TẠP CHÍ KHOA HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE

Tập 17, Số 9 (2020): 1556-1564

Vol. 17, No. 9 (2020): 1556-1564

ISSN: 1859-3100

Website: *http://journal.hcmue.edu.vn*

Bài báo nghiên cứu

NGHIÊN CỨU ĐIỀU KIỆN TỒN TẠI NGHIỆM BIÊN CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH

Nguyễn Việt Khoa

Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

[*]Tác giả liên hệ: Nguyễn Việt Khoa – Email: khoanvi@hcmue.edu.vn

Ngày nhận bài: 03-5-2020; ngày nhận bài sửa: 04-6-2020, ngày chấp nhận đăng: 18-9-2020

TÓM TẮT

Trong nghiên cứu trước đây, chúng tôi đã xét bài toán tìm nghiệm ổn định tiệm cận của hệ phương trình tuyến tính trong trường hợp phổ của toán tử tuyến tính đã cho là ổn định (Nguyen, 2013; Konyaev, & Nguyen, 2014). Trong bài báo này, chúng tôi xây dựng nghiệm của bài toán biên của hệ phương trình vi phân tuyến tính không ô-tô-nôm

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), (t \geq 0) \tag{1}$$

thỏa mãn điều kiện ban đầu

$$\sum_{j=1}^{m} F_j x(t_j) = \alpha \text{ với } 0 = t_1 < t_2 < \cdots t_m = 1 \tag{2}$$

trong trường hợp phổ của toán tử tuyến tính đã cho là không ổn định. Thực tế bài toán biên với phổ của toán tử tuyến tính đã cho không ổn định là một bài toán khó hơn. Từ kết quả của công thức nghiệm tìm được, ta có thể áp dụng để giải hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất tương đương với hệ phương trình (1) đã cho.

Ngoài ra, bằng cách tiếp cận kết quả của (Nguyen, 2013), chúng tôi đã giải được nghiệm của bài toán biên có hệ số khuếch tán bị nhiễu

$$\varepsilon\dot{x} = \left(tA_0 + \varepsilon A_1(t)\right)x, (t \geq 0)$$

thỏa mãn điều kiện ban đầu

$$F_1 x(0) + F_2 x(1) = \alpha$$

và kết quả này được minh họa bằng ví dụ cụ thể.

Từ khóa: hệ phương trình vi phân tuyến tính; nghiệm biên; hàm ma trận; phổ của ma trận; cấu trúc nửa nguyên tố

1. Đặt vấn đề

Xét bài toán (1) – (2) với $x; f \in R^n; A(t); f(t) \in C[0; +\infty)$ và $F_j, (j = 1, \dots, m)$ là các ma trận hằng.

Cite this article as: Nguyen Viet Khoa (2020). On the existing conditions of boundary solutions of linear differential equations systems. *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science, 17*(9), 1556-1564.

Khi $m=1$, điều kiện (2) trở thành $F_1x(t_1)=\alpha$. Bài toán (1) - (2) lúc này là bài toán Cauchy (Konyaev, & Nguyen, 2014; Nguyen, 2017), vì thế bài toán tồn tại duy nhất nghiệm trên $[0;+\infty)$.

Khi $2\le m\le n$, nghiệm của bài toán biên (1), (2) không phải lúc nào cũng tồn tại. Vậy điều kiện nào để tồn tại duy nghiệm của bài toán này trên đoạn hữu hạn $[0;t_0]\subset R^+$ (với $t_0>1$).

2. Tồn tại duy nhất nghiệm của bài toán biên trên nửa trục $[0;+\infty)$.

Định nghĩa 2.1.

Ma trận $\Phi(t)$ được gọi là hàm ma trận của hệ phương trình tuyến tính (1) thuần nhất tương ứng $\left(f(t)\equiv 0\right)$, nếu $\dot{\Phi}(t)=A(t)\Phi(t)$.

Định lí 2.2.

