TẠP CHÍ KHOA HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE

Tập 18, Số 6 (2021): 1064-1070

Vol. 18, No. 6 (2021): 1064-1070

ISSN: 2734-9918

Website: *http://journal.hcmue.edu.vn*

Bài báo nghiên cứu

NHÓM CON CỦA NHÓM NHÂN CỦA ĐẠI SỐ NHÓM

Lê Văn Chua

Trường Đại học An Giang, Việt Nam

Tác giả liên hệ: Lê Văn Chua – Email: lvchua.tag@moet.edu.vn

Ngày nhận bài: 14-4-2021; ngày nhận bài sửa: 21-4-2021; ngày duyệt đăng: 12-5-2021

TÓM TẮT

Cho G là nhóm và F là trường. Một nhóm con H trong nhóm nhân $(FG)^*$ của đại số nhóm FG được gọi là gần á chuẩn tắc nếu tồn tại một dãy các nhóm con

$$H = H_r \leq H_{r-1} \leq \cdots \leq H_1 \leq H_0 = (FG)^*,$$

sao cho với mỗi $0 \leq i < r$, hoặc H_{i+1} là nhóm con chuẩn tắc của H_i hoặc H_{i+1} có chỉ số hữu hạn trong H_i. Trong bài báo này, chúng tôi chứng minh nếu G là một nhóm luỹ linh hữu hạn, F là một trường pythagore, F chỉ thừa nhận thứ tự archimedes và mọi đại số chia quaternion A trên F đẳng cấu với đại số quaternion thông thường $A_F = \left(-1,-1\right)_F$ thì mọi nhóm con gần á chuẩn tắc trong nhóm nhân $(FG)^*$ của đại số nhóm FG là chuẩn tắc trong $(FG)^*$.

Từ khóa: nhóm con gần á chuẩn tắc; đại số nhóm; Trường pythagore

1. Giới thiệu

Cho G là một nhóm. Một nhóm con H của G được gọi là *á chuẩn tắc* trong G nếu tồn tại một dãy các nhóm con

$$H = H_r \lhd H_{r-1} \lhd \cdots \lhd H_1 \lhd H_0 = G,$$

và H là *gần á chuẩn tắc* trong G nếu tồn tại một dãy các nhóm con

$$H = H_r \leq H_{r-1} \leq \cdots \leq H_1 \leq H_0 = G,$$

sao cho với mỗi $0 \leq i < r$, hoặc H_{i+1} là nhóm con chuẩn tắc của H_i hoặc H_{i+1} có chỉ số hữu hạn trong H_i (Hartley, 1989). Theo định nghĩa trên, ta dễ dàng nhận thấy rằng mọi nhóm con á chuẩn tắc của một nhóm đều là nhóm con gần á chuẩn tắc. Lớp các nhóm con gần á chuẩn tắc của nhóm tuyến tính tổng quát đã được nghiên cứu đầu tiên bởi Wehrfritz (1993). Gần đây, các tác giả Nguyen, Mai và Bui (2017) đã chứng minh được rằng, nếu D là một vành chia với tâm vô hạn và n là số nguyên dương lớn hơn 1 thì mọi nhóm con gần

Cite this article as: Le Van Chua (2021). Subgroups of the unit groups of a group algebra. *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science, 18*(6), 1064-1070.

á chuẩn tắc trong $GL_n(D)$ là chuẩn tắc. Tuy nhiên, với $n=1$, tức là với nhóm nhân $GL_1(D)=D^*$ của vành chia D thì kết quả này không còn đúng nữa. Cụ thể là có nhiều lớp vành chia chứa nhóm con gần á chuẩn tắc nhưng không chuẩn tắc. Greenfield (1978), đã xây dựng một nhóm con á chuẩn tắc (do đó gần á chuẩn tắc) trong một vành chia, nhưng không chuẩn tắc. Các tác giả Trinh, Mai và Bui (2020) đã xây dựng ví dụ về một nhóm con gần á chuẩn tắc trong một vành chia, nhưng không á chuẩn tắc và do đó không chuẩn tắc. Le (2019) đã chứng minh được rằng nếu $\mathbb{H}$ là vành chia quaternion thực thì mọi nhóm con gần á chuẩn tắc của nhóm nhân $\mathbb{H}^*$ đều là chuẩn tắc trong $\mathbb{H}^*$. Trong bài báo này, chúng tôi sẽ mở rộng kết luận này bằng cách chứng minh nếu A là một đại số chia quaternion trên một trường pythagore F, F chỉ thừa nhận thứ tự archimedes và A đẳng cấu với đại số chia quaternion thông thường $A_F=(-1,-1)_F$ thì mọi nhóm con gần á chuẩn tắc của nhóm nhân A^* là chuẩn tắc trong A^*. Áp dụng kết quả này, chúng tôi chứng minh nếu G là một nhóm luỹ linh hữu hạn, F là một trường pythagore, F chỉ thừa nhận thứ tự archimedes và mọi đại số chia quaternion A trên F đẳng cấu với đại số quaternion thông thường $A_F=(-1,-1)_F$ thì mọi nhóm con gần á chuẩn tắc trong nhóm nhân $(FG)^*$ của đại số nhóm FG là chuẩn tắc trong $(FG)^*$.

