TẠP CHÍ KHOA HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE

Tập 18, Số 8 (2021): 1524-1537

Vol. 18, No. 8 (2021): 1524-1537

ISSN: 2734-9918

Website: *http://journal.hcmue.edu.vn*

Bài báo nghiên cứu

MỘT PHÂN TÍCH TRI THỨC LUẬN LỊCH SỬ KHÁI NIỆM ÁNH XẠ LIÊN TỤC TRONG ℝ, KHÔNG GIAN MÊTRIC VÀ KHÔNG GIAN TÔPÔ

Nguyễn Ái Quốc

Trường Đại học Sài Gòn, Việt Nam

Tác giả liên hệ: Nguyễn Ái Quốc – Email: nguyenaq2014@gmail.com

Ngày nhận bài: 23-12-2020; ngày nhận bài sửa: 24-4-2021; ngày duyệt đăng: 10-6-2021

TÓM TẮT

Khái niệm ánh xạ liên tục trong ℝ, không gian mêtric và không gian tôpô là một trong những khái niệm trung tâm của Giải tích và là khái niệm quan trọng của tôpô. Bài báo này trình bày một phân tích tri thức luận lịch sử làm rõ quá trình hình thành và phát triển của khái niệm ánh xạ liên tục trong tập số thực ℝ, không gian mêtric, và không gian tôpô xuyên suốt qua các thời kì từ tiền sử đến hiện đại. Kết quả phân tích tri thức luận lịch sử giúp cho các giảng viên toán có thể hình dung được những trở ngại mà sinh viên ngành Toán gặp phải khi tiếp cận tri thức này để từ đó có thể thiết kế bài giảng một cách hợp lí hơn.

Từ khóa: hàm số liên tục; ánh xạ liên tục; phân tích tri thức luận; không gian mêtric; không gian tôpô

1. Đặt vấn đề

1.1. Sự cần thiết nghiên cứu tính liên tục

Ánh xạ liên tục trong ℝ, không gian mêtric và không gian tôpô được xem là một khái niệm trung tâm của giải tích và cũng là khái niệm then chốt của tôpô. Ánh xạ liên tục giải quyết nhiều vấn đề tổng quát trong giải tích hàm, không gian mêtric, lí thuyết thứ tự, lí thuyết miền… do đó, việc dạy học ánh xạ liên tục trong không gian mêtric và không gian tôpô ở bậc đại học chiếm một vai trò quan trọng. Chính vì thế, ánh xạ liên tục được dạy cho các sinh viên ngành Sư phạm Toán, Toán Ứng dụng của các trường đại học trong học phần Giải tích hàm và Tôpô ở năm ba và năm tư.

1.2. Tồn tại những quan niệm sai của sinh viên về tính liên tục

Thực tế dạy học cho thấy, tồn tại ở sinh viên ngành Toán một số sai lầm khi tiếp cận và giải quyết các bài toán liên quan đến ánh xạ liên tục trong tập số thực ℝ, không gian mêtric, và không gian tôpô. Để tìm hiểu về những khó khăn và sai lầm trong việc học khái niệm ánh xạ liên tục trong không gian mêtric và không gian tôpô của sinh viên, chúng tôi đã tiến hành khảo sát quan niệm của sinh viên Khoa Toán của hai Trường Đại học Sài Gòn và Đại học Khoa học Tự nhiên về khái niệm này.

Cite this article as: Nguyen Ai Quoc (2021). An historical-epistemological analysis of continuity in metric and topological spaces. *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science, 18*(8), 1524-1537.

Thực nghiệm được chúng tôi thực hiện dưới hình thức trả lời 2 câu hỏi khảo sát dưới dạng bài tập.

Tất cả các sinh viên tham gia khảo sát đều đã kết thúc học phần Giải tích Hàm và Tôpô đại cương, nghĩa là các sinh viên đã được học qua các chương không gian mêtric và không gian tôpô.

Mục tiêu của khảo sát nhằm tìm hiểu những khó khăn và quan niệm của sinh viên về tính liên tục của ánh xạ trong không gian mêtric và không gian tôpô. Thực nghiệm được tiến hành trên 18 sinh viên của hai trường nói trên. Nội dung thực hiện gồm 2 câu hỏi:

Phiếu khảo sát

Xét 2 không gian mêtric $(\mathbb{R}, d_1)$ và $(\mathbb{R}^2, d_2)$ với d_1, d_2 là các (Euclidean) mêtric thông thường được định nghĩa như sau:

$\forall x, y \in \mathbb{R}$, $d_1(x,y) = |x-y|$;

$\forall x, y \in \mathbb{R}^2, x = (x_1; x_2)$; $y = (y_1; y_2)$, $d_2(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$.

Hãy chứng tỏ rằng ánh xạ $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ xác định bởi $f(a,b) = a.b$ (phép nhân số thực) là một ánh xạ liên tục trên $\mathbb{R}^2$.

Câu trả lời mong đợi:

Chiến lược 1. Chứng minh bằng định nghĩa theo $\varepsilon - \delta$.

Để chứng minh rằng f liên tục tại (a,b), cần chứng tỏ rằng với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại một số $\delta > 0$ sao cho: nếu $d_2((a,b),(u,v)) < \delta$ thì $d_1(f(a,b), f(u,v)) = d_1(ab, uv) < \varepsilon$.

Giả sử rằng $d_2\big((a,b),(u,v)\big) = \sqrt{(a-u)^2 + (b-v)^2} < \delta$.

Với $\delta > 0$. Ta có $|a-u| < \delta, |b-v| < \delta$ và

$$d_1(ab,uv) = |ab - uv| = |b(a-u) + a(b-v) + (a-u)(v-b)|$$
$$\leq |b|.|a-u| + |a|.|b-v| + |a-u|.|b-v| < \delta^2 + \delta(|a|+|b|).$$

Khi đó với $\varepsilon > 0$, ta đặt: $\delta^2 + \delta(|a|+|b|) = \varepsilon \Longrightarrow \delta = \frac{-(|a|+|b|)+\sqrt{(|a|+|b|)^2+4\varepsilon}}{2}$.

Đối với lựa chọn cụ thể này của δ,

nếu $d_2((a,b),(u,v)) < \delta$ thì $d_1(f(a,b), f(u,v)) = d_1(ab,uv) < \varepsilon$.