Nếu bài toán (1) - (2) thỏa mãn điều kiện $\det F\neq 0$ (với $F=\sum_{j=1}^{m}F_j\Phi(t_j)$; $F_j\left(j=\overline{1,m}\right)$ là các ma trận vuông cấp n thỏa mãn (2), $\Phi(t)=\sum_{j=1}^{m}\Phi_j(t)$ và $\Phi_j(t)$ là hàm ma trận của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng $\left(f(t)\equiv 0\right)$, thì bài toán (1), (2) có nghiệm duy nhất trên $[0;t_0]$ với $(t_0>1)$ được cho dưới dạng:

$$x(t)=\Phi(t)C+\sum_{k=1}^{m}\Phi_k(t)\int_{t_k}^{t}\Phi^{-1}(s)f(s)ds \tag{3}$$

trong đó $$C=F^{-1}\left(\alpha-\sum_{j=1}^{m}F_j\sum_{k=1}^{m}\Phi_k(t_j)\int_{t_k}^{t_j}\Phi^{-1}(s)f(s)ds\right) \tag{4}$$

Chứng minh:

Do $\Phi_k(t)$, ($k=1,...,m$) là hàm ma trận của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng $\left(f(t)\equiv 0\right)$, (Lancaster, 1978), tức là $\dot{\Phi}_k(t)=A(t)\Phi_k(t)$ nên ta có $x=\Phi(t)C$ là nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng $\left(f(t)\equiv 0\right)$ của (1).

Thật vậy, ta có $\dot{x}=\dot{\Phi}(t)C=A(t)\Phi(t)C=A(t)x$.

Mặt khác, ta dễ dàng kiểm tra được rằng nghiệm riêng của phương trình tuyến tính không thuần nhất (1) được cho dưới dạng:

$$y(t)=\sum_{k=1}^{m}\Phi_k(t)\int_{t_k}^{t}\Phi^{-1}(s)f(s)ds$$

Ta có $\dot{y}(t)=\sum_{k=1}^{m}\dot{\Phi}_k(t)\int_{t_k}^{t}\Phi^{-1}(s)f(s)ds+\sum_{k=1}^{m}\Phi_k(t)\Phi^{-1}(t)f(t)$

Suy ra $\dot{y}(t)=\sum_{k=1}^{m}A(t)\Phi_k(t)\int_{t_k}^{t}\Phi^{-1}(s)f(s)ds+f(t)$

$$\dot{y}(t)=A(t)\sum_{k=1}^{m}\Phi_k(t)\int_{t_k}^{t}\Phi^{-1}(s)f(s)ds+f(t)=A(t)y(t)+f(t).$$

Từ đó, suy ra nghiệm tổng quát của phương trình (1) là

$$x=\Phi(t)C+y(t)=\Phi(t)C+\sum_{k=1}^{m}\Phi_k(t)\int_{t_k}^{t}\Phi^{-1}(s)f(s)ds.$$

Ngoài ra, ta cũng dễ dàng chứng minh được rằng nghiệm này thỏa mãn điều kiện biên (2). Thật vậy, ta có:

$$\sum_{j=1}^{m}F_jx(t_j)=\sum_{j=1}^{m}F_j\left[\Phi(t_j)C+\sum_{k=1}^{m}\Phi_k(t_j)\int_{t_k}^{t_j}\Phi^{-1}(s)f(s)ds\right]$$

$$=\sum_{j=1}^{m}F_j\Phi(t_j)C+\sum_{j=1}^{m}F_j\sum_{k=1}^{m}\Phi_k(t_j)\int_{t_k}^{t_j}\Phi^{-1}(s)f(s)ds$$

$$=FC+\sum_{j=1}^{m}F_j\sum_{k=1}^{m}\Phi_k(t_j)\int_{t_k}^{t_j}\Phi^{-1}(s)f(s)ds$$

$$=FC+\sum_{j=1}^{m}F_j\sum_{k=1}^{m}\Phi_k(t_j)\int_{t_k}^{t_j}\Phi^{-1}(s)f(s)ds=\alpha$$

$$\text{vì } C=F^{-1}\left(\alpha-\sum_{j=1}^{m}F_j\sum_{k=1}^{m}\Phi_k(t_j)\int_{t_k}^{t_j}\Phi^{-1}(s)f(s)ds\right).$$

Vậy định lí đã được chứng minh.

Hệ quả 2.3.

Giả sử ta biến đổi được hệ (1) tương đương với hệ phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất:

$$\dot{x}=B(t)x,\quad t\geq 0. \tag{5}$$

Trong đó, $\|A(t)-B(t)\|$ *đủ nhỏ trên đoạn* $[0;t_0]$. *Khi đó, nếu* $\det F_0\neq 0$ *(với* $F_0=\sum_{j=1}^{m}F_j\Psi(t_j)$*) và* $\Psi(t)=\sum_{k=1}^{m}\Psi_k(t)$ *là hàm ma trận của hệ (5) thì nghiệm của bài toán biên (1), (2) được cho bởi công thức:*

$$x(t)=\Psi(t)C+\sum_{k=1}^{m}\Psi_k(t)\int_{t_k}^{t}\Psi^{-1}(s)\left[\left(A(s)-B(s)\right)x+f(s)\right]ds$$

