TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH
TẠP CHÍ KHOA HỌC
KHOA HỌC GIÁO DỤC
Tập 14, Số 10 (2017): 15-27
ISSN: 1859-3100

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE
EDUCATION SCIENCE
Vol. 14, No. 10 (2017): 15-27

Email: tapchikhoahoc@hcmue.edu.vn; Website: http://tckh.hcmue.edu.vn

NGHIÊN CỨU VIỆC DẠY HỌC HỆ ĐẾM THẬP PHÂN Ở TIỂU HỌC: MỘT ĐÓNG GÓP CỦA MÔ HÌNH TỔ CHỨC TOÁN HỌC THAM CHIẾU

Lê Thị Hoài Châu[1*]
Nguyễn Thị Minh Yến[2]
[1] *Khoa Toán - Tin học – Trường Đại học Sư phạm TP Hồ Chí Minh*
[2] *Trường THPT Nam Kì Khởi Nghĩa - TP Hồ Chí Minh*
Ngày nhận bài: 08-8-2017; ngày nhận bài sửa: 18-9-2017; ngày duyệt đăng: 18-10-2017

TÓM TẮT

Hệ đếm thập phân chiếm một vị trí quan trọng ở đầu cấp tiểu học. Việc hiểu chức năng của nó là cơ sở để hiểu các tính toán, là điểm tựa để đổi các đơn vị đo, và sau này còn được mở rộng cho việc nghiên cứu các số thập phân. Vài nghiên cứu đã chỉ ra rằng học sinh có khó khăn trong việc học hệ đếm thập phân. Giải thích như thế nào hiện tượng ấy? Trong bài báo này, chúng tôi sẽ chỉ ra một đóng góp quan trọng của mô hình tổ chức toán học tham chiếu đối với việc tìm câu trả lời. Những đóng góp khác - không kém phần quan trọng, nhưng do khuôn khổ của bài viết chúng tôi chỉ điểm qua ở phần cuối cùng.

Từ khóa: hệ đếm thập phân, tổ chức toán học tham chiếu, thuyết nhân học.

ABSTRACT

Study of the teaching of decimal numeration in elementary school:
A contribution of the mathematical model of reference

The decimal system holds an important role at the beginning of the primary level. Understanding its function is the basis for understanding the calculations, the fulcrum for changing units of measurement, and later extended to the study of decimal numbers. Some studies have shown that students have difficulty in learning the decimal system. How to explain this phenomenon ? In this article, we will show an important contribution of the model of mathematical organization of reference for the search for the elements of answer. Other contributions - important also, but in the context of this article we only make the point in the last part.

Keywords: decimal system, reference mathematical organization, anthropology.

1. Dạy học hệ đếm thập phân : tri thức nhắm đến

Hệ đếm thập phân mà chúng ta sử dụng là một hệ thống dùng để chỉ các số. Nó là tri thức nền tảng của toán học và được đưa vào ngay từ bậc tiểu học, thậm chí sớm hơn, từ năm cuối ở trường mẫu giáo. Nó dùng để biểu thị không chỉ số nguyên mà còn cả số thập phân. Nó cần thiết cho việc đổi các đơn vị đo chiều dài, khối lượng. Đặc biệt, nó làm đơn giản hóa các phép tính. Để kiểm chứng điều này, bạn hãy thử thực hiện phép nhân hai số có nhiều chữ số viết theo hệ ghi số La-Mã.

[*] Email: *chaulth@hcmup.edu.vn*

Định lí cơ bản về phân tích một số nguyên theo một cơ sở b: Hệ đếm thập phân là một hệ đếm theo vị trí, cơ sở 10. Tri thức tham chiếu cho hệ đếm theo cơ sở *b* (số tự nhiên lớn hơn 1) là định lí phân tích một số nguyên ở dạng đa thức:

Mọi số tự nhiên a khác không đều có thể viết được một cách duy nhất ở dạng

$$a = a_n b^n + ... + a_1 b^1 + a_0$$

trong đó, n là số tự nhiên, a_i là số tự nhiên thuộc đoạn [0; b - 1] với mọi i và $a_n \neq 0$.

Đây là định lí cơ bản của một hệ đếm. Hiểu hệ