Các kí hiệu trong bài báo này là các kí hiệu thường dùng. Chẳng hạn, nếu D là vành chia thì $Z(D)$ được kí hiệu là tâm của D, tức là $Z(D)$ gồm các phần tử giao hoán với các phần tử còn lại trong D, tập hợp $D^*=D\setminus\{0\}$ là một nhóm nhân của D. Giả sử G là một nhóm con của D^*. Ta nói rằng G là nhóm con *trung tâm* nếu $G\subseteq Z(D)$.

2. Nhóm con gần á chuẩn tắc của nhóm nhân trong đại số nhóm trên một trường pythagore

Giả sử F là một trường. Ta nói rằng F là *trường thực hình thức* nếu -1 không là một tổng của các bình phương trong F. Chú ý rằng một trường thực hình thức luôn có đặc số 0. Tuy nhiên, một trường có đặc số 0 chưa chắc là trường thực hình thức, chẳng hạn trường số phức $\mathbb{C}$. Một trường F được gọi là *pythagore* nếu nó là trường thực hình thức và mọi tổng của các bình phương trong F lại là một bình phương trong F. Ví dụ, trường số thực $\mathbb{R}$ là pythagore, trường số hữu tỉ $\mathbb{Q}$ không là pythagore. Nếu F là một trường thực hình thức thì F có ít nhất một thứ tự bởi tiêu chuẩn Artin-Schreier. Giả sử $\leq$ là một thứ tự trên F. Nhắc lại rằng, một *giá trị tuyệt đối* trên F là ánh xạ $|\ |:F\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ thoả mãn các điều kiện sau:

(i) $|\alpha|=0$ nếu và chỉ nếu $\alpha=0$.

(ii) $|\alpha\beta|=|\alpha||\beta|$ với mọi $\alpha,\beta\in F$.

(iii) $|\alpha+\beta|\leq|\alpha|+|\beta|$ với mọi $\alpha,\beta\in F.$

Ta nói rằng $\varepsilon\in F$ là *vô cùng bé* nếu $n|\varepsilon|\leq 1$ với mọi số nguyên dương $n.$ Một thứ tự $\leq$ trên F được gọi là *không archimedes* nếu F có một phần tử vô cùng bé khác $0,$ ngược lại, nó được gọi là *archimedes.*

Cho F là một trường và $a,b\in F^*$. Nhắc lại rằng, một *đại số chia quaternion* $A=(a,b)_F$ trên F là một đại số chia trên F được sinh bởi các phần tử i và j thoả mãn

$$i^2=a,\ j^2=b,\ ij=-ji.$$

Đặt $k=ij\in A.$ Chú ý rằng $k^2=-ab,\ ik=-ki=aj,\ kj=-jk=bi.$ Khi $a=b=-1,$ đại số chia quaternion $A_F=(-1,-1)_F$ được gọi là *đại số quaternion thông thường* trên $F.$ Đặc biệt, nếu $F=\mathbb{R}$ thì $A_{\mathbb{R}}$ được gọi là *vành chia quaternion thực* và được kí hiệu là $\mathbb{H}.$ Giả sử $\alpha=t+xi+yj+zk\in A,$ ta gọi $\overline{\alpha}=t-xi-yj-zk$ là *liên hợp* của α trong $A.$ *Chuẩn* của $\alpha\in A$ được định nghĩa bởi

$$N(\alpha)=\alpha\overline{\alpha}=\overline{\alpha}\alpha=t^2-ax^2-by^2+abz^2.$$

Chú ý rằng $N(\alpha\beta)=N(\alpha)N(\beta)$ với mọi $\alpha,\beta\in A.$ Đặt $A^{(1)}=\{\alpha\in A^*\mid N(\alpha)=1\}.$ Dễ dàng kiểm tra được $A^{(1)}$ là một nhóm con chuẩn tắc không trung tâm của $A^*.$