Do đó ánh xạ f liên tục trên $\mathbb{R}^2$.

Chiến lược 2. Chứng minh bằng dãy hội tụ

Xét $(a_n, b_n) \to (a,b)$ trên $\mathbb{R}^2$, thì $\begin{cases} a_n \longrightarrow a \\ b_n \longrightarrow b \end{cases}$, do đó $a_n.b_n \longrightarrow a.b$.

Suy ra $f(a_n, b_n) \longrightarrow f(a,b)$ *trên* $\mathbb{R}$.

Do đó f liên tục trên $\mathbb{R}^2$.

Kết quả khảo sát:

Trả lời		Lời giải đúng	Lời giải sai	Không trả lời
Kĩ thuật	Chứng minh theo định nghĩa ngôn ngữ $\varepsilon - \delta$	0	2	7
	Chứng minh theo dãy hội tụ	4	3	
	Chứng minh theo cách khác	0	2	
Tổng		4/18 (22,2%)	7/18 (38,9%)	7/18 (38,9%)

Trong 4/18 (22,2%) sinh viên đưa ra lời giải đúng không có sinh viên nào trong số đó lựa chọn cách chứng minh dựa theo định nghĩa ngôn ngữ $\varepsilon - \delta$ mà tất cả đều lựa chọn chứng minh thông qua dãy hội tụ, chỉ có 2 sinh viên lựa chọn chứng minh theo định nghĩa ngôn ngữ $\varepsilon - \delta$ nhưng lại không hoàn thành được lời giải.

Trong 7 sinh viên đưa ra lời giải sai, chúng tôi ghi nhận được một số quan niệm của sinh viên như sau:

Sinh viên 1: "f là ánh xạ tuyến tính nên f liên tục".

Sinh viên 2: "f liên tục lại $(0;0)$ nên f liên tục trên $\mathbb{R}^2$".

Sinh viên 3: "Vì ánh xạ f đi từ $(\mathbb{R}, d_1)$ đến $(\mathbb{R}^2, d_2)$ là các không gian với mêtric thông thường và xác định tại mọi điểm của R^2 nên liên tục.

Có 7 sinh viên không đưa ra câu trả lời.

Có tất cả 14/18 Sinh viên (77,78%) không đưa ra câu trả lời chính xác hay không trả lời.

Như vậy, qua thống kê ban đầu cho thấy sinh viên đã gặp khó khăn trong việc nghiên cứu và học tập liên quan đến khái niệm ánh xạ liên tục trong không gian mêtric. Đặc biệt là việc hiểu và vận dụng định nghĩa ánh xạ liên tục qua ngôn ngữ $\varepsilon - \delta$ để giải quyết bài toán chứng minh ánh xạ liên tục. Đồng thời tồn tại ở sinh viên một số quan niệm sai về tính liên tục của ánh xạ trong không gian mêtric như: "Ánh xạ tuyến tính thì liên tục", "liên tục tại điểm 0 thì liên tục tại mọi điểm", hay "ánh xạ xét trên các không gian có mêtric thông thường thì liên tục". Có thể dự đoán quan niệm sai lầm này của sinh viên xuất phát từ việc nhầm lẫn khái niệm liên tục của ánh xạ trong không gian mêtric và không gian định chuẩn, hay các hàm sơ cấp xác định ở đâu thì liên tục ở đó.

Tổng kết từ hai kết quả khảo sát trên, cho thấy tính trừu tượng trong khái niệm ánh xạ liên tục trong không gian mêtric góp phần trong việc dẫn đến một số khó khăn cho sinh viên trong việc tiếp cận, hiểu và vận dụng để giải quyết các bài toán chứng minh hay xét một ánh xạ liên tục. Bên cạnh đó, tồn tại ở sinh viên một số quan niệm sai lầm về khái niệm ánh xạ liên tục trong không gian mêtric.

2. Nội dung

2.1. Tính liên tục trong không gian mêtric và tôpô

Khái niệm ánh xạ liên tục tại một điểm trong không gian số thực $\mathbb{R}$ như trên, ở bậc đại học sẽ được định nghĩa thông qua hình thức ngôn ngữ $\varepsilon - \delta$:

Một hàm số f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ là liên tục tại điểm a nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ với mọi x bất kì sao cho $|x - a| < \delta$." (Wilson, 2009, p.29)

Đặc biệt, trong không gian mêtric và tôpô khái niệm ánh xạ liên tục tại một điểm không chỉ được định nghĩa thông qua các ngôn ngữ mang tính trừu tượng cao như ngôn ngữ $\varepsilon - \delta$, ngôn ngữ dãy hội tụ mà còn bằng ngôn ngữ tôpô thông qua tập ảnh ngược và tập mở:

Định nghĩa ánh xạ liên tục trong không gian mêtric:

"Giả sử rằng (X, d_X) và (Y, d_X) là các không gian mêtric và cho $f: X \longrightarrow Y$ là một ánh xạ.

(a) Ta nói f liên tục tại $x_0 \in X$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\delta > 0$ sao cho $d_Y\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$ khi $d_X(x, x_0) < \delta$.

(b) Ta nói f liên tục nếu f liên tục tại mọi $x_0 \in X$." (Sutherland, 2009, p.40).

Định nghĩa tính liên tục trong không gian tôpô theo ngôn ngữ tập mở: "Ánh xạ là liên tục nếu và chỉ nếu ảnh ngược của tập mở là tập mở" (Wilson, 2009, p.55).

2.2. *Phân tích tri thức luận lịch sử khái niệm ánh xạ liên tục trong R, không gian mêtric và tôpô*

- ***Quá trình hình thành khái niệm ánh xạ liên tục***

Khái niệm liên tục xuất hiện trong lịch sử như một thuộc tính tổng thể liên quan đến tất cả các điểm của một khoảng, trước khi trở thành thuộc tính cục bộ của một hàm liên quan đến các điểm của một vùng lân cận của *x*. Trong quá trình phát triển, khái niệm liên tục dần dần đi từ ý tưởng vật lí, trực quan và ngầm ẩn sang khái niệm liên tục của một hàm mà bây giờ chúng ta biết cách xây dựng và định nghĩa về mặt toán học, và điều này phải trải qua một số giai đoạn.

