TẠP CHÍ KHOA HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE

Tập 18, Số 6 (2021): 1071-1075

Vol. 18, No. 6 (2021): 1071-1075

ISSN:
2734-9918

Website: *http://journal.hcmue.edu.vn*

Bài báo nghiên cứu

ĐẶC TRƯNG CỦA VÀNH NOETHER VÀ ARTIN

Mai Duy Tân

Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

Tác giả liên hệ: Mai Duy Tân – Email: maiduytan020492@gmail.com

Ngày nhận bài: 14-3-2021; ngày nhận bài sửa: 27-5-2021; ngày duyệt đăng: 09-6-2021

TÓM TẮT

Trong những năm gần đây, việc mô tả vành thông qua lớp môđun hữu hạn sinh đang thu hút được nhiều sự chú ý của các nhà đại số. Cho R là một vành, bài báo này nhằm chứng minh rằng: R là vành noether (tương ứng artin) phải nếu và chỉ nếu mọi R-môđun sinh bởi 2 phần tử là môđun noether (tương ứng artin) hoặc môđun ADS. Sử dụng kết quả này, chúng tôi đã chứng minh được rằng: một vành R là nửa đơn nếu và chỉ nếu mọi R-môđun sinh bởi 2 phần tử là ADS. Bên cạnh đó, chúng tôi còn chứng minh rằng: vành R là SC phải nếu và chỉ nếu mọi R-môđun phải sinh bởi 2 phần tử là ADS. Kết quả này là một mở rộng của một định lí của Rizvi: một vành R là SC phải nếu và chỉ nếu mọi R-môđun phải hữu hạn sinh là tựa liên tục.

Từ khóa: artin; môđun; noether; vành

1. Mở đầu

Trong bài báo này, vành được hiểu là vành có đơn vị và môđun là môđun phải. Định lí nổi tiếng của Osofsky đã chỉ ra rằng: Một vành R là nửa đơn khi và chỉ khi mọi R-môđun cyclic là nội xạ (Nguyen, Dinh, Smith, & Wisbauer, 1994). Sau đó, Huynh và Rizvi đã chứng minh được rằng: Một vành R là noether phải nếu và chỉ nếu mọi R-môđun cyclic là tổng trực tiếp của một môđun xạ ảnh và một môđun Q, trong đó Q là một môđun nội xạ hoặc một môđun noether (Dinh, & Rizvi, 2008). Được thúc đẩy bởi kết quả này, bài báo sẽ chứng minh các kết quả sau: một vành R là noether (tương ứng artin) phải nếu và chỉ nếu mọi R-môđun sinh bởi 2 phần tử là môđun noether (tương ứng artin) hoặc môđun ADS. Năm 1990, Rizvi và Yousif (Rizvi, & Yousif, 1990) đã đưa ra định nghĩa về vành SC phải và chứng minh được rằng: Một vành R là SC phải khi và chỉ khi mọi R-môđun kì dị hữu hạn sinh là tựa liên tục. Trong bài báo này, chúng tôi mở rộng kết quả của Rizvi bằng định lí: Một vành R là SC phải nếu và chỉ nếu mọi R-môđun kì dị sinh bởi 2 phần tử là ADS.

2. Kiến thức chuẩn bị

Cho R là một vành và M là một R-môđun và $N \leq K$ là môđun con của M. Môđun N được gọi là *cốt yếu* trong K, hay K là một *mở rộng cốt yếu* của N, kí hiệu $N \leq_e K$, nếu với

Cite this article as: Mai Duy Tan (2021). Characterizations of noetherian and artinian rings. *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science, 18*(6), 1071-1075.

mọi môđun con L của K sao cho $N \cap L = 0$ thì $L = 0$. Môđun con C của M được gọi là *đóng* (trong M) nếu C không có mở rộng cốt yếu thực sự trong M, nghĩa là nếu tồn tại $T \leq M$ sao cho C cốt yếu trong T thì C=T. Cho N là môt môđun con của môđun M. Một môđun H của M được gọi là *phần bù* của N (trong M) nếu H là môđun tối đại (theo quan hệ bao hàm) sao cho $N \cap H = 0$. Một môđun K của M được gọi là *bù* (trong M) nếu tồn tại môđun con N của M sao cho K là phần bù của N trong M. Khái niệm môđun *ADS* được đề xuất lần đầu tiên bởi Fuchs (Fuchs, 1970). Từ đó đến nay, môđun ADS đã được nghiên cứu bởi nhiều nhà đại số, chẳng hạn (Alahmadi, Jain, & Leroy, 2012), (Burgess, & Raphael, 1992). Một R-môđun M được gọi là ADS nếu với mỗi phân tích $M = S \oplus T$ và với mọi phần bù T' của S trong M ta có $M = S \oplus T'$. Độc giả có thể xem thêm về môđun ADS trong (Alahmadi, Jain, & Leroy, 2012).

