TẠP CHÍ KHOA HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE

Tập 17, Số 11 (2020): 1957-1969

Vol. 17, No. 11 (2020): 1957-1969

ISSN:
1859-3100

Website: *http://journal.hcmue.edu.vn*

Bài báo nghiên cứu

NGHIÊN CỨU SAI LẦM CỦA HỌC SINH KHI GIẢI BÀI TOÁN CHIA HẾT VÀ CHIA ĐA THỨC TỪ CÁCH TIẾP CẬN CỦA "HỢP ĐỒNG DẠY HỌC"

Nguyễn Thiện Chí

Trường THCS Võ Việt Tân, Tiền Giang, Việt Nam

Tác giả liên hệ: Nguyễn Thiện Chí – Email: thienchi67@gmail.com

Ngày nhận bài: 17-01-2020; ngày nhận bài sửa: 26-3-2020; ngày duyệt đăng: 25-11-2020

TÓM TẮT

Trong bài viết này, chúng tôi sử dụng khái niệm "hợp đồng dạy học" *được giới thiệu bởi Guy Brousseau vào năm 1980, như là một công cụ để nghiên cứu sai lầm của học sinh.*

Nghiên cứu này được thực hiện theo tiến trình: Phân tích sách giáo khoa và sách bài tập Toán 8, tập 1, từ đó đề xuất hai quy tắc của "hợp đồng dạy học" *liên quan đến việc giải bài toán chia hết và bài toán chia đa thức. Thiết kế tình huống để kiểm chứng* "hợp đồng dạy học". *Tiến hành thực nghiệm. Kết quả nghiên cứu cho thấy nhiều học sinh đã mắc phải sai lầm khi giải quyết các bài toán này có nguồn gốc từ hai* "hợp đồng dạy học" *đã đề xuất.* Cụ thể là hai sai lầm:

"Khi giải bài toán chứng minh biểu thức A(n) (n là số tự nhiên hoặc số nguyên) chia hết cho một số tự nhiên khác 0 và 1 thì học sinh đã phạm phải sai lầm do không xét đến điều kiện biến n phụ thuộc vào các biến mới"; "Sai lầm của học sinh khi cho rằng thương của phép chia hai đa thức một biến có hệ số nguyên là một đa thức có hệ số nguyên".

Từ khóa: bài toán chia hết; chia đa thức; hợp đồng dạy học; sai lầm của học sinh

1. Đặt vấn đề

Những nghiên cứu trong Didactic cho phép đổi mới cách tiếp cận những sai lầm của học sinh (HS), trong đó có hai khuynh hướng rất đáng quan tâm:

Một mặt, những sai lầm không phải luôn luôn đồng nghĩa với sự thiếu kiến thức hay thiếu làm việc. Trái lại, một số sai lầm là yếu tố thông tin cho phép giáo viên (GV) biết về những quan niệm của HS liên quan đến khái niệm, nói cách khác thông tin về "cách biết của HS".

Mặt khác, những sai lầm của HS có thể phải được tính đến một cách tích cực trong quá trình học tập. Điều đó có nghĩa là, GV cần lựa chọn và tổ chức các tình huống dạy học hợp lí, những tình huống tạo thuận lợi cho HS xem xét lại những nguyên nhân của các sai lầm của chúng.

Cite this article as: Nguyen Thien Chi (2020). Analysing students' mistakes when solving division and polynomial problems from the "Didactic contract" approach. *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science*, *17*(11), 1957-1969.

Do đó, trong quá trình giảng dạy môn Toán, tìm hiểu nguồn gốc sai lầm của HS là rất quan trọng; từ đó, GV điều chỉnh để giúp HS hiểu kiến thức một cách chính xác, phát hiện và khắc phục các sai lầm HS có thể mắc phải, tạo cơ hội cho HS phát triển tư duy.

Trong nghiên cứu này, chúng tôi sử dụng khái niệm "hợp đồng dạy học", được giới thiệu bởi Guy Brousseau vào năm 1980, tên gọi nguyên văn bằng tiếng Pháp của khái niệm này là "Le contrat didactique". "Hợp đồng dạy học" (HĐDH) là thuật ngữ Việt hóa của khái niệm này trong các giáo trình Didactic Toán ở Việt Nam hiện nay. HĐDH là một trong những mô hình cho phép tìm hiểu nguồn gốc sai lầm của HS. Thực tế dạy học cho thấy, phần lớn HS thường phạm phải sai lầm khi học các kiến thức gắn liền với phép chia hết trên tập hợp số nguyên và phép chia đa thức. Do đó, để minh họa cho cách tiếp cận này, chúng tôi xét việc giải bài toán chia hết trên tập hợp số nguyên và bài toán chia đa thức một biến.

2. Cơ sở lí thuyết

2.1. Hợp đồng dạy học

G. Brousseau định nghĩa HĐDH như là "tập hợp các quan hệ xác định, thường là ngầm ẩn, có thể phân nhỏ một cách rõ ràng thành những điều khoản mà mỗi bên (GV và HS) có trách nhiệm thực hiện những nghĩa vụ bên này đối với bên kia" (Bessot, Comiti, Le, & Le, 2009, p.339).