Trong đó, $C=F^{-1}\left(\alpha-\sum_{j=1}^{m}F_j\sum_{k=1}^{m}\Psi_k(t_j)\int_{t_k}^{t_j}\Psi^{-1}(s)\left[\left(A(s)-B(s)\right)x+f(s)\right]ds\right)$

Chứng minh:

Ta có $\dot{x}=A(t)x+f(t)=B(x)+A(t)x-B(x)+f(t)=B(x)+g(x,t)$, (6)

trong đó, $g(x,t)=A(x)-B(x)+f(t)$.

Ta chứng minh $x(t)=\Psi(t)C$ là nghiệm tổng quát của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất (6), (tức là ứng với $g(x,t)=0$). Thậy vậy, do $\Psi(t)=\sum_{k=1}^{m}\Psi_k(t)$ là hàm ma trận của hệ (5) nên $\dot{x}(t)=\dot{\Psi}(t)C=B(t)\Psi(t)C=B(t)x$.

Ngoài ra, nghiệm riêng của hệ phương trình tuyến tính không thuần nhất (6) được cho bởi công thức:

$$z(t)=\sum_{k=1}^{m}\Psi_k(t)\int_{t_k}^{t}\Psi^{-1}(s)g(x,s)ds$$

Thật vậy, ta có $\dot{z}(t)=\sum_{k=1}^{m}\dot{\Psi}_k(t)\int_{t_k}^{t}\Psi^{-1}(s)g(x,s)ds+\sum_{k=1}^{m}\Psi_k(t)\Psi^{-1}(t)g(x,t)$

$$\dot{z}(t)=\dot{\Psi}(t)\int_{t_k}^{t}\Psi^{-1}(s)g(x,s)ds+\Psi(t)\Psi^{-1}(t)g(x,t)$$

$$\dot{z}(t)=B(t)\Psi(t)\int_{t_k}^{t}\Psi^{-1}(s)g(x,s)ds+g(x,t)$$

$$\dot{z}(t)=B(t)\sum_{k=1}^{m}\Psi_k(t)\int_{t_k}^{t}\Psi^{-1}(s)g(x,s)ds+g(x,t)$$

$$\dot{z}(t)=B(t)z(t)+g(x,t).$$

Từ đó, ta nhận được nghiệm của bài toán biên (1) - (2) được cho bởi công thức:

$$x(t)=\Psi(t)C+\sum_{k=1}^{m}\Psi_k(t)\int_{t_k}^{t}\Psi^{-1}(s)\left[\left(A(s)-B(s)\right)x+f(s)\right]ds$$

Trong đó $C=F^{-1}\left(\alpha-\sum_{j=1}^{m}F_j\sum_{k=1}^{m}\Psi_k(t_j)\int_{t_k}^{t_j}\Psi^{-1}(s)\left[\left(A(s)-B(s)\right)x+f(s)\right]ds\right).$

Hệ quả 2.3 đã được chứng minh.

Nhận xét 2.4. Trong thực hành để giải hệ phương trình tuyến tính (1), ta xây dựng hệ (1) gần với hệ khác (5), trong đó chuẩn $\|A(t)-B(t)\|$ đủ nhỏ trên đoạn $[0;t_0]$. Mà ta đã biết $\Psi(t)=\sum_{k=1}^{m}\Psi_k(t)$ là hàm ma trận của hệ (5).

3. Tồn tại duy nhất nghiệm của bài toán biên có hệ số khuếch tán bị nhiễu tại điểm kì dị

Xét bài toán biên có hệ số khuếch tán bị nhiễu

$$\varepsilon\dot{x}=\left(tA_0+\varepsilon A_1(t)\right)x,\quad t\geq 0. \tag{7}$$

thỏa mãn điều kiện biên ban đầu:

$$F_1x(0)+F_2x(1)=\alpha. \tag{8}$$

Trong đó, $x(t)\in R^n$, $A_0, A_1(t)$ là các ma trận vuông cấp n, $A_1(t)$ là hàm ma trận, ε là tham số đủ nhỏ.

Định nghĩa 3.1.

Ma trận vuông A_0 được gọi là có cấu trúc nửa nguyên tố nếu như tồn tại ma trận không suy biến S_0 thỏa mãn $\Lambda_0=S_0^{-1}A_0S_0=diag\{\lambda_{01};\lambda_{02};...;\lambda_{0n}\}$.