\+ **Thời kì tiền sử**

Đối với người Hi Lạp cổ đại, tính liên tục được nhận thức bằng ý nghĩa, nó ngầm ẩn trong một số suy luận của họ. Chẳng hạn, tính liên tục ngầm ẩn trong suy luận của Zeno khi ông phát biểu các nghịch lí "Achilles và con rùa" và "Phân đôi". Những nghịch lí này xuất hiện như là sự đối lập của hai phương diện: phương diện rời rạc và phương diện liên tục. Trong nghịch lí "Achilles và con rùa", Zeno phát biểu bài toán hàm chứa đồng thời các giả thuyết mâu thuẫn: vô hạn đối lập với hữu hạn, liên tục đối lập với không liên tục.

Đối với Aristoteles, cái liên tục là cái có thể chia thành những phần luôn luôn có thể chia được, và tính liên tục không thể nhận thức được nếu không có mối liên hệ mật thiết giữa các phần tử của nó. Định nghĩa này vẫn không vận hành được ngay cả khi Aristoteles thành công trong việc tách biệt hai khái niệm tiếp giáp và liên tục.

Theo Dhombres (Dhombres, 1978, p.85), Eutocius (480-540) đưa ra định đề về đường thẳng là ngắn nhất trong số các đường có cùng các điểm mút. Ông lập luận bằng cách vẽ một đường đa giác nội tiếp trong đường cong *AB* và bằng cách sử dụng nhiều lần và liên tục kết quả "một cạnh của tam giác nhỏ hơn tổng của hai cạnh kia" để cho thấy rằng các đường thẳng xấp xỉ *AB* thì lớn hơn đường thẳng *AB*.

Theo hệ thống thái dương hệ của Ptolemaeus, vị trí của Mặt Trời, Mặt Trăng và các hành tinh được xem là thay đổi liên tục và định kì theo thời gian. Việc xác định các vị trí này được Ptolemaeus thực hiện theo các phương pháp chuẩn được sử dụng để biên soạn các bảng thiên văn khác nhau.

Theo Youschkevich (Youschkevich, 1981, p.15), cả hàm số và tính liên tục của hàm số không được nói rõ trong các công trình này, khái niệm về hàm số không tồn tại một cách tường minh trong toán học Hi Lạp: Những ý tưởng về sự thay đổi và đại lượng biến thiên không hề xa lạ với tư tưởng của người Hi Lạp. Các bài toán về chuyển động, liên tục và vô hạn đã được nghiên cứu từ thời Heraclitus hay Zeno của xứ Elea, và hầu hết phần lớn “Vật lí” hay triết học tự nhiên của Aristoteles đã được dành cho việc nghiên cứu những câu hỏi này.

+ **Thời kì Trung cổ đến cuối thế kỉ XVI**

Đối với các nhà toán học Ả Rập Hồi giáo, tính liên tục cũng mang tính trực giác và ngầm ẩn, một số người thì xem nó là điều hiển nhiên. Ý tưởng về tính liên tục là cơ sở cho suy luận của Eljaouhari (cuối thế kỉ VIII và đầu thế kỉ IX) khi ông đề xuất một phương pháp vẽ các hình bình hành dựa trên định đề thứ 5 của Euclide: “Tất cả các điểm của một vật thể trong chuyển động thẳng đơn giản hình thành các đường thẳng trong chuyển động của chúng.”

Thabit Ibn Qurra (826-901) sử dụng quy trình vét cạn trong chuyên luận “Về tính toán các paraboloid” để chứng minh một mệnh đề thiết yếu cho việc tính thể tích của một vật rắn nội tiếp trong một mái vòm và được tạo thành từ một hình nón và một dãy hình nón cụt. (Katz, 2009, p.305)

Vào thế kỉ XIV, Oresme (1323-1382) đã sử dụng biểu diễn đồ họa đầu tiên để mô tả một hiện tượng thay đổi theo thời gian dựa trên công trình của các triết gia học thuật của Đại học Merton, Oxford. Các triết gia này trong cùng khoảng thời gian đã bắt đầu khám phá ý tưởng biểu diễn vận tốc, cũng như các đại lượng khác nhau, bằng các đoạn thẳng. Trong một tác phẩm có tựa đề *Tractatus de configurationibus Qualitatum et motum* (Chuyên luận về cấu hình của các phẩm chất và sự vận động) vào khoảng năm 1350, Oresme mô tả phương pháp biểu thị một đại lượng trong mối quan hệ với một đại lượng khác. Phương pháp này, được gọi là *Latitude des formes*[1], cho phép ông biểu diễn bằng đồ thị các biến thiên về cường độ của một phẩm chất: tốc độ, nhiệt, cường độ ánh sáng. Trong biểu diễn đồ họa này, các kinh độ được biểu diễn trên một đường thẳng nằm ngang và các vĩ độ trên một đường thẳng đứng. Kinh độ là cái mà ngày nay chúng ta gọi là giá trị của biến độc lập và vĩ độ là giá trị của biến phụ thuộc. Các biến thiên được phân thành ba loại: đồng dạng, dị dạng đồng nhất và dị dạng sai lệch.

+ **Thời kì Phục Hưng (Thế kỉ XVI đến cuối thế kỉ XVIII)**

Kepler (1571-1630) là một trong những người đầu tiên sử dụng phép biến đổi liên tục của một hình hình học thành một hình khác: Kepler chỉ ra trong cuốn *Astronomia Per Optica* của mình rằng các mặt cắt cônic khác nhau thu được bằng cách thay đổi "một cách liên tục" độ nghiêng của mặt phẳng cắt. Tương tự như vậy, trong tác phẩm *Nova Stereometria Doliorum*, Kepler đã bỏ qua phương pháp chứng minh bằng phản chứng bao gồm phương pháp vét kiệt và sử dụng giới hạn. Do đó, chu vi của hình tròn được xác định bằng một đa giác có số cạnh lớn vô hạn và các cạnh ngắn vô hạn, và Kepler đã sử dụng nguyên lí cơ bản về sự thay đổi liên tục để suy ra diện tích của hình tròn là πR^2 từ chu vi

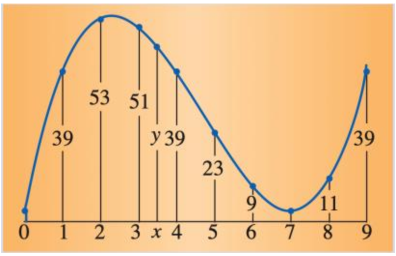
[1] Tạm dịch: Vĩ độ của hình dạng

hình tròn ($2\pi R$) và từ tỉ số giữa diện tích của một đa giác nội tiếp với chu vi đường tròn. (Katz, 2009, p.514)

Cavalieri (1598-1647) xem một bề mặt là một chồng các đoạn thẳng có một kích thước duy nhất và một thể tích như được hình thành từ các bề mặt phẳng. Ông đã xuất bản tác phẩm *Geometria Indivisibilibus Continuorum No va Quodam Ratione Promota* (Hình học của những cái liên tục không thể phân chia được theo một phương pháp mới), trong đó ông xử lí những cái "không thể phân chia được" mặc dù không định nghĩa chúng, và không xem những cái "không thể phân chia được" là những cái nhỏ vô hạn.