Cho I và M là các R-môđun, I được gọi là *M-nội xạ* nếu với mọi đơn cấu $g : K \to M$ và với mọi đồng cấu $h : K \to U$ tồn tại một đồng cấu $h' : M \to U$ sao cho $h = h' \circ g$. Một môđun M được gọi là *nội xạ* nếu M là R_R-nội xạ, *tựa nội xạ* nếu M là M-nội xạ. Môđun M được gọi là *CS* nếu mọi môđun con đóng của M đều là hạng tử trực tiếp của M. Một môđun CS M được gọi là *bán liên tục* nếu tổng trực tiếp của hai hàng tử trực tiếp của M là một hạng tử trực tiếp của M, *liên tục* nếu mọi môđun con đẳng cấu với một hạng tử trực tiếp của M là một hạng tử trực tiếp của M. Độc giả có thể tham khảo thêm về môđun CS trong (Nguyen, Dinh, Smith, & Wisbauer, 1994). Một cách tổng quát ta có sơ đồ sau: nửa đơn/nội xạ $\Rightarrow$ tựa nội xạ $\Rightarrow$ liên tục $\Rightarrow$ tựa liên tục $\Rightarrow$ ADS/CS. Chiều ngược lại nói chung không đúng. Hạng tử trực tiếp của môđun ADS (tương ứng CS/tựa nội xạ/liên tục/tựa liên tục) là ADS (tương ứng CS/tựa nội xạ/liên tục/tựa liên tục).

Tổng của tất cả các môđun con đơn của một môđun M là được gọi là *đế* của M, kí hiệu là soc(M). Môđun M được gọi là *nhúng hữu hạn* nếu soc(M) là hữu hạn sinh và cốt yếu trong M. Môđun M được gọi là có *chiều đều hữu hạn* nếu không tồn tại một tổng trực tiếp vô hạn các môđun con khác không của M. Dễ dàng chứng minh được các môđun noether, artin, nhúng hữu hạn có chiều đều hữu hạn.

3. Các kết quả chính

3.1. Định lí

Một vành R là noether phải khi và chỉ khi mọi R-môđun sinh bởi 2 phần tử là môđun noether hoặc ADS.

Chứng minh. Giả sử R là một vành noether phải. Khi đó mọi R-môđun hữu hạn sinh là noether. Do đó ta có chiều thuận. Giả sử mọi R-môđun sinh bởi 2 phần tử là môđun noether hoặc ADS. Lấy M là một R-môđun cyclic. Khi đó $T = M \oplus R$ là một R-môđun sinh bởi 2 phần tử. Theo giả thiết, T là noether hoặc ADS. Nếu T là môđun noether thì M cũng là môđun noether. Nếu T là môđun ADS thì M là R-nội xạ (Alahmadi, Jain, & Leroy, 2012).

Do đó mọi R-môđun cyclic là noether hoặc nội xạ. Suy ra R là vành noether phải (Dinh, & Rizvi, 2008).

3.2. Định lí

Một vành R là artin khi và chỉ khi mọi R-môđun sinh bởi 2 phần tử là nhúng hữu hạn hoặc ADS.

Chứng minh. Giả sử R là một vành artin. Khi đó mọi R-môđun hữu hạn sinh là artin. Do đó, ta có chiều thuận. Giả sử mọi R-môđun sinh bởi 2 phần tử là nhúng hữu hạn hoặc ADS. Lấy N là một R-môđun cyclic và M là một môđun thương của một môđun con cyclic của N. Đặt $T = M \oplus R$, theo giả thiết, T là môđun nhúng hữu hạn hoặc ADS. Nếu T là môđun nhúng hữu hạn thì T có chiều đều hữu hạn, do đó M cũng có chiều đều hữu hạn. Nếu T là môđun ADS thì M là nội xạ (Alahmadi, Jain, & Leroy, 2012). Như vậy, mọi môđun thương của mỗi môđun con cyclic của N là nội xạ hoặc có chiều đều hữu hạn. Do đó, mọi môđun thương của N có chiều đều hữu hạn (Nguyen, Generalized injectivity and chain conditions, 1992).

