-dimensional real solvable Lie algebras which are presently unsolved. Moreover, the adjoint and co-adjoint representations of these algebras are also described in this paper. These are two extremely important representations in the representation theory of Lie algebras. As a consequence, a clearer understanding of the newly constructed Lie algebras is formed.

Keywords: Lie algebras; Solvable Lie algebras; Nilradical; Representation