HĐDH nêu ra những quy tắc trong suốt quá trình học tập thể hiện những mong đợi và ứng xử của HS và GV đối với kiến thức. Nó ngầm ẩn đưa ra những điều mà HS và GV phải làm, vai trò và trách nhiệm của họ đối với nhau.

2.2. Quy trình khám phá và kiểm chứng những quy tắc của HĐDH

Từ kết quả nghiên cứu của Tran (2011), trong nghiên cứu này chúng tôi đề xuất một quy trình gồm 4 bước sau đây nhằm khám phá và kiểm chứng những quy tắc của HĐDH:

Bước 1. Thu thập và phân tích thông tin

Nhà nghiên cứu (NNC) có thể thu thập thông tin từ nhiều nguồn như: sách giáo khoa (SGK), sách giáo viên (SGV), sách bài tập (SBT), tập học của HS, phỏng vấn HS…

Sau khi thu thập đầy đủ thông tin, NNC tiến hành phân tích, tìm hiểu các kiểu nhiệm vụ liên quan đến đối tượng tri thức cần nghiên cứu. Có những quy tắc nào của HĐDH gắn liền với các kiểu nhiệm vụ?...

Sau khi thực hiện xong Bước 1, NNC đưa ra những dự đoán về các quy tắc của HĐDH có thể tồn tại ở HS khi học một kiểu nhiệm vụ nào đó.

Bước 3. Thiết kế tình huống để kiểm chứng những HĐDH

Để kiểm chứng quy tắc của HĐDH đã đề xuất ở Bước 2, NNC phải thiết kế một tình huống nhằm tạo ra sự biến loạn trong hệ thống dạy học, sao cho có thể đặt GV và HS trong một tình huống khác lạ (gọi là tình huống ngắt quãng hợp đồng).

Để tạo ra tình huống ngắt quãng hợp đồng, NNC có thể tiến hành theo cách sau:

- *Đối với HS:* Thay đổi những điều kiện sử dụng tri thức, đôi khi biến đổi các đặc trưng của bài toán. Hơn nữa, NNC có thể lợi dụng khi HS chưa biết cách vận dụng tri thức toán nào đó. Ngoài ra, NNC đặt HS ra ngoài phạm vi của tri thức đang bàn đến hoặc sử dụng những tình huống mà tri thức đó không giải quyết được.
- *Đối với GV*: Đặt GV trước những ứng xử của HS không phù hợp với những điều GV mong đợi. Chẳng hạn, đó là những câu trả lời khác lạ cho một bài toán. (Bessot, Comiti, Le, & Le, 2009, p.341)

Bước 4. Thực nghiệm

Sau khi hoàn thành các bước trên, NNC tiến hành khảo sát trên một tập hợp HS được lựa chọn, rồi tiến hành thu thập và phân tích kết quả thực nghiệm. Kết quả phân tích cuối cùng sẽ giúp cho họ trả lời các câu hỏi về sự tồn tại của các HĐDH mà họ đề xuất.

3. Nội dung nghiên cứu

Những quy tắc của HĐDH mà chúng tôi đề xuất được nghiên cứu trong Chương 1: "Phép nhân và phép chia các đa thức", SGK Toán 8, tập 1. Trong phần này chúng tôi thực hiện nghiên cứu theo quy trình gồm 4 bước đã nêu trên.

❖ ***Bước 1. Thu thập và phân tích thông tin***

a) Thu thập thông tin

Sau khi phân tích SGK, SBT, SGV chúng tôi quan tâm đến hai kiểu nhiệm vụ sau:

- ***Kiểu nhiệm vụ T1:*** "Chứng minh biểu thức A(n) (phụ thuộc n, n là số tự nhiên hoặc số nguyên) chia hết cho số tự nhiên a khác 0 và 1"

SGK Toán 8, tập 1 đưa vào ví dụ sau:

Ví dụ 1: "Chứng minh rằng $(2n+5)^2-25$ chia hết cho 4 *với mọi số nguyên n*"

Lời giải mong đợi

Ta có: "$(2n+5)^2-25=(2n+5)^2-5^2=(2n+5-5)(2n+5+5)$

Nên $(2n+5)^2-25$ chia hết cho 4 với mọi số nguyên n" (Phan, 2004, p. 20)

SBT Toán 8, tập 1 đưa vào bài toán sau:

Ví dụ 2: "Chứng minh rằng biểu thức $n(2n-3)-2n(n+1)$ luôn chia hết cho 5 *với mọi số nguyên n*" (Ton, 2004, p.6).

Hướng dẫn giải tìm thấy ở SBT như sau: "Biến đổi biểu thức, ta được -5n. Hiển nhiên $-5n \vdots 5$ với mọi số nguyên n" (Ton, 2004, p.16).

* *Kĩ thuật giải* τ_{1a} *:*

- Phân tích A(n) thành nhân tử trong đó có chứa số chia a;
- Chứng minh ít nhất có một nhân tử chia hết cho a, suy ra điều phải chứng minh.

* *Công nghệ* θ_{1a} *:*

- Hằng đẳng thức đáng nhớ;

- Tính chất chia hết trên tập số nguyên: “Nếu a chia hết cho b thì ac chia hết cho b”

* *Lí thuyết* Θ_{1a} *:*

- Phép nhân đa thức với đa thức;
- Định nghĩa phép chia hết trên tập số nguyên.