Định lí 3.2.

Giả sử bài toán biên (7), (8) thỏa mãn các điều kiện:

(D1) Ma trận A_0 có cấu trúc nửa nguyên tố, nghĩa là tồn tại ma trận không suy biến S_0 thỏa mãn $\Lambda_0=S_0^{-1}A_0S_0=diag\{\Lambda_{01};\Lambda_{02}\}$, với $\Lambda_{01}=diag\{\lambda_{01};\lambda_{02};...;\lambda_{0q}\}$, $\Lambda_{02}=diag\{\lambda_{0,q+1};\lambda_{0,q+2};...;\lambda_{0n}\}$.

(D2) Phổ của ma trận A_0 thỏa mãn $\mathrm{Re}(\lambda_{0j})\leq-\delta_1<0$, $\forall j=1,2,...,q$ và $\mathrm{Re}(\lambda_{0k})\geq\delta_2>0$, $\forall j=q+1,q+2,...,n$; $\delta_1;\delta_2$ là các hằng số.

(D3) $\det K\neq 0$ và chuẩn $\|A_1(t)\|$ đủ nhỏ, trong đó $K=\begin{pmatrix}K_1 & K_2\end{pmatrix}^T$, $K_1=F_1S_0$, $K_2=F_2S_0$.

Khi đó, bài toán (7), (8) có nghiệm duy nhất chứa hai lân cận tại biên $t_1=0, t_2=1$.

Chứng minh:

Do S_0 là ma trận không suy biến (Lancaster, 1978; Konyaev, 2001), nên nghiệm $x(t)=S_0y(t)$ sẽ dẫn đến kết quả

$$\dot{y}(t)=\frac{t}{\varepsilon}\Lambda_0y(t)+g(t) \tag{9}$$

$$K_1y(0)+K_2y(1)=\alpha$$

trong đó, $g(t) = S_0^{-1}A_1(t)S_0y(t) = B_1(t)y(t)$.

Giả sử $\Phi(t,\varepsilon)$ là hàm ma trận của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng $\left(f(t)\equiv 0\right)$ của (9) ta có

$$\dot{\Phi}(t,\varepsilon) = \frac{t}{\varepsilon}\Lambda_0\,\Phi(t,\varepsilon) \tag{10}$$

Khi đó nghiệm tổng quát của phương trình tuyến tính thuần nhất tương ứng với (9) là

$$y_{tq}(t,\varepsilon) = \Phi(t,\varepsilon)C. \tag{11}$$

Ngoài ra, theo (10) ta có

$$\Phi(t,\varepsilon) = e^{\frac{t^2}{2\varepsilon}\Lambda_0}\,\Phi(0,\varepsilon) = e^{diag\left(\frac{t^2}{2\varepsilon}\Lambda_{01};\frac{t^2}{2\varepsilon}\Lambda_{02}\right)}\,\Phi(0,\varepsilon).$$

Chọn $\Phi(0,\varepsilon) = e^M$, với $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{-\Lambda_{02}}{2\varepsilon} \end{pmatrix}$. Ta có

$$\Phi(t,\varepsilon) = \Phi_1(t,\varepsilon) + \Phi_2(t,\varepsilon), \text{ với } \Phi_1(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} \dfrac{t^2\Lambda_{01}}{2\varepsilon} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \Phi_2(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{t^2-1}{2\varepsilon}\Lambda_{02} \end{pmatrix}.$$

Mặt khác, nghiệm riêng của phương trình tuyến tính không thuần nhất (9) được cho bởi:

$$z(t,\varepsilon) = \sum_{j=1}^{2}\Phi_j(t,\varepsilon)\int_{t_j}^{t}\Phi^{-1}(s,\varepsilon)g(s)ds.$$

Tóm lại nghiệm tổng quát của phương trình (9) là

$$y(t,\varepsilon) = \Phi(t,\varepsilon)C + \sum_{j=1}^{2}\Phi_j(t,\varepsilon)\int_{t_j}^{t}\Phi^{-1}(s,\varepsilon)g(s)ds.$$

Trong đó, $C = H^{-1}\left(\alpha - \left(\Phi(1,\varepsilon) - \Phi(0,\varepsilon)\right)\int_0^1\Phi^{-1}(s,\varepsilon)g(s)ds\right)$,

với $H = K_1\Phi(0,\varepsilon) + K_2\Phi(1,\varepsilon)$.