Để đi đến kết luận chính của bài báo này, trước hết, ta nhắc lại khái niệm lõi của nhóm con trong một nhóm. *Lõi* của nhóm con H trong một nhóm G được định nghĩa bởi

$$\mathrm{Core}_G(H)=\bigcap_{a\in G}aHa^{-1}.$$

Chú ý rằng $\mathrm{Core}_G(H)$ là nhóm con chuẩn tắc lớn nhất của G chứa trong $H.$ Hơn nữa, nếu chỉ số $[G:H]$ hữu hạn thì $[G:\mathrm{Core}_G(H)]$ cũng hữu hạn. Nếu H là một nhóm con chuẩn tắc có chỉ số hữu hạn trong $G,$ nghĩa là $[G:H]=n,$ thì $a^n\in H$ với mọi $a\in G.$

Tiếp theo, ta cũng cần nhắc đến khái niệm đồng nhất thức trên nhóm. Giả sử G là một nhóm với tâm $Z(G)$ là tập hợp tất cả các phần tử $a\in G$ sao cho a giao hoán với mọi phần tử $g\in G,$ và $x_1,x_2,\ldots,x_n$ là n biến không giao hoán. Một biểu thức có dạng

$$\omega(x_1,x_2,\ldots,x_n)=a_1x_{i_1}^{m_1}a_2x_{i_2}^{m_2}\cdots a_tx_{i_t}^{m_t}a_{t+1}$$

được gọi là một *đơn thức suy rộng* trên $G,$ trong đó $a_j\in G,\ i_j\in\{1,2,\ldots,n\},$ nếu với mọi $j=1,2,\ldots,t-1,$ các điều kiện $i_j=i_{j+1}$ và $m_jm_{j+1}<0$ kéo theo a_{j+1} không thuộc $Z(G),$

(Golubchik, & Mikhalev, 1982; Tomanov, 1985). Giả sử H là nhóm con của G. Ta nói rằng $\omega = 1$ là một *đồng nhất thức* của H hoặc H *thỏa đồng nhất thức* $\omega = 1$ trên G nếu $\omega(c_1, c_2, \ldots, c_n) = 1$ với mọi $c_1, c_2, \ldots, c_n \in H$.

Các tác giả Nguyen, Mai và Bui (2017) đã chứng minh kết quả sau:

Mệnh đề 2.1.

Cho D là một vành chia với tâm F vô hạn và H là một nhóm con gần á chuẩn tắc trong nhóm nhân D^*. Khi đó, nếu H thỏa một đồng nhất thức trên D^* thì H là nhóm con trung tâm.

Kết luận sau được coi là một mở rộng kết quả của Mahmoudi (2020).

Mệnh đề 2.2.

Cho A là một đại số chia quaternion trên một trường pythagore F, F chỉ thừa nhận thứ tự archimedes và A đẳng cấu với A_F. Giả sử H là một nhóm con không trung tâm của A^*. Khi đó, các điều kiện sau là tương đương:

(i) H là nhóm con gần á chuẩn tắc của A^*.

(ii) H là nhóm con á chuẩn tắc của A^*.

(iii) H là nhóm con chuẩn tắc của A^*.

(iv) H chứa $A^{(1)}$.

Chứng minh. Ta chỉ cần chứng minh $(i) \Rightarrow (iv)$. Giả sử H là một nhóm con không trung tâm của A^*. Bởi một kết luận của Casolo và Mainardis (2001), H chứa một nhóm con K của A^* sao cho K là nhóm con á chuẩn tắc của A^* và chỉ số $[H:K]$ hữu hạn. Đặt $N = \mathrm{Core}_H(K)$ là lõi của K trong H. Dễ dàng nhận thấy N là một nhóm con á chuẩn tắc của A^* và nhóm thương H/N là hữu hạn. Ta sẽ chứng minh N là nhóm con không trung tâm của A^*. Thật vậy, giả sử N là nhóm con trung tâm của A^*, tức là $N \subseteq F$. Khi đó, với mọi $a \in H$, ta có $a^n \in N \subseteq F$ trong đó n là cấp của nhóm thương H/N. Lấy một phần tử $\alpha \in A \setminus F$. Rõ ràng H thỏa một đồng nhất thức $x^n \alpha^n x^{-n} \alpha^{-n} = 1$ trên A^*. Theo Mệnh đề 2.1, H là nhóm con trung tâm của A^*. Điều này dẫn đến mâu thuẫn. Do đó N là một nhóm con không trung tâm của A^*. Bởi một kết luận của Mahmoudi (2020), N chứa $A^{(1)}$ và do đó H chứa $A^{(1)}$. Mệnh đề được chứng minh.