Nếu mọi môđun thương khác 0 của N chứa một môđun con đơn thì N là môđun artin (Shock, 1974). Giả sử tồn tại môđun thương $0 \neq K$ của N sao cho K không chứa môđun con đơn. Lấy $0 \neq xR$ là một môđun con cyclic của K. Đặt $H = xR \oplus K$. Theo giả thiết, H là môđun nhúng hữu hạn hoặc ADS. Do K không chứa môđun con đơn nên H là ADS. Suy ra xR là K-nội xạ (Alahmadi, Jain, & Leroy, 2012). Vì $xR \leq K$ nên xR là hạng tử trực tiếp của K (Anderson, & Fuller, 1973, mệnh đề 16.8). Suy ra mọi môđun con cyclic của K là hạng tử trực tiếp của K. Vì K có chiều đều hữu hạn nên K là môđun nửa đơn (Goodearl, 1972, Mệnh đề 1.22), mâu thuẫn. Do đó N là môđun artin. Như vậy mọi R-môđun cyclic là artin, nói riêng, R là vành artin.

Vì mỗi môđun artin là một môđun nhúng hữu hạn nên ta có:

3.3. Hệ quả

Một vành R là artin khi và chỉ khi mọi R-môđun sinh bởi 2 phần tử là môđun artin hoặc ADS.

Một định lí nổi tiếng của Osofsky đã chỉ ra rằng: Một vành R là nửa đơn khi và chỉ khi mọi R môđun cyclic là nội xạ (Nguyen, Dinh, Smith, & Wisbauer, 1994). Vì môđun tựa nội xạ (tương ứng liên tục/tựa liên tục/CS/ADS) là mở rộng của môđun nội xạ, nên một câu hỏi đặt ra là: vành R có là nửa đơn nếu thay giả thiết nội xạ trong định lí của Osofsky thành tựa nội xạ (tương ứng liên tục/tựa liên tục/CS/ADS)? Câu trả lời là không (Levy, 1966). Vành R được xây dựng trong ví dụ của Levy không là noether, do đó không là nửa đơn dù mọi R-môđun cyclic là tựa nội xạ. Tuy nhiên, ta có định lí sau:

3.4. Định lí

Một vành R là nửa đơn nếu và chỉ nếu mọi R-môđun sinh bởi 2 phần tử là ADS.

Chứng minh. Chiều thuận là hiển nhiên. Giả sử mọi R-môđun sinh bởi 2 phần tử là ADS, từ Hệ quả 2. 3 ta có R là artin. Suy ra $soc(R_R)$ là hữu hạn sinh và cốt yếu trong R_R.

Nếu $soc(R_R)=0$ thì $R=0$ do đó R là nửa đơn. Nếu $soc(R_R)\neq 0$, lấy S là một môđun con đơn khác 0 của R_R. Theo giả thiết $S\oplus R$ là ADS. Do đó S là R-nội xạ (Alahmadi, Jain, & Leroy, 2012). Suy ra mọi môđun đơn của R_R là nội xạ. Vì $soc(R_R)$ là hữu hạn sinh nên $soc(R_R)$ là nội xạ. Suy ra $soc(R_R)$ là hạng tử trực tiếp của R (Lam, 1999, mệnh đề 3.4). Vì $soc(R_R)$ cốt yếu trong R_R nên $soc(R_R)=R$, hay R là vành nửa đơn.

3.5. Định nghĩa

Cho R−môđun M, phần tử $m\in M$ được gọi là kì dị nếu tồn tại iđêan phải cốt yếu I của R sao cho $mI=0$. Tập hợp tất cả các phần tử kì dị của M kí hiệu là Z(M). Môđun M được gọi là kì dị nếu $Z(M)=M$, không kì dị nếu $Z(M)=0$.