Điều này chứng tỏ rằng, hệ phương trình (9) có nghiệm duy nhất chứa hai lân cận tại biên $t_1 = 0, t_2 = 1$. Định lí 2.6 đã được chứng minh.

Để minh họa cho Định lí 2.6, ta cho một ví dụ.

4. Ví dụ

Ví dụ 4.1.

Xét phương trình vi phân có hệ số khuếch tán bị nhiễu tại điểm kì dị, với phổ khác nhau như sau:

$$\varepsilon\ddot{x}(t) + t\dot{x}(t) - tx(t) = 0 \tag{12}$$

thỏa mãn điều kiện ban đầu $x(0,\varepsilon)=\alpha_1$ và $x(1,\varepsilon)=\alpha_2$.

Ta thế nghiệm $x(t)=e^{\frac{-t}{\varepsilon}}y(t)$ vào (12), ta được phương trình

$$\varepsilon^2\ddot{y}(t)-\varepsilon(2-t)\dot{y}(t)-\left[t(1+\varepsilon)-1\right]y(t)=0 \tag{13}$$

Đặt $\varepsilon\dot{y}=v$, $\omega=\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix}$, phương trình (13) trở thành

$$\varepsilon\dot{\omega}(t)=\begin{pmatrix} v \\ \varepsilon\dot{v} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t(1+\varepsilon)-1 & 2-t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y \\ v \end{pmatrix} \tag{14}$$

tiếp tục đặt $t_1=t+10$, hệ phương trình (14) được biến đổi thành

$$\varepsilon\dot{\omega}(t_1)=(t_1A_0+A_1)\omega(t_1) \tag{15}$$

với $A_0=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1+\varepsilon & -1 \end{pmatrix}$, $A_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -11-10\varepsilon & 12 \end{pmatrix}$.

Nhờ nghiệm $\omega(t_1)=S_0z(t_1)$, trong đó $S_0=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1+\varepsilon & 1 \end{pmatrix}$ là ma trận không suy biến, ta nhận được hệ phương trình sau đây

$$\varepsilon\dot{z}(t_1)=B(t_1)z(t_1). \tag{16}$$

Với $B(t_1)=t_1\Lambda_0+B_1$, $\Lambda_0=S_0^{-1}A_0S_0$, $B_1=S_0^{-1}A_1S_0$, $\Lambda_0=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Ta dễ dàng kiểm tra được rằng các điều kiện (D1), (D2) và (D3) được thỏa mãn. Do đó bài toán có nghiệm duy nhất. Bây giờ ta sẽ tiến hành tìm nghiệm của bài toán này.

Áp dụng kết quả (Konyaev, 2001), ta có nghiệm của hệ phương trình (16) được cho bởi

$$z(t_1)=H(t_1)u(t_1) \tag{17}$$

trong đó, $H(t_1)=E+\frac{\bar{\bar{H}}_1}{t_1}+\frac{\bar{\bar{H}}_2}{t_1^2}$, $\bar{\bar{H}}_1=H_1-\bar{H}_1$, $\bar{H}_1=diag\{h_{11},h_{22}\}$.

Từ phương trình (17), ta suy ra

$$\dot{z}(t_1)=\dot{H}(t_1)u(t_1)+H(t_1)\dot{u}(t_1). \tag{18}$$

Thế vế phải của phương trình (18) vào phương trình (16), ta nhận được kết quả

$$\varepsilon\dot{u}(t_1)=Q(t_1)u(t_1). \tag{19}$$

Với $Q(t_1)=t_1\left(\Lambda_0+\frac{\Lambda_{-1}}{t_1}+\frac{\Lambda_{-2}}{t_1^2}+\bar{0}\left(t_1^{-2}\right)\right)$.

Cũng từ phương trình (18) ta lại suy ra

$$\varepsilon\dot{H}(t_1)=B(t_1)H(t_1)-H(t_1)Q(t_1). \tag{20}$$

Khai triển phương trình (20) và đồng nhất các hệ số theo bậc của t_1 ta nhận được

$$\Lambda_0\bar{\bar{H}}_1 - \bar{\bar{H}}_1\Lambda_0 = \Lambda_{-1} - P_1,\ P_1 = B_1 \tag{21}$$

$$\Lambda_0\bar{\bar{H}}_2 - \bar{\bar{H}}_2\Lambda_0 = \Lambda_{-2} - P_2,\ P_2 = B_1\bar{\bar{H}}_1 - \bar{\bar{H}}_1\Lambda_{-1} \tag{22}$$

từ (21) và (22) suy ra:

$$\Lambda_{-1} = \bar{P}_1,\ \Lambda_{-2} = \bar{P}_2 \tag{23}$$

$$\bar{\bar{H}}_1 = \begin{pmatrix} 0 & -b_{12} \\ b_{21} & 0 \end{pmatrix},\ \bar{\bar{H}}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -p_{12} \\ p_{21} & 0 \end{pmatrix}.$$

Nhờ vậy, ta tìm được Λ_{-1}, Λ_{-2}, $\bar{\bar{H}}_1$ và $\bar{\bar{H}}_2$. Từ đó suy ra $H(t_1)$ và $Q(t_1)$.