Như một hệ quả của Mệnh đề 2.2, ta nhận được kết quả sau:

Hệ quả 2.3.

Cho A là một đại số chia quaternion trên một trường pythagore F, F chỉ thừa nhận thứ tự archimedes và A đẳng cấu với A_F. Khi đó, mọi nhóm con gần á chuẩn tắc của nhóm *nhân A^* là chuẩn tắc trong A^*.*

Áp dụng Hệ quả 2.3 để nghiên cứu cấu trúc của nhóm con gần á chuẩn tắc trong nhóm nhân của đại số nhóm. Cho G là một nhóm và F là một trường. Nhắc lại rằng, một *đại số nhóm* FG là tập hợp của tất cả các phần tử có dạng $\sum_{g\in G} a_g g$, trong đó $a_g \in F$. Phép toán cộng và phép toán nhân trong FG được cho bởi

$$\left(\sum_{g\in G} a_g g\right)+\left(\sum_{g\in G} b_g g\right)=\sum_{g\in G}\left(a_g+b_g\right)g$$

$$\left(\sum_{g\in G} a_g g\right)\left(\sum_{h\in G} b_h h\right)=\sum_{g,h\in G}\left(a_h b_{h^{-1}g}\right)g.$$

Bây giờ ta sẽ phát biểu và chứng minh kết quả chính của bài báo này.

Định lí 2.4.

Cho G là một nhóm luỹ linh hữu hạn và F là một trường pythagore. Giả sử F chỉ thừa nhận thứ tự archimedes và mọi đại số chia quaternion A trên F đẳng cấu với A_F. Khi đó, mọi nhóm con gần á chuẩn tắc trong nhóm nhân $(FG)^*$ của đại số nhóm FG là chuẩn tắc trong $(FG)^*$.

Chứng minh. Giả sử H là một nhóm con gần á chuẩn tắc của $(FG)^*$. Ta sẽ chứng minh H là một nhóm con chuẩn tắc của $(FG)^*$. Thật vậy, nếu H là nhóm con trung tâm của $(FG)^*$ thì rõ ràng H là chuẩn tắc trong $(FG)^*$. Giả sử H là nhóm con không trung tâm của $(FG)^*$. Chú ý rằng F là trường có đặc số 0. Bởi một kết luận của Roquette (1958), tồn tại các số nguyên dương $n_1, n_2, \ldots, n_k$ và các đại số chia quaternion $A_1, A_2, \ldots, A_k$ trên F sao cho

$$\sigma : FG \to M_{n_1}\left(A_1\right)\times M_{n_2}\left(A_2\right)\times\cdots\times M_{n_k}\left(A_k\right)$$

là đẳng cấu. Khi đó σ cảm sinh một đẳng cấu mà ta vẫn kí hiệu lại bởi σ,

$$\sigma : (FG)^* \to GL_{n_1}\left(A_1\right)\times GL_{n_2}\left(A_2\right)\times\cdots\times GL_{n_k}\left(A_k\right).$$

Với mọi $1\le i\le k$, ta xét phép chiếu chính tắc

$$\pi_i : GL_{n_1}\left(A_1\right)\times GL_{n_2}\left(A_2\right)\times\cdots\times GL_{n_k}\left(A_k\right)\to GL_{n_i}\left(A_i\right).$$

Do H là nhóm con gần á chuẩn tắc của $(FG)^*$ và σ là đẳng cấu nên dễ dàng kiểm tra được $\sigma(H)$ là nhóm con gần á chuẩn tắc của $GL_{n_1}\left(A_1\right)\times GL_{n_2}\left(A_2\right)\times\cdots\times GL_{n_k}\left(A_k\right)$. Chú ý rằng $\sigma(H)$ có dạng

$$\sigma(H)=H_1\times H_2\times\cdots\times H_k,$$

trong đó H_i là nhóm con của $GL_{n_i}(A_i)$ với mọi $1 \le i \le k$. Rõ ràng $\pi_i(\sigma(H)) = H_i$ là nhóm con gần á chuẩn tắc của $GL_{n_i}(A_i)$. Nếu $n_i \ge 2$ thì H_i là nhóm con chuẩn tắc của $GL_{n_i}(A_i)$ bởi một kết luận của Nguyen, Mai và Bui (2017). Nếu $n_i = 1$ thì H_i là nhóm con chuẩn tắc của $GL_{n_i}(A_i)$ bởi Hệ quả 2.3. Do đó H_i là nhóm con chuẩn tắc của $GL_{n_i}(A_i)$ với mọi số nguyên dương n_i. Điều này dẫn đến $\sigma(H)$ là nhóm con chuẩn tắc của nhóm $GL_{n_1}(A_1) \times GL_{n_2}(A_2) \times \cdots \times GL_{n_k}(A_k)$. Như một hệ quả, ta có H là nhóm con chuẩn tắc của $(FG)^*$. Định lí được chứng minh.