* *Nhận xét:*

- Đặc trưng của T1: biểu thức bị chia là *biểu thức một biến* (cụ thể là biến n) và luôn được phân tích thành nhân tử theo biến này.
- **Số chia a** xuất hiện ngay trong kết quả phân tích biểu thức bị chia A(n) thành nhân tử, từ đó suy ra được ngay điều phải chứng minh nên kĩ thuật τ_{1a} dễ hiểu và dễ sử dụng.

Sau đây, chúng tôi tiếp tục xét hai bài toán sau thuộc kiểu nhiệm vụ T1:

SGK Toán 8 tập 1 đưa vào phần bài tập bài toán sau:

Ví dụ 3: “Chứng minh rằng $n^3 - n$ chia hết cho 6 *với mọi số nguyên n*” (Phan, 2004, p. 25).

Hướng dẫn giải trong SGV: “$n^3 - n = n(n-1)(n+1)$ với $n \in \mathbb{Z}$ là tích của ba số nguyên liên tiếp. Trong ba số nguyên liên tiếp có một số chia hết cho 3 và ít nhất một số chẵn. Mà 2 và 3 nguyên tố cùng nhau nên được điều phải chứng minh” (Phan, 2004, p. 31).

SGV Toán 8, tập 1 đưa vào bài toán sau:

Ví dụ 4: “Chứng minh rằng $n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n$ chia hết cho 24 *với mọi số nguyên n*” (Phan, 2004, p. 37)

Hướng dẫn giải: “Phân tích $n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n = (n-1)n(n+1)(n+2)$.

Đây là tích của bốn số nguyên liên tiếp nên nó chứa hai số chẵn liên tiếp, một thừa số chia hết cho 2, một thừa số chia hết cho 4 nên tích chia hết cho 8. Đồng thời tích trên là tích của ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 3. Ta lại có (3, 8) = 1, nên tích chia hết cho 24.” (Phan, 2004, p.38).

* *Kĩ thuật giải* τ_{1b} *:*

- Phân tích A(n) thành nhân tử;
- Phân tích a thành một tích các thừa số đôi một nguyên tố cùng nhau, rồi chứng minh A(n) chia hết cho tất cả các số đó. Từ đó suy ra điều phải chứng minh.

* *Công nghệ* θ_{1b} *:*

- Hằng đẳng thức đáng nhớ;
- Tính chất chia hết trong tập hợp số nguyên:

“Nếu a chia hết cho m và a chia hết cho n, mà ƯCLN (m, n) = 1 thì a chia hết cho mn”

* *Lí thuyết* Θ_{1b} *:*

- Phép nhân đa thức với đa thức;
- Định nghĩa phép chia hết trên tập số nguyên;
- Khái niệm ước chung lớn nhất, số nguyên tố.

* *Nhận xét:* Đối với kĩ thuật τ_{1b} thì phải **phân tích số chia a thành tích hai số nguyên tố cùng nhau**, rồi chứng minh A(n) chia hết cho hai số này, đây chính là những điểm khác biệt so với τ_{1a}. Như vậy, có thể thấy kĩ thuật τ_{1b} phức tạp hơn kĩ thuật τ_{1a}.

Tóm lại, để giải quyết kiểu nhiệm vụ T1 *thì SGK, SBT, SGV chỉ đề cập đến hai kĩ thuật giải đã nêu trên,* cụ thể là: Nếu kết quả phân tích A(n) thành nhân tử mà trong đó có chứa số chia a thì sử dụng τ_{1a}. Nếu kết quả phân tích A(n) thành nhân tử không chứa số chia a thì sử dụng τ_{1b}. Đến đây, lại nảy sinh hai vấn đề:

- Trong hai kĩ thuật đã nêu thì thể chế ưu tiên cho kĩ thuật nào khi giải quyết kiểu nhiệm vụ T1?
- *Bốn bài toán* đã nêu trên thì đề bài đều yêu cầu chứng minh chia hết *với mọi số nguyên n,* nếu trong tình huống đề bài yêu cầu chứng minh chia hết trong các trường hợp mà biến n phụ thuộc vào các biến mới, chẳng hạn $n = 2k+1, k \in \mathbb{Z}$; $n = 5q+3, q \in \mathbb{Z}$ (trong hai trường hợp này thì biến n phụ thuộc vào các biến mới k, q) thì hai kĩ thuật trên sẽ được vận dụng như thế nào để giải được bài toán? Khi giải bài toán trong trường hợp này học sinh có quan tâm đến sự phụ thuộc của biến n vào các biến mới không? Những câu hỏi này sẽ được trả lời trong các phần tiếp theo của nghiên cứu này.

- ***Kiểu nhiệm vụ T2*: **“Thực hiện phép chia hai đa thức một biến”

  SGK đưa vào ví dụ sau:

  “a) Thực hiện phép chia đa thức $\left(2x^4 - 13x^3 + 15x^2 + 11x - 3\right)$ cho đa thức $\left(x^2 - 4x + 3\right)$.

  b) Thực hiện phép chia đa thức $\left(5x^3 - 3x^2 + 7\right)$ cho đa thức $\left(x^2 + 1\right)$.” (Phan, 2004, p.29)

* *Kĩ thuật giải τ_2:*

- Trình bày phép chia như phép chia hai số tự nhiên;
- Chia hạng tử bậc cao nhất của đa thức bị chia cho hạng tử bậc cao nhất của đa thức chia ta được hạng tử bậc cao nhất của đa thức thương;
- Chia hạng tử bậc cao nhất của dư thứ nhất cho hạng tử bậc cao nhất của đa thức chia ta được hạng tử thứ hai của đa thức thương;
- Thực hiện tương tự như trên:

+ Nếu đa thức dư có bậc nhỏ hơn bậc của đa thức chia thì phép chia không thể tiếp tục. Phép chia trong trường hợp này gọi là phép chia có dư.