Bằng cách áp dụng đại số mới vào hình học và bằng cách trình bày phương pháp giải tích giới thiệu các hàm số, Descartes (1596-1650) đã mở ra một kỉ nguyên mới cho toán học. Youschkevitch (1981, p.26) trích dẫn nhận định của Hankel (1839-1873): "Toán học mới có từ thời Descartes, bắt đầu từ nghiên cứu đại số thuần túy về phương trình, dẫn đến việc nghiên cứu các biến thiên của các đại lượng tham gia vào các biểu thức đại số, bằng cách coi chúng là các đại lượng phát triển một cách liên tục."

Mặc dù, nghiên cứu độc lập với Descartes, Fermat (1601-1665) cũng sử dụng phương pháp giải tích khi giới thiệu các hàm và thể hiện ý tưởng về sự biến thiên liên tục của các đại lượng trong cuốn *Introduction aux lieux plans et solides* (Nhập môn quỹ tích hình phẳng và hình khối) được xuất bản năm 1679. Theo Youschkevich (1981, p.25): "Ngay khi một phương trình chứa hai đại lượng chưa biết, thì có một quỹ tích tương ứng và một "cực điểm"[2] của một trong các đại lượng này vạch nên một đường thẳng hoặc đường cong." Ví dụ, ta xét phương trình $y = x^3 - 14x^2 + 49x + 3$ chứa hai đại lượng chưa biết là x và y. Quỹ tích là đường cong được vạch nên bởi một cực điểm của đại lượng y và đoạn thẳng xy có độ dài thay đổi liên tục (Hình 1).



***Hình 1.** Mối liên hệ giữa x và y theo Fermat*

Newton (1642-1727) đã khởi đầu những thay đổi lớn trong toán học nhờ lí thuyết về đạo hàm của ông. Ông coi đường cong không còn là một tập hợp các điểm với một tính chất nhất định, mà là quỹ đạo của một điểm chuyển động. Đối với ông, đường cong là liên tục theo nghĩa là nó được biểu diễn bằng một đường liên tục:

[2] *Cực điểm là đầu mút của đoạn thẳng xy có độ dài là y với đầu mút kia đặt tại điểm x trên một trục.*

> Tôi không xem các đại lượng toán học được hình thành từ các bộ phận dù nhỏ, nhưng được vạch nên từ một chuyển động liên tục. Các đường được vạch nên và tạo ra, không phải bởi sự đặt cạnh nhau các phần của chúng, mà bởi sự chuyển động liên tục của các điểm; bề mặt được vạch nên bởi sự chuyển động của các đường; vật thể được tạo nên do chuyển động của các bề mặt; góc bởi sự quay của các cạnh; thời gian bởi một dòng chảy liên tục. (Dhombres, 1978, p.164)

Leibniz (1646-1716) công bố trong *Nouveaux Essais Sur l'Entendement Humain* (Những tiểu luận mới về hiểu biết của con người) nguyên tắc của ông về quy luật liên tục phản ánh triết học mà theo đó vũ trụ được hình thành từ những vật thể "du mục" không thể phân biệt, có thứ bậc và được kết nối liên tục. Ông tuyên bố thêm:

> "Không có gì xảy ra cùng một lúc, đó là một trong những châm ngôn tuyệt vời của tôi và là một trong những câu châm ngôn được kiểm chứng rõ ràng nhất, rằng bản chất không bao giờ thay đổi. Tôi gọi đây là quy luật liên tục." Dhombres (1978, p.177)

Theo Euler (1707-1783), một đường cong tương ứng với một hàm số của *x*, ngược lại một hàm số của *x* biểu thị một đường cong. Trong tập 2 của tác phẩm "Giới thiệu về giải tích vô cực", ông chỉ ra sự tồn tại của các hàm thuộc một loại khác mà ông phân loại thành các hàm hoặc các đường cong liên tục và các hàm không liên tục hoặc hỗn hợp. (Youschkevitch, 1981, p.40)

Đối với Euler, tính liên tục của một hàm được định nghĩa bởi tính bất biến của quy luật hoặc phương trình xác định hàm trên toàn bộ miền giá trị của biến. Youschkevitch (1981, p.46) viết chi tiết về quan điểm của Euler trong cuốn hồi kí của ông "De usu functionum disontinuarum in analysi" (Các hàm không liên tục trong giải tích), xuất bản năm 1767:

> Các hàm "liên tục" được định nghĩa dưới dạng hình ảnh hình học, bằng cách giả sử không chỉ rằng mối quan hệ giữa tọa độ của tất cả các điểm của một đường cong như vậy được xác định bởi một và cùng một phương trình, [...] Tất cả các phần của đường cong (liên tục) được gắn với nhau bằng liên kết gần nhất để thực hiện bất kì thay đổi nào trong nó mà không làm ảnh hưởng đến mới liên kết liên tục.

Do đó, theo Euler, các hàm liên tục là những hàm được xác định bằng một biểu thức giải tích duy nhất, chúng tương ứng với các hàm khả vi của chúng ta và các hàm không liên tục tương ứng với những hàm mà ngày nay được gọi là khả vi từng phần. Lưu ý rằng vào thời của ông, phần lớn các hàm được sử dụng được biểu thị dưới dạng biểu thức giải tích trên miền xác định của chúng và do đó thuật ngữ "biểu thức giải tích" được coi là đương nhiên. Hơn nữa, Euler không định nghĩa thuật ngữ này một cách rõ ràng, ông chỉ liệt kê các phép toán đại số mà qua đó hợp thành biểu thức giải tích. Ý nghĩa của thuật ngữ này xuất hiện từ các hàm mà ông đã xem xét trong phần còn lại của cuốn sách của mình.