Sau đó phối hợp (17), (19) và $\omega(t_1) = S_0 z(t_1)$ cho phép ta tìm được nghiệm

$$\omega(t_1) = S_0 H(t_1) C e^{M},\ M = \varepsilon\int_0^{t_1} Q(t)\,dt \tag{24}$$

cho nên nghiệm $y(t,\varepsilon)$ là tìm được, và cuối cùng ta đi đến nghiệm cần tìm là

$$x(t,\varepsilon) = e^{\frac{-t}{\varepsilon}} y(t,\varepsilon,c_1,c_2)\left(1 + 0(t+10)^{-2}\right) \tag{25}$$

với $c_1;c_2$ là các hằng số.

5. Kết luận

Nội dung bài báo giải quyết vấn đề về điều kiện tồn tại duy nhất nghiệm của bài toán biên của hệ phương trình vi phân tuyến tính trong trường hợp phổ của toán tử tuyến tính đã cho không ổn định. Khi điều kiện ấy được thỏa mãn thì công thức nghiệm cũng được xác định. Một vấn đề khác cũng được quan tâm và giải quyết đó là sự tồn tại duy nhất nghiệm của bài toán biên có hệ số khuếch tán bị nhiễu tại điểm kì dị. Ngoài ra, Ví dụ 4.1 góp phần minh họa vấn đề nghiên cứu được hữu hiệu và sinh động hơn.

❖ ***Tuyên bố về quyền lợi:*** *Tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Konyaev Yu. A. (2001). On some methods for studying stability. *Matematis Sbornik, 192*(3), Moscow, 65-82.

Konyaev Yu. A., & Nguyen, V. K. (2014). Spectral analysis of some classes of non-autonomous systems with periodic and polynomially periodic matrices. *Bulletin of the National Research Nuclear University MEPhI. 3*(3), 1-7.

Lancaster P. (1978). *Matrix Theory*. Moscow, Russian Federation, M.: Nauka.

Nguyen, V. K. (2013). Analytical methods for studying the stability of linear and quasilinear systems with a polynomially periodic matrix. *Vestnik RUDN, series: Mathematics. Informatics. Physics*, (4), Moscow, 18-23.

Nguyen, V. K. (2017). Research about the asymptotical stability substitution of the linear differential systems with periodic coefficients on the basis of spectral method. *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science, 14*(6), 157-164.

ON THE EXISTING CONDITIONS OF BOUNDARY SOLUTIONS OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS SYSTEMS

Nguyen Viet Khoa

Ho Chi Minh City University of Education, Vietnam

Corresponding author: Nguyen Viet Khoa – Email: khoanvi@hcmue.edu.vn

Received: May 03, 2020; Revised: June 04, 2020; Accepted: September 18, 2020

ABSTRACT

In the previous studies, the problem about the asymptotical stability substitution of the linear differential systems in the case of a given linear operator's spectrum has been shown to be stable (Nguyen, 2013; Konyaev, & Nguyen, 2014).

This paper investigates the existing conditions of boundary solutions of non-autonomous linear differential equations systems

$\dot{x} = A(t)x + f(t), (t \geq 0)$

satisfied original condition

$\sum_{j=1}^{m} F_j x(t_j) = \alpha$ *with* $0 = t_1 < t_2 < \cdots t_m = 1$

in the case of a given linear operator's spectrum that is not stable. It is a harder problem. Then it will be used to solve the solution of the linear differential equations systems which is equivalent to system (1).

Besides, with the result-based approach by Nguyen (2013), the solution of the boundary problem with disturbed diffusion coefficient has been solved.

$\varepsilon\dot{x} = \left(tA_0 + \varepsilon A_1(t)\right)x, (t \geq 0)$

satisfied initial condition

$F_1 x(0) + F_2 x(1) = \alpha$

and the result is illustrated by an specific example.

Keywords: linear differential equation systems; boundary solution; matrix function; spectrum of matrices; half elemental structure