+ Nếu phép chia có dư bằng 0 thì được gọi là phép chia hết.

* *Công nghệ θ_2:*

- Chia đơn thức cho đơn thức, nhân đơn thức với đa thức, cộng, trừ đa thức một biến;
- Định lí về phép chia có dư.

* *Lí thuyết Θ_2:*

- Định nghĩa đơn thức, đa thức, bậc đa thức;

- Định lí về bậc của đa thức.

Sau đây là bảng thống kê các đặc trưng cơ bản của các kiểu nhiệm vụ T1, T2:

Bảng 1. *Các đặc trưng cơ bản của kiểu nhiệm vụ T1*

Kĩ thuật	**Biểu thức bị chia A(n)**	**Số chia a**	**Đặc trưng của biến n**	**Kết quả phân tích A(n) thành nhân tử**	**Vị trí bài toán**
τ_{1a}	$55^{n+1}-55^{n}$	54	$n\in\mathbb{N}$	54.55^{n}	Bài tập SGK
	$(2n+5)^2-25$	4	$n\in\mathbb{Z}$	$4n(n+5)$	Ví dụ SGK
	$(5n+2)^2-4$	5	$n\in\mathbb{Z}$	$5n(5n+4)$	Bài tập SGK
	$(n-1)(3-2n)-n(n+5)$	3	$n\in\mathbb{Z}$	$-3(n^2+1)$	Bài tập SBT
	$n(2n-3)-2n(n+1)$	5	$n\in\mathbb{Z}$	$-5n$	Bài tập SBT
τ_{1b}	n^3-n	6=2.3	$n\in\mathbb{Z}$	$(n-1)n(n+1)$	Bài tập SGK
	$n^2(n+1)+2n(n+1)$	6=2.3	$n\in\mathbb{Z}$	$n(n+1)(n+2)$	Bài tập SBT
	$n^4+2n^3-n^2-2n$	24=3.8	$n\in\mathbb{Z}$	$(n-1)n(n+1)(n+2)$	Bài tập SGV

Bảng 2. *Các đặc trưng cơ bản của kiểu nhiệm vụ T2*

Kĩ thuật	**Thực hiện phép chia hai đa thức một biến**	**Đa thức thương**	**Đa thức dư**	**Vị trí bài toán**
τ_2	$(2x^4-13x^3+15x^2+11x-3):(x^2-4x-3)$	$2x^2-5x+1$	0	Ví dụ SGK
	$(5x^3-3x^2+7):(x^2+1)$	$5x-3$	$-5x+10$	
	$(x^3-7x+3-x^2):(x-3)$	x^2+2x-1	0	Bài tập SGK
	$(2x^4-3x^3-3x^2-2+6x):(x^2-2)$	$2x^2-3x+1$	0	
	$(3x^4+x^3+6x-5):(x^2+1)$	$3x^2+x-3$	$5x-2$	
	$(2x^4+x^3-3x^2+5x-2):(x^2-x+1)$	$2x^2+3x-2$	0	
τ_2	$(6x^3-7x^2-x+2):(2x+1)$	$3x^2-5x+2$	0	Bài tập SGK
	$(x^4-x^3+x^2+3x):(x^2-2x+3)$	x^2+x	0	
	$(6x^2+13x-5):(2x+5)$	$3x-1$	0	Bài tập SBT
	$(x^3-3x^2+x-3):(x-3)$	x^2+1	0	
	$(12x^2-14x+3-6x^3+x^4):(1-4x+x^2)$	x^2-2x+3	0	

$\left(x^5-x^2-3x^4+3x+5x^3-5\right):\left(5+x^2-3x\right)$	x^3-1	0
$\left(2x^2-5x^3+2x+2x^4-1\right):\left(x^2-x-1\right)$	$2x^2-3x+1$	0
$\left(x^4-2x^3+x^2+13x-11\right):\left(x^2-2x+3\right)$	x^2-2	$9x-5$
$\left(2x^4-10x^3+3x^2-3x+2\right):\left(2x^2+1\right)$	x^2-5x+1	$2x+1$
$\left(2x^4+x^3-5x^2-3x-3\right):\left(x^2-3\right)$	$2x^2+x+1$	0

b) Phân tích thông tin

Phân tích Bảng 1 và các lời giải trình bày trong SGK, SBT, SGV cho phép rút ra nhiều nhận xét đáng chú ý. Chúng đặc trưng cho những ràng buộc ngầm ẩn của SGK lên kiểu nhiệm vụ T1và kĩ thuật tương ứng:

* *Đặc trưng của biểu thức bị chia A(n):*

- Biểu thức bị chia A(n*) luôn phân tích được thành nhân tử* theo biến n*;*
- Tất cả các bài toán mà SGK, SBT, SGV đề nghị thì biểu thức bị chia là *biểu thức một biến.*

* *Đặc trưng của số chia a:* Số chia a xuất hiện trong kết quả phân tích biểu thức A(n) thành nhân tử hoặc số chia a được phân tích thành tích hai thừa số nguyên tố cùng nhau.