Euler sử dụng hai định nghĩa cho từ 'hàm số'. Thật vậy, đôi khi "hàm" được coi là quan hệ giữa *x* và *y* và được biểu diễn trên mặt phẳng bằng một đường cong được vẽ bằng tay, và đôi khi lại biểu thị một đại lượng được hình thành như một biểu thức giải tích với các hằng số và biến số. Hai định nghĩa cạnh tranh này được tìm thấy trong lịch sử sau này, chẳng hạn như Fourier (1768-1830) sẽ áp dụng định nghĩa đầu tiên trong khi Lagrange (1736-1813) sẽ theo đuổi ý tưởng được thể hiện trong định nghĩa thứ hai. Nhưng Fourier còn đi xa hơn nhiều vì ông xem xét các hàm liên tục theo từng mảnh.

+ **Thời kì nghiêm ngặt hóa giải tích**

Vào đầu thế kỉ XIX đã có một tiến triển quan trọng trong giải tích, phần lớn thông qua hoạt động giảng dạy của các nhà toán học thời đó, trong đó có Lagrange. Giống như Euler, ông tin chắc rằng bất kì hàm nào cũng có thể được khai triển thành chuỗi số nguyên, và không cảm thấy cần thiết phải định nghĩa tính liên tục, mặc dù nó ngầm ẩn trong các suy luận của ông. Lagrange ngầm ẩn sử dụng tính liên tục, chứng minh của ông dựa trên ý tưởng hình học trực quan về tính liên tục mà ông biện minh như sau: Chúng ta luôn có thể tìm thấy một hoành độ *i* tương ứng với một tung độ nhỏ hơn một đại lượng cho trước, và sau đó mọi giá trị nhỏ hơn của *i* cũng sẽ đáp ứng cho các tung độ nhỏ hơn đại lượng cho trước. (El Bouazzaoui, 1988, p.80)

Giống như Lagrange, Arbogast (1759-1803), cũng không cảm thấy cần phải đưa ra định nghĩa về tính liên tục hay không liên tục của một hàm mặc dù ông đã sử dụng nó trong các tác phẩm của mình, chẳng hạn như định nghĩa về các hàm tùy ý. Cũng như Lagrange, ông áp dụng quan điểm của Euler về các hàm liên tục, nhưng bổ sung thêm một số chi tiết, đặc biệt là tính liên tục của Euler có thể bị phá hủy trong hai trường hợp: khi các phần khác nhau của đường cong không kết hợp với nhau và khi hàm không chính quy, nghĩa là hàm không tuân theo bất kì quy luật nào cho bất kì khoảng nào, dù nhỏ đến đâu.

Chasles (1793-1880) là một trong những người đầu tiên theo quan niệm của Euler về sự liên tục. Trong tác phẩm *Fragment sur les fonctions discontinues* (Phân mảnh trên các hàm không liên tục), ông chỉ ra sự tồn tại của các hàm có các biểu thức giải tích khác nhau trong các miền khác nhau của một khoảng hữu hạn và được biểu diễn bằng một phương trình duy nhất. Điều này có nghĩa là chúng vừa "không liên tục" vừa "liên tục" theo nghĩa của Euler.

Bolzano (1781-1848) là một trong những kiến trúc sư của nỗ lực nghiêm ngặt hóa được thực hiện trong toán học. Ông đặt ra những vấn đề sâu sắc nhất về nền tảng của giải tích. Luận án của ông (1817) mang tên *Démonstration purement analytique du théorème: entre deux valeurs quelconques qui donnent deux résultats de signes opposés se trouve au moins une racine réelle de l'équation* (Chứng minh giải tích thuần túy định lí: giữa hai giá trị bất kì có dấu đối nhau, có ít nhất một nghiệm thực của phương trình) tập hợp các định nghĩa chặt chẽ về tính liên tục và đạo hàm của một hàm số, cho cái nhìn tổng quan về các mối quan hệ thống nhất giữa tính khả vi và tính liên tục của một hàm.

Ông đưa ra định nghĩa đầu tiên về một hàm số liên tục xoay quanh khái niệm giới hạn: "Nói rằng một hàm số của biến số thực x là liên tục, với mọi giá trị của x thuộc một khoảng cho trước, nghĩa là: nếu x là một giá trị bất kì như vậy, hiệu số $f(x-w)-f(x)$

có thể nhỏ hơn bất kì độ lớn nào đã cho nếu chúng ta luôn có thể lấy w nhỏ như chúng ta muốn.” (Dieudonné, 1986, p.242)

Theo Guillemont (1990), định nghĩa về tính liên tục mà Bolzano đưa ra được diễn đạt về mặt hình thức tương ứng với :

$(\forall x \in I)(\forall \varepsilon > 0)(\exists \eta > 0)(\forall \omega \in R)(|\omega| < \eta \Longrightarrow |f(x+\omega) - f(x)| < \varepsilon.$

Các dấu giá trị tuyệt đối mặc dù không được đưa ra bởi định nghĩa này, nhưng được Bolzano ngụ ý. Ở đây, tính liên tục đã được giải phóng chính thức khỏi sự hỗ trợ hình học của nó để trở thành một khái niệm số học. Đó chính là định nghĩa về liên tục mà hiện nay đang được sử dụng.

Trong luận án của mình (1817), Bolzano đã đưa ra một định nghĩa về tính liên tục một vài năm trước Cauchy, trong đó ông nhấn mạnh đặc tính địa phương của tính liên tục bằng cách xem xét tính liên tục tại một điểm và nghiên cứu riêng biệt tính liên tục bên trái và bên phải tại một điểm. Ông tách khái niệm liên tục khỏi khái niệm khả vi và xây dựng trong lí thuyết về hàm của ông một ví dụ về hàm liên tục trên một khoảng đóng mà không có đạo hàm tại bất kì điểm nào của khoảng này. (Barra & Pensec, 1976-77, p.61)

Cauchy (1789-1857) đã sử dụng khái niệm về giới hạn của ông trong định nghĩa tính liên tục (theo nghĩa hiện đại) và sự hội tụ của chuỗi số và chuỗi hàm. (Katz, 2009, p.765). Cauchy đã tiếp tục các cố gắng của Lagrange nhằm cung cấp cho khoa học toán học một nền tảng vững chắc. Tác phẩm *Cours d'Analyse* (Bài giảng về Giải tích) của Cauchy được xuất bản năm 1821 và dành cho việc giảng dạy của ông tại Đại học Bách khoa, đã mở đường cho giải tích hiện đại thông qua tính chặt chẽ và rõ ràng theo phong cách của ông.