3. Kết luận

Cho G là một nhóm luỹ linh hữu hạn , F là một trường pythagore và F chỉ thừa nhận thứ tự archimedes và mọi đại số chia quaternion A trên F đẳng cấu với đại số quaternion thông thường A_F. Khi đó, chúng tôi nhận được một cấu trúc của nhóm con gần á chuẩn tắc của nhóm nhân trong đại số FG là, nhóm mọi nhóm con gần á chuẩn tắc trong nhóm nhân $(FG)^*$ của đại số nhóm FG là chuẩn tắc trong $(FG)^*$. Với một nhóm G và một trường F bất kì, chúng tôi sẽ tiếp tục nghiên cứu cấu trúc của nhóm con gần á chuẩn tắc của nhóm nhân $(FG)^*$ của đại số nhóm FG.

❖ ***Tuyên bố về quyền lợi:*** *Tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Casolo, C., & Mainardis, M. (2001). Groups in which every subgroup is f-subnormal. *J. Group Theory, 4,* 341-365.

Golubchik, I. Z., & Mikhalev, A. V. (1982). Generalized group identities in the classical groups. *Zap. Nauch. Semin. Lomi An SSSR, 114*, 96-119.

Greenfield, G. R. (1978). A note on subnormal subgroups of division algebras. *Can. J. Math, 30,* 161-163.

Hartley, B. (1989). Free groups in normal subgroups of unit groups and arithmetic groups. *Contemp. Math, 93*, 173-177.

Hazrat, R., & Wadsworth, A. R. (2009). On maximal subgroups of the multiplicative group of a division algebra. *J. Algebra, 322,* 2528-2543.

Le, V. C. (2019). Nhom con cua nhom nhan trong vanh chia quaternion thuc [Subgroups of the multiplicative group of the division ring of real quaternions]. *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science, 12(16),* 975-981.

Mahmoudi, M. G. (2020). On normal subgroups of the unit group of a quaternion algebra over a pythagorean field. *Bull. Iran. Math. Soc, 46*, 253-262.

Nguyen, K. N., Mai, H. B., & Bui, X. H. (2017). Free subgroups in almost subnormal subgroups of general skew linear groups. *Algebra i Analiz, 28*(5), 220-235, English translation in *St. Petersburg Math. J., 28*(5), 707-717.

Roquette, P. (1958). Realisierung yon Darstellungen endlicher nilpotenter Gruppen. *Archiv. Math. 9,* 241-250.

Tomanov, G. M. (1985). Generalized group identities in linear groups. *Math. USSR, Sbornik, 51*, 33-46.

Trinh, T. D., Mai, H. B., & Bui, X. H. (2020). On division subrings normalized by almost subnormal subgroups in division rings. *Periodica Mathematica Hungarica, 80*, 15-27.

Wehrfritz, B. A. F. (1993). A note on almost subnormal subgroups of linear groups. *Proc. Am. Math. Soc, 117*(1), 17-21.

SUBGROUPS OF THE UNIT GROUPS OF A GROUP ALGEBRA

Le Van Chua

An Giang University, Vietnam

Corresponding author: Le Van Chua – Email: lvchua.tag@moet.edu.vn

Received: April 14, 2021; Revised: April 21, 2021; Accepted: May 12, 2021

ABSTRACT

Let G be a group and F a field. A subgroup H of the unit group $(FG)^*$ of the group algebra FG is said to be almost subnormal if there exists a sequence of subgroups

$$H = H_r \leq H_{r-1} \leq \cdots \leq H_1 \leq H_0 = (FG)^*,$$

such that for any $0 \leq i < r$, either H_{i+1} is normal in H_i or H_{i+1} has the finite index in H_i. In this paper, we show that if G is a finite nilpotent group, F is a pythagorean field, F admits only archimedean orderings, and every quaternion division algebra A over F is isomorphic to the ordinary quaternion algebra $A_F = (-1,-1)_F$, then almost every subnormal subgroup of the unit group $(FG)^*$ of the group algebra FG is normal in $(FG)^*$.

Keywords: almost subnormal subgroup; group algebra; pythagorean field