Rizvi đã chứng minh được định lí sau (Rizvi, & Yousif, 1990):

3.6. Định lí

Cho R là một vành, các mệnh đề sau tương đương:

(1) Mọi R-môđun kì dị là nửa đơn

(2) Mọi R-môđun kì dị hữu hạn sinh là tựa nội xạ

(3) Mọi R-môđun kì dị hữu hạn sinh là liên tục

(4) Mọi R-môđun kì dị hữu hạn sinh là tựa liên tục

(5) R/I là môđun nửa đơn với mọi iđêan phải I cốt yếu trong R.

3.7. Định nghĩa

Một vành R được gọi là SC phải nếu R thỏa mãn một trong các điều kiện của Định lí 2.6.

Chúng tôi sẽ mở rộng kết quả của Rizvi bằng:

3.8 Định lí

Một vành R là SC phải nếu và chỉ nếu mọi R-môđun kì dị sinh bởi 2 phần tử là ADS.

Chứng minh. Chiều thuận đã được chứng bởi Rizvi. Giả sử mọi R-môđun kì dị sinh bởi 2 phần tử là ADS. Lấy M là một R-môđun cyclic. Dễ dàng chứng minh được lớp các môđun kì dị là đóng với phép lấy môđun thương, môđun con, tổng các môđun. Do đó sử dụng lại kĩ thuật chứng minh trong Định lí 2.3 ta có M là môđun nửa đơn. Lấy N là một R-môđun kì dị bất kì. Khi đó $N=\sum_{x\in N} xR$, trong đó các môđun xR là nửa đơn. Suy ra N là nửa đơn. Như vậy, mọi R-môđun kì dị là nửa đơn, do đó R là vành SC phải.

❖ ***Tuyên bố về quyền lợi:*** *Tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Alahmadi, A., Jain, S., & Leroy, A. (2012). ADS modules. *Journal of Algebra*, 215-222.

Anderson, F., & Fuller, K. (1973). *Rings and Categories of Modules.* Berlin-Heidelberg-New York: Springer Verlag.

Burgess, W., & Raphael, R. (1992). On modules with the absolute direct summandproperty. In *Ring theory.* Granville, OH: World Sci. Publ.

Dinh, H., & Rizvi, S. (2008). An affirmative answer to a question on noetherian rings. *Journal of Algebra and Its Applications*, 47-59.

Fuchs, L. (1970). *Infinite Abelian Groups, vol. I.* Academic Press, New York, London.

Goodearl, K. (1972). *Singular torsion and the splitting properties.* Providence, RI: American Mathematical Society.

Lam, T. (1999). *Lectures on Modules and Rings.* Berlin-Heidelberg-New York: Springer.

Levy, L. S. (1966). Commutative rings whose homomorphic images are self-injective. *Pacific J. Math.*, 149-153.

Nguyen, D. (1992). Generalized injectivity and chain conditions. *Glasgow Mathematical Journal*, 319-326.

Nguyen, D., Dinh, H., Smith, P., & Wisbauer, R. (1994). *Extending Modules.* Pitman Research Notes in Mathematics Series, 313. Longman Scientific & Technical: Harlow.

Rizvi, S., & Yousif, M. (1990). On continuous and singular modules, 116-124.

Shock, C. (1974). Dual generalizations of the Artinian and Noetherian conditions. *Pacific Journal of Mathematics*, 227-235.

CHARACTERIZATIONS OF NOETHERIAN AND ARTINIAN RINGS

Mai Duy Tan

University of Science, Vietnam National University Ho Chi Minh City, Vietnam

Corresponding author: Mai Duy Tan – Email: maiduytan020492@gmail.com

Received: March 14, 2021; Revised: May 27, 2021; Accepted: June 09, 2021

ABSTRACT

For the last few decades, characterizing rings in terms of finitely generated modules has become a topic of research for many algebraists. Let R be a ring, the aim of this paper is to prove the theorems: R is right noetherian (respectively artinian) if and only if every 2-generated right R-module is noetherian (respectively artinian) or an ADS module. Using this result, we proved that a ring R is semi-simple if and only if every 2-generated R-module is ADS. In addition, we also proved that a ring R is right SC if and only if every 2-generated R−module is ADS. This result generalizes a theorem of Rizvi which states that a ring R is right SC if and only if every finitely generated right R-module is quasi-continuous.

Keywords: artinian; modules; noetherian; rings