* *Đặc trưng của biến n: Tất cả các bài toán thuộc kiểu nhiệm vụ T1* được đề cập trong các SGK, SBT, SGV đều yêu cầu chứng minh chia hết với mọi số nguyên n hoặc mọi số tự nhiên n, tức là biến n nhận giá trị tùy ý trong tập hợp số nguyên hoặc tập hợp số tự nhiên, không có bài tập nào yêu cầu chứng minh chia hết trong trường *hợp biến n nhận giá trị trên một tập hợp con của tập hợp các số tự nhiên (hoặc tập hợp số nguyên).* Chẳng hạn, n là số nguyên chia cho 3 dư 2 hoặc n là bội số của 5…

* Từ bảng thống kê cũng cho thấy *kĩ thuật* τ_{1a} *được thể chế ưu tiên* (có 5/8 bài toán được sử dụng τ_{1a}).

Phân tích Bảng 2 và các lời giải trình bày trong SGK, SBT, SGV cho phép rút ra nhận xét sau: Tất cả các bài toán thuộc kiểu nhiệm vụ T2 được đề cập ở SGK và SBT đều xét các đa thức một biến có các đặc trưng sau:

- Đa thức bị chia và đa thức chia đều là các đa thức với hệ số nguyên;
- Thương của phép chia hai đa thức một biến có hệ số nguyên là một đa thức có hệ số nguyên (trong cả hai trường hợp phép chia hết và phép chia dư).

❖ ***Bước 2. Dự đoán HĐDH***

Những phân tích trên làm nảy sinh những câu hỏi về ảnh hưởng của những ràng buộc của SGK lên mối quan hệ của HS đối với các kiểu nhiệm vụ T1, T2:

* *Đối với kiểu nhiệm vụ T1:*

HS sẽ ứng xử thế nào trước tình huống giải quyết kiểu nhiệm vụ T1, trong đó biến n nhận giá trị trên một tập con của tập các số tự nhiên (hoặc tập hợp số nguyên)? Chẳng hạn với n là số nguyên lẻ ($n=2k+1, k\in\mathbb{Z}$), n là số tự nhiên chẵn ($n=2p, p\in\mathbb{N}$), n là số tự nhiên chia cho 5 dư 4 ($n = 5q + 4, q \in \mathbb{N}$)… Trong các trường hợp này biến n phụ thuộc vào các biến mới k, p, q. Do đó, khi giải bài toán chứng minh chia hết liệu HS có quan tâm đến sự phụ thuộc của biến n như đã nêu hay không?

Từ ghi nhận trên, chúng tôi dự đoán tồn tại ở HS quy tắc sau đây của HĐDH gắn với kiểu nhiệm vụ T1:

R1: "Khi giải bài toán chứng minh biểu thức A chia hết cho một số tự nhiên (khác 0 và 1) thì HS ngầm hiểu rằng: Biểu thức bị chia A chỉ phụ thuộc vào một biến (chẳng hạn biến n) và n luôn nhận giá trị tùy ý trong tập hợp số tự nhiên hoặc tập hợp số nguyên. Khi đó, HS chỉ cần thực hiện các thao tác của kĩ thuật τ_{1a} hoặc τ_{1b} mà không cần xét xem biến n có phụ thuộc vào biến mới hay không?".

* *Đối với kiểu nhiệm vụ T2:*

HS sẽ ứng xử thế nào trong trường hợp kết quả thương của phép chia hai đa thức một biến với hệ số nguyên (xét phép chia hết và phép chia dư) *là một đa thức có hệ số không phải là số nguyên*?

Từ ghi nhận trên, chúng tôi dự đoán tồn tại ở HS quy tắc sau của HĐDH gắn với kiểu nhiệm vụ T2:

R2: "Khi thực hiện phép chia hai đa thức một biến với hệ số nguyên thì HS ngầm hiểu rằng: Thương của phép chia hai đa thức luôn là một đa thức với hệ số nguyên".

❖ ***Bước 3. Thiết kế tình huống kiểm chứng HĐDH***

Để kiểm chứng quy tắc R1 đã dự đoán, HS được yêu cầu giải hai bài toán sau:

Như đã phân tích ở trên, *kĩ thuật τ_{1a} được thể chế ưu tiên* nên chúng tôi chọn hai bài toán thực nghiệm dưới đây nhằm *hướng HS đến việc vận dụng τ_{1a} để giải toán.*

Bài 1. Biết n là số tự nhiên chia cho 5 dư 4. Chứng minh $n^2 - 1$ chia hết cho 5.

Sự ngắt quãng hợp đồng trong bài toán trên thể hiện ở điểm sau:

- Biến n phụ thuộc vào biến mới là thương trong phép chia n cho 5.

* *Các chiến lược gắn liền với bài 1:*

Để giải bài toán HS có thể chọn các chiến lược sau phụ thuộc vào cách hiểu về "nghĩa" của chữ n.

S_1^1: *Chiến lược* "Số" chữ n được gán cho những số tự nhiên chia cho 5 dư 4.