Để định nghĩa tính liên tục, Cauchy cũng giống như những người tiền nhiệm của mình, ngoại trừ Bolzano, không sử dụng trực giác hình học, mà chính xác hơn ông sử dụng khái niệm giới hạn và các đại lượng vô cùng bé. Đối với ông, tính liên tục trở thành một khái niệm toán học theo đúng nghĩa của nó mặc dù định nghĩa của nó vẫn chưa hoàn toàn được toán học hóa. Tính liên tục không còn được coi là thuộc tính của một đường cong hoặc của một hàm, một thuộc tính vốn có trong một chủ đề toán học, mà là một quan hệ cơ bản sẽ đóng vai trò như một công cụ để nghiên cứu một hàm số: “Hàm số $f(x)$ liên tục trong các giới hạn cho trước nếu giữa các giới hạn này một số gia nhỏ vô hạn *i* trong biến *x* luôn tạo ra một số gia nhỏ vô hạn $f(x+i) - f(x)$ trong chính hàm số.” (Merzbach & Boyer, 2011, p.456)

Trong “Luận văn về các hàm liên tục” xuất bản năm 1844, Cauchy đã phá hủy sự đặc trưng hóa của Euler về các hàm “liên tục” là những hàm được xác định bởi một và chỉ một phương trình đại số, điều mà Chasles đã ám chỉ vào năm 1780 trong tác phẩm “Phân mảnh trên các hàm không liên tục”. Cauchy cho thấy rằng sự đặc trưng hóa này là không thể xác định được, bằng cách đưa ra ví dụ về hàm: $f\ (x) = x$ nếu $x > 0$ và $f(x) = -x$ nếu $x < 0$ hay $x = 0$, do đó được viết là không liên tục theo nghĩa của Euler, nhưng có thể được biểu diễn bằng một và cùng một phương trình $y = \sqrt{x^2}$ với *x* thuộc R, và sẽ là “liên tục” theo nghĩa của Euler. Mặc dù vậy, thuật ngữ của Euler sẽ vẫn được sử dụng cho đến khi Bolzano và Cauchy đưa ra định nghĩa liên tục được biết đến ngày nay.

Darboux (1842-1917), trong luận án của ông xuất bản năm 1875, đưa ra định nghĩa về tính liên tục như một tính chất địa phương bằng cách nói: "Một hàm $f(x)$ được cho là liên tục đối với giá trị $x = x_0$, khi chúng ta có thể lấy h đủ nhỏ để chúng ta có: $|f(x_0 + \theta h) - f(x_0)| < \varepsilon, \theta$ có thể nhận tất cả các giá trị dương nhỏ hơn 1 và ε cũng nhỏ như chúng ta muốn." (Groupe d'histoire des mathématiques de l'IREM de Paris Nord, 1978, p.20)

Darboux cũng đưa ra định nghĩa đầu tiên về tính liên tục trong một khoảng đóng: "Chúng ta nói rằng một hàm là liên tục trong một khoảng (x_0, x_1) trong đó $x_0 < x_1$ khi nó liên tục trên tất cả các giá trị của x giữa x_0 và x_1 và chúng ta cũng có $\lim f(x_0 + h) = f(x_0)$, $lim(x_1 - h) = f(x_1)$ khi h tiến đến 0 bởi các giá trị dương. Các điều kiện cuối cùng này được thỏa mãn nếu hàm liên tục với các giá trị x_0, x_1 của x ". (Monna, 1972, p.65)

Như vậy, Darboux là người đầu tiên đưa ra định nghĩa liên tục của hàm trên một khoảng đóng. Các định nghĩa của ông cũng được xem là những định nghĩa đầu tiên đầy đủ cho đến ngày nay. Cho đến lúc đó, một số nhà toán học thường định nghĩa hàm liên tục là hàm không thể lấy từ giá trị này sang giá trị khác mà không đi qua tất cả các giá trị trung gian và xem định nghĩa này tương đương với định nghĩa của Cauchy.

Dirichlet (1805-1859), đưa ra một định nghĩa về hàm số liên tục: "Gọi a và b là hai giá trị cố định và x là một đại lượng biến thiên, nằm giữa a và b. Nếu với mọi x cho tương ứng một giá trị hữu hạn $y = f(x)$ biến thiên liên tục khi bản thân x biến thiên liên tục từ a đến b, ta sẽ nói rằng f là một hàm liên tục trên khoảng này (Groupe d'histoire des mathématiques de l'IREM de Paris Nord, 1978, p.20).

Dirichlet giải quyết các hàm không liên tục có số các điểm gián đoạn có thể đếm được và xây dựng ví dụ nổi tiếng của ông về hàm không liên tục tại mỗi điểm của khoảng $(0, 1)$, $f(x) = 0$ với mọi giá trị hữu tỉ của x và $f(x) = 1$ với mọi giá trị vô tỉ của x. Hàm này tạo thành một ví dụ về một hàm tùy ý thực sự được xác định trên $\mathbb{R}$ và cung cấp cho giải tích một phản ví dụ rất quan trọng (đặc biệt, $f(x)$ không khả tích theo nghĩa Riemann).

Weierstrass (1815-1897), cải thiện công việc của Bolzano và Cauchy bằng cách sử dụng một cách có hệ thống công thức bằng epsilon và eta cũng như cho các định nghĩa và các định lí. Ông cũng cố gắng xác định định nghĩa về tính liên tục từ trực giác của chuyển động liên tục mà chúng ta tìm thấy trong biểu thức "một biến số tiến gần một giới hạn" có trong cả định nghĩa của Bolzano và Cauchy và điều này ngầm gợi ý về thời gian và chuyển động Boyer (1959, p.286).