Gán giá trị số của n vào biểu thức $n^2 - 1$ hoặc biểu thức $(n+1)(n-1)$. Chiến lược này sinh ra từ cách hiểu "nghĩa" của kí hiệu chữ n là *chữ được gán giá trị* nên có thể dẫn đến HS quan niệm để giải bài toán chỉ cần chọn số cụ thể là số tự nhiên chia cho 5 dư 4.

S_2^1: *Chiến lược* xác định biểu thức bị chia theo biến mới (là thương của phép chia đã cho). Chiến lược này thể hiện một quan niệm đúng, xuất phát từ cách hiểu "nghĩa" của chữ n là "Biến n phụ thuộc vào biến mới là thương trong phép chia n cho 5" *và sau đó sử dụng kĩ thuật τ_{1a}* thì giải được bài toán như sau:

Vì $n = 5q + 4\left(q \in \mathbb{N}\right)$ nên

$n^2 - 1 = \left(n+1\right)\left(n-1\right) = \left(5q+5\right)\left(5q+3\right) = 5\left(q+1\right)\left(5q+3\right) \vdots 5$ hoặc

$n^2 - 1 = \left(5q+4\right)^2 - 1 = 5\left(5q^2 + 8q + 3\right) \vdots 5$.

* *Nhận xét:* Nếu mong muốn HS vận dụng cả hai kĩ thuật để giải quyết kiểu nhiệm vụ T1 thì từ bài toán 1, có thể thay đổi giả thiết và số chia để được bài toán mới như sau: "Biết n là số tự nhiên lẻ và không chia hết cho 3. Chứng minh $n^2 - 1$ chia hết cho 24". Do khuôn khổ bài báo nên chúng tôi không trình bày phần thực nghiệm của bài toán này.

Bài 2. Cho m là số nguyên chia cho 3 dư 1, n là số nguyên chia cho 3 dư 2. Chứng minh $\left(mn - 2\right)$chia hết cho 3.

Sự ngắt quãng hợp đồng trong bài toán 2 thể hiện ở điểm sau:

- *Biểu thức bị chia $\left(mn - 2\right)$ phụ thuộc vào hai biến m, n và không phân tích được thành nhân tử theo hai biến này.*

* *Các chiến lược gắn liền với bài 2:*

Để giải bài toán HS có thể chọn các chiến lược sau phụ thuộc vào cách hiểu về "nghĩa" của hai kí hiệu chữ m, n.

S_1^2: *Chiến lược* "Số": Chữ m được gán cho những số nguyên chia cho 3 dư 1, chữ n được gán cho những số nguyên chia cho 3 dư 2. Chiến lược này sinh ra từ cách hiểu "nghĩa" của các kí hiệu chữ m, n là *chữ được gán giá trị.*

S_2^2: *Chiến lược* xác định biểu thức bị chia theo hai biến mới (là thương của hai phép chia đã cho). Chiến lược này thể hiện một quan niệm đúng, xuất phát từ cách hiểu "nghĩa" của các chữ m, n là "Hai biến m, n phụ thuộc vào hai biến mới là thương của hai phép chia đã cho" *và sau đó sử dụng kĩ thuật* τ_{1a} thì giải được bài toán như sau:

$m = 3q + 1\left(q \in \mathbb{Z}\right), n = 3p + 2\left(p \in \mathbb{Z}\right)$ nên $\left(mn - 2\right) = 3\left(3pq + 2q + p\right) \vdots 3$.

Để kiểm chứng quy tắc R2 đã dự đoán, HS được yêu cầu giải hai bài toán sau:

* *Kiểm chứng quy tắc R2 đã dự đoán trong trường hợp phép chia có dư.*

Bài 3. Cho hai đa thức $A = 4x^3 - 3x^2 + x + 1$ và $B = -2x^2 + 2x + 1$. Thực hiện phép chia A cho B và giải thích tại sao phép chia không thể tiếp tục? Hãy xác định thương và dư trong phép chia trên.

Sự ngắt quãng hợp đồng trong bài toán 3 thể hiện ở điểm sau:

Thương trong phép chia A cho B là đa thức với hệ số hữu tỉ.

* *Các chiến lược gắn liền với bài 3:*

S_1^3: Chiến lược đa thức thương với hệ số nguyên.

Phép chia không thể tiếp tục vì $\left(x^2\right) : \left(-2x^2\right) = \dfrac{-1}{2}$ là số hữu tỉ.

Đa thức thương: $-2x$, đa thức dư: x^2+3x+1.

S_2^3 : Chiến lược đa thức thương với hệ số hữu tỉ.

Phép chia không thể tiếp tục vì đa thức dư $4x+\frac{3}{2}$ có bậc 1 nhỏ hơn bậc của đa thức chia (bậc 2). Đa thức thương: $-2x-\frac{1}{2}$, đa thức dư: $4x+\frac{3}{2}$.

** Kiểm chứng quy tắc R2 đã dự đoán trong trường hợp phép chia hết*

Bài 4. Cho hai đa thức $A=4x^3+3x^2+7x-2$ và $B=4x^2+4x+8$. Thực hiện phép chia A cho B và giải thích tại sao phép chia không thể tiếp tục? Hãy xác định thương và dư trong phép chia trên.

Sự ngắt quãng hợp đồng trong bài toán 4 thể hiện ở điểm sau:

Thương trong phép chia A cho B là đa thức với hệ số hữu tỉ.

** Các chiến lược gắn liền với bài 4:*

S_1^4: Chiến lược đa thức thương với hệ số nguyên.

Phép chia không thể tiếp tục vì $\left(-x^2\right):\left(4x^2\right)=\frac{-1}{4}$ là số hữu tỉ.

Đa thức thương: x, đa thức dư: $-x^2-x-2$.

S_2^4 : Chiến lược đa thức thương với hệ số hữu tỉ.

Phép chia không thể tiếp tục vì dư bằng 0.

Đa thức thương: $x-\frac{1}{4}$, đa thức dư: 0.

❖ ***Bước 4. Thực nghiệm***

Đối tượng thực nghiệm

Thực nghiệm được tổ chức cho 161 HS lớp 8 của trường THCS Võ Việt Tân, Tiền Giang. Phân tích kết quả thu thập chúng tôi ghi nhận ở Bảng 3 dưới đây:

Kết quả và bình luận

Bảng 3. *Kết quả gắn liền với Bài 1*

Chiến lược / Số liệu	S_1^1	S_2^1	Không trả lời
Tổng số	112	15	34
Tỉ lệ	69,5%	9,3%	21,2%

Bảng 3 cho thấy, có 112/161 HS (69,5%) lựa chọn chiến lược S_1^1 để giải bài toán, trong đó có 46,6% HS mặc dù đã phân tích biểu thức $\left(n^2-1\right)$ thành nhân tử nhưng không quan tâm đến việc biến n phụ thuộc vào biến số mới (là thương của phép chia n cho 5) mà gán cho n các giá trị số cụ thể chia 5 dư 4 vào biểu thức $(n-1)(n+1)$ để được số cụ thể chia hết cho 5. Chẳng hạn, cách trình bày điển hình quan sát được là: "Thay n = 19 vào biểu thức $(n-1)(n+1)$ ta được $(19+1)(19-1)=20.18=360$ chia hết cho 5". Mặt khác, có 22,9% HS gán cho n giá trị số cụ thể vào biểu thức (n^2-1) rồi xét phép chia trên tập hợp các số cụ thể. Chẳng hạn, cách trình bày điển hình quan sát được là: "Thay n = 9 vào biểu thức (n^2-1) ta được 81-1= 80 chia hết cho 5".

Đặc biệt chỉ có 15/161 HS (**9,3%)** sử dụng S_2^1 để giải bài toán. ***Điều này cho thấy rất ít HS quan tâm đến điều kiện biến n phụ thuộc vào biến mới***. Như vậy, chúng tôi kiểm chứng được giả thuyết về sự tồn tại của quy tắc R1.

Bảng 4. *Kết quả gắn liền với Bài 2*

Chiến lược / **Số liệu**	S_1^2	S_2^2	**Không trả lời**
Tổng số	103	12	46
Tỉ lệ	63,9%	7,5%	28,6%

Bảng 4 cho thấy, có 103/161 HS (63,9%) lựa chọn chiến lược S_1^2 để giải bài toán, có thể lí giải về điều này vì biểu thức $(mn-2)$ không phân tích được thành nhân tử theo các biến m, n và HS không quan tâm đến các biến m, n phụ thuộc vào biến mới nên gán cho m, n các giá trị số thích hợp để giải bài toán. Chẳng hạn, cách trình bày điển hình quan sát được là: *"Cho m = 10 chia cho 3 dư 1 và n = 23 chia cho 3 dư 2 ta được* $(mn-2)$ *=10.23-2=228 chia hết cho 3"*.

Đặc biệt, chỉ có 12/161 HS (**7,5%)** sử dụng S_2^2 để giải bài toán. ***Điều này cho thấy rất ít HS quan tâm đến điều kiện các biến m, n phụ thuộc vào biến mới***. Như vậy, một lần nữa với Bài toán 2, chúng tôi kiểm chứng được sự tồn tại của quy tắc R1.

Bảng 5. *Kết quả gắn liền với bài 3*

Chiến lược / Số liệu	S_1^3	S_2^3	Không trả lời
Tổng số	126	35	0
Tỉ lệ	78,2%	21,8%	0%

Bảng 5 cho thấy, chỉ có 35/161 HS (21,8%) lựa chọn S_2^3 để giải bài toán, đặc biệt có đến 126/161 HS (78,2%) chọn chiến lược S_1^3 để giải bài toán với giải thích điển hình quan sát được là: "Không thể chia tiếp tục vì $(x^2):(-2x^2)=\frac{-1}{2}$ là phân số", "Phép chia không thể tiếp tục vì $(x^2):(-2x^2)=-0,5$ là số thập phân", "Phép chia không thể tiếp tục vì $(x^2):(-2x^2)$ kết quả không phải là số nguyên", "Phép chia dừng lại vì các hệ số của đa thức thương phải luôn là số nguyên", "Phép chia không thể tiếp tục vì thương có hệ số là phân số".

Các giải thích này đã chứng tỏ rằng đối với HS khi chia hai đa thức một biến với hệ số nguyên thì thương nhận được luôn là đa thức với hệ số nguyên. Như vậy, chúng tôi kiểm chứng được sự tồn tại của quy tắc R2 trong trường hợp phép chia có dư.