Weierstrass đề xuất một định nghĩa về tính liên tục tương đương với định nghĩa của hai nhà toán học này, nhưng chính xác hơn: "$f(x)$ liên tục tại $x = x_0$, nếu với mọi giá trị x trong "vùng lân cận" của x_0 và với bất kì số dương nhỏ tùy ý ε, có thể tìm thấy "vùng lân cận" của x_0 sao cho với mọi giá trị của x trong vùng lân cận này, hiệu $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

khi $|x - x_0| < \eta$". Lần đầu tiên chúng ta có thể nhận thấy phần giới thiệu của các diễn đạt "với mọi giá trị của x_0" và "có thể". Những định lượng này làm cho định nghĩa này trở thành định nghĩa phức tạp nhất cho đến lúc đó (Dhombres, 1987, p.187).

+ Không gian mêtric của Fréchet và Không gian tôpô của Hausdorff

Theo Gregory (2008, p.229), Fréchet đã có thể khái quát hóa kết quả Weierstrass, bằng cách sử dụng định nghĩa của ông về tính liên tục, là thuộc tính ngày nay thường được gọi là tính liên tục dãy: Một hàm f là liên tục tại a trong tập đóng E nếu $lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$ cho mọi dãy $\{a_n\}$ trong E hội tụ về a.

Theo Katz (2009, p. 887), Hausdorff (1868-1942) định nghĩa tính liên tục bằng cách sử dụng khái niệm lân cận. Cụ thể, ông đã lấy định nghĩa $\varepsilon - \delta$ tiêu chuẩn về tính liên tục cho các hàm của một biến thực, lưu ý rằng định nghĩa này sử dụng các lân cận trên đường thực, và sau đó chuyển nó thành định nghĩa tổng quát cho các không gian tôpô: "Hàm $y = f(x)$ được gọi là liên tục tại điểm a, nếu với mỗi lân cận V_b của điểm $b = f(a)$ tồn tại một lân cận U_a của điểm a, có ảnh nằm trong V_b, tức là $f(U_a) \subseteq V_b$." Sau đó, Hausdorff tạo ra một định nghĩa tương đương: Hàm $f: A \to B$ liên tục tại a nếu và chỉ nếu, với mỗi tập con Q của B mà $b = f(a)$ là một điểm trong, ảnh nghịch đảo $f^{-1}(Q)$ cũng chứa điểm a như một điểm trong.

2.3. *Một số kết quả từ phân tích tri thức luận lịch sử*

2.3.1. Nguyên nhân ra đời khái niệm liên tục

Phân tích của chúng tôi xuyên qua các giai đoạn lịch sử của khái niệm liên tục cho phép xác định các nhóm bài toán chính đã cho phép khái niệm này hình thành và phát triển.

Trước hết, là các bài toán hình học phản ánh bản chất của các đại lượng hình học. Những vấn đề đặt ra liên quan đến hình học luôn được xem là thiết yếu để có thể hiểu được các khía cạnh nhất định của khái niệm liên tục. Tuy nhiên, các ý tưởng nghiên cứu khái niệm liên tục đến một lúc nào đó lại gặp nhiều trở ngại khi dựa trên nền tảng của hình học, và đòi hỏi các nhà toán học phải rời bỏ quan điểm hình học để đặt mình vào lĩnh vực số. Sự chuyển tiếp này là cần thiết nhưng rất khó khăn như đã thấy với các nhà toán học của thế kỉ XVII, điển hình là Cauchy đã không chắc chắn tách rời khỏi tầm nhìn hình học vì định lí giá trị trung gian của ông vẫn được xem là một hình ảnh hình học đơn giản. (Mawfik, Boukhssimi, & Lamrabet, 2001, p. 42)

Bài toán đặt ra quan trọng thứ hai cũng có nguồn gốc hình học, nhưng bản thân nó nhanh chóng trở thành một bài toán về sự khai triển hàm thành các chuỗi số nguyên.

Cuối cùng, bài toán đặt ra thiết yếu thứ ba là tôpô, nó liên quan đến các phép biến đổi liên tục và các phép đồng phôi. Vấn đề này xuất hiện trong các công trình của Cantor, Fréchet, và Hausdorf. (Mawfik, Boukhssimi,& Lamrabet, 2001, p. 42)

2.3.2. Quan niệm ảnh hưởng lên sự hình thành khái niệm liên tục

Sự hình thành khái niệm ánh xạ liên tục chịu ảnh hưởng của các quan niệm hình học xuyên suốt các thời kì tiền sử, Phục Hưng; quan niệm số học trong thời kì Nghiêm ngặt hóa giải tích vào cuối thế kỉ XIX; và quan niệm tôpô trong toán học nói chung và trong giải tích nói riêng vào đầu thế kỉ XX trong nỗ lực khái quát hóa của hàm số liên tục trong tập số thực $\mathbb{R}$ vào không gian mêtric và không gian tôpô.

2.3.3. Đặc trưng tri thức luận của khái niệm liên tục

Từ các kết quả phân tích tri thức luận lịch sử ánh xạ liên tục trong 2.2 cho phép rút ra các đặc trưng tri thức luận của khái niệm ánh xạ liên tục sau đây:

Đặc trưng về phạm vi tác động của khái niệm liên tục: hình học, số học, giải tích, và tôpô.

Đặc trưng *cách tiếp cận khái niệm: định nghĩa epsilon-delta, dãy hội tụ, tập mở, lân cận, ảnh ngược của ánh xạ.*

Đặc trưng *trừu tượng*: gắn liền với tính trừu tượng của không gian mêtric và không gian tôpô.

Đặc trưng *cụ thể/khái quát hóa*: cụ thể trên đường thẳng thực R, khái quát vào trong không gian Euclide *n* chiều, không gian mêtric và không gian tôpô.

2.3.4. Chướng ngại tri thức luận

Định nghĩa của hàm số liên tục theo khái niệm giới hạn thông qua ngôn ngữ $\varepsilon - \delta$ là một trong những chướng ngại tri thức luận đối với người học vì việc xác định δ (theo ε) đòi hỏi người học phải có một số kĩ năng giải quyết các bất đẳng thức chứa giá trị tuyệt đối, làm trội, làm giảm một đại lượng so với đại lượng khác.

Việc chuyển từ làm việc trên mêtric thông thường của $\mathbb{R}$ sang các mêtric của không gian $\mathbb{R}^n$ là một chướng ngại tri thức luận khi người học phải chuyển đổi từ không gian 1 chiều sang không gian n chiều cùng với các phép tính liên quan đến bất đẳng thức.

Việc định nghĩa khái niệm ánh xạ liên tục trong không gian tôpô theo tập mở là một chướng ngại tri thức luận đối với người học vì bản thân khái niệm tập mở là sự khái quát hóa khoảng mở trong tập số thực $\mathbb{R}$ vào không gian mêtric $\mathbb{R}^n$ và không gian tôpô và mang tính trừu tượng.

Các chướng ngại này cũng được thể hiện một phần qua các quan niệm sai lầm trong phần thực nghiệm khảo sát được trình bày ở mục 1.2. Việc nghiên cứu ảnh hưởng của các chướng ngại tri thức luận và chướng ngại sư phạm cần đến một thực nghiệm sâu rộng hơn mà chúng tôi sẽ tiến hành tiếp theo.

3. Kết luận

Từ cái nhìn tổng quan lịch sử đã vạch ra, có thể nhận thấy rằng các khái niệm về hàm số và về tính liên tục đã phát triển trong một mối quan hệ biện chứng, sự thay đổi tầm nhìn trong mối quan hệ với khái niệm này mang đến sự thay đổi trong mối quan hệ với khái niệm kia, và sự tiến bộ trong cái này dẫn đến sự tiến bộ ở cái kia và ngược lại. Hơn nữa, trong mỗi thời kì, định nghĩa về tính liên tục phụ thuộc vào các hàm số được thao tác và các bài toán cần giải quyết.

Định nghĩa hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ theo ngôn ngữ $\varepsilon - \delta$ là kết quả của quá trình công thức hóa tính liên tục từ trực giác của các chuyển động liên tục và quá trình nghiêm ngặt hóa giải tích bằng công cụ số học để tách khỏi ngôn ngữ hình học nhờ vào các nghiên cứu của Cauchy, Bolzano và Weierstrass.

Việc mở rộng định lí Weierstrass rằng một hàm liên tục của một hoặc một số biến số thực trên một khoảng đóng và bị chặn đạt được chặn trên nhỏ nhất của nó chính là động lực cho việc khái quát hóa các không gian Euclide thành các không gian trừu tượng của Fréchet.

Xuất phát từ ý tưởng lựa chọn hệ thống lân cận làm cơ sở cho một lí thuyết tổng quát về không gian tôpô, Hausdorff định nghĩa ánh xạ liên tục trong không gian tôpô bằng ngôn ngữ lân cận.

Kết quả phân tích tri thức luận lịch sử khái niệm ánh xạ liên tục có thể giúp các nhà đào tạo sư phạm hình dung được những trở ngại mà sinh viên ngành Toán gặp phải khi tiếp cận tri thức này, để từ đó có thể thiết kế bài giảng một cách hợp lí.

❖ ***Tuyên bố về quyền lợi:*** *Tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Barra, R., & Pensec, J. J. (1976-77). *Sur l'enseignement de l'analyse, n°1 – Notion de fonctions.* IREM de Poitiers, 1-53.

Boyer, C. B. (1959). *The history of the calculus and its conceptual development.* New York: Dover Publications.

Brunschvicg, L. (1912). *Les étapes de la philosophie mathématique.* Paris: Librairie Alian, réédité par Blanchard en 1972.

Chevallard, Y. (1980). *La transposition didactique*. Grenoble: La pensée sauvage.

Dhombres, J. (1978). *Nombre, mesure et continu. Épistémologie et histoire.* Paris: Cédic/Fernand Nathan.

Dieudonné, J. (1978). *Abrégé d'histoire des mathématiques, 1700-1900 (2* volumes). Paris: Hermann.

El Bouazzaoui, H. (1988). *Conceptions des élèves et des professeurs à propos de la notion de continuité d'une fonction.* Thèse de doctorat. Québec, Université Laval.

Fréchet, M. (1904). Généralisation d'un théorème de Weierstrass. *C. R. Acad. Sci. Paris* 139, 848-850.

Groupe d'histoire des mathématiques de l'IREM de Paris Nord (1978). "*Éléments pour une approche historique de l'analyse en 1er et en terminale*". *Dossier n°1.* Université Paris XIII, IREM Paris Nord, n°32.

Katz, V. J. (2009). *A History of Mathematices-An Introduction* (3rd Edition). Pearson Education.

Le, T. H. C, & Le, V. T. (2003). The role of epistemological analysis of History of Mathematics in research and practice of mathematics teaching and learning. *Research theme at the Ministry Level,* Code B2001-23-2.

Mawfik, N., & Boukhssimi, D., & Lamrabet, D. (2001). Genèse historique de la notion de continuité d'une fonction. *Bulletin Association mathématique du Quebec,* vol. XLI, n^0 1, 31-44.

Merzbach, U. C., & Boyer, C. B. (2011). *A History of Mathematics* (3rd Edition). John Wiley & Sons, Inc. Publisher

Monna, A F. (1972). *Functional Analysis in Historical Perspective.* New York, NY, Oostoek, Sheltema and Holthema.

Gregory H. Moore (2008). The emergence of open sets, closed sets, and limit point in analysis and topology. *Historica Mathematica*, 35, 220-241.

Sutherland, W. A. (2009). *Introduction to Metric and Topological Spaces*. Second Edition, Oxford University Press.

Youschkevitch, A. P. (1981). Le concept de fonction jusqu'au milieu du XIXe siècle. *Dans Fragments d'histoire des mathématiques*, Brochure A.P.M.E.P, 41, 7-68.

AN HISTORICAL-EPISTEMOLOGICAL ANALYSIS OF CONTINUITY IN METRIC AND TOPOLOGICAL SPACES

Nguyen Ai Quoc

Saigon University, Vietnam

Corresponding author: Nguyen Ai Quoc – Email: nguyenaq2014@gmail.com

Received: December 23, 2020; Revised: April 24, 2021; Accepted: June 10, 2021

ABSTRACT

The concept of continuous mapping in ℝ*, metric and topological spaces is one of the central concepts of analysis and an important concept of topology. This paper presents a historical epistemological analysis that clarifies the genesis and development of the concept of continuous mapping in the real number set* ℝ*, the metric spaces, and the topological spaces throughout the periods from prehistoric to modern. The results of the historical epistemological analysis can help teacher educators visualize the obstacles that mathematics students face when learning this knowledge so that they can design their lessons in a more reasonable way.*

Keywords: continuous function; continuous mapping; epistemological analysis; metric space; topological space