Bảng 6. *Kết quả gắn liền với Bài 4*

Chiến lược / Số liệu	S_1^4	S_2^4	**Không trả lời**
Tổng số	125	36	0
Tỉ lệ	77,6%	22,4%	0%

Bảng thống kê cho thấy, chỉ có 36/161 HS (22,4%) lựa chọn S_2^4 để giải bài toán, đặc biệt có đến 125/161 HS (77,6%) chọn chiến lược S_1^4 để giải bài toán với giải thích điển hình quan sát được là: "Không thể chia tiếp tục vì $\left(-x^2\right):\left(4x^2\right)=\frac{-1}{4}$ là phân số", "Phép chia không thể tiếp tục vì $\left(-x^2\right):\left(4x^2\right)=-0,25$ là số thập phân", Phép chia dừng lại vì các hệ số của đa thức thương phải luôn là số nguyên", "Phép chia không thể tiếp tục vì thương có hệ số là phân số".

Các giải thích này đã chứng tỏ rằng đối với HS khi chia hai đa thức một biến với hệ số nguyên thì thương nhận được luôn là đa thức với hệ số nguyên. Nhìn chung các giải thích ở bài toán này tương tự như giải thích ở bài toán 3. Như vậy, chúng tôi kiểm chứng được giả thuyết về sự tồn tại của quy tắc R2 trong trường hợp phép chia hết.

Tóm lại, quy tắc R2 đã được kiểm chứng trong cả hai trường hợp phép chia hết và phép chia có dư.

4. Kết luận

Để giải bài toán chứng minh biểu thức A(n) (phụ thuộc n) chia hết cho số tự nhiên a (a khác 0 và 1) HS chỉ quan tâm đến việc phân tích A(n) thành nhân tử, từ đó tìm được ngay điều phải chứng minh, sự phụ thuộc của biến n vào các biến mới không được xem xét. Do đó, dẫn đến HS mắc phải sai lầm khi giải bài toán trong trường hợp mà biến n phụ thuộc vào các biến mới.

HS đã ngầm hiểu rằng khi thực hiện phép chia hai đa thức một biến với hệ số nguyên thì kết quả nhận được thương luôn là đa thức với hệ số nguyên. HS phạm phải sai lầm trong trường hợp mặc dù các đa thức bị chia và đa thức chia đều là các đa thức một biến với hệ số nguyên, nhưng thương không phải là đa thức với hệ số nguyên.

Như vậy, dựa vào công cụ HĐDH chúng tôi đã phát hiện ra một số sai lầm của HS khi giải bài toán chia hết trên tập hợp số nguyên và bài toán chia đa thức một biến, thấy được sự ảnh hưởng của mối quan hệ thể chế lên quan niệm của HS.

Do khuôn khổ hạn chế của một bài báo nên trong nghiên cứu này, chúng tôi chưa đề cập các quy tắc của HĐDH gắn với các kiểu nhiệm vụ "Thực hiện phép chia đơn thức cho đơn thức" và "Thực hiện phép chia đa thức cho đơn thức". Điều này sẽ được thực hiện trong các nghiên cứu tiếp theo.

❖ ***Tuyên bố về quyền lợi:*** *Tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Annie Bessot, Claude Comiti, Le Thi Hoai Chau, & Le Van Tien (2009). *Nhung yeu to co ban cua Didactic Toan* [*The basic elements of math didactic*]. Ho Chi Minh City National University Publishing House.

Tran, A. D. (2011). “Hop dong day hoc” – Mot cong cu de nghien cuu sai lam cua hoc sinh [“Didactic contract” – A a tool to study students’ mistakes]. *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science*, (25), 78-87.

Phan, D. C. (2004). *Sach giao khoa Toan 8, tap 1* [*Math textbook 8, volume 1]*. Educational Publishing House.

Phan, D. C. (2004). Sach giao vien Toan 8, tap 1 [Math teacher book 8, volume 1]. Educational Publishing House.

Ton, T. (2004). *Sach bai tap Toan 8, tap 1* [*Math exercises 8 volume 1*]. Educational Publishing House.

ANALYSING STUDENTS’ MISTAKES WHEN SOLVING DIVISION AND POLYNOMIAL PROBLEMS FROM THE “DIDACTIC CONTRACT” APPROACH

Nguyen Thien Chi

Vo Viet Tan Secondary School, Tien Giang

Corresponding author: Nguyen Thien Chi – Email: thienchi67@gmail.com

Received: January 17, 2020; Revised: March 26, 2020; Accepted: November 25, 2020

ABSTRACT

In this article, we use the concept of “didactic contract” *introduced by Guy Brousseau in 1980 as a tool to analyse students’ mistakes.*

From the analysis of Math textbooks and exercises for Grade 8 volumes 1, this article proposes two rules of “didactic contract” *related to solving division and polynomial division problems: design situations to verify* “didactic contract” *and conduct an experiment.*

The research results show that many students commit mistake of solving these problems, which derived from the “didactic contract” *approach:*

“When students solve problems proving that A(n) (n is a natural number or an integer) is divisible by a natural number other than 0 and 1, students commit a mistake by not considering the condition of variable n depends on new variables” *and* “Students’ mistake in thinking that the quotient of a polynomial division of a variable with an integer coefficient is a polynomial with an integer coefficient”.

Keywords: division problems; polynomial division; didactic contract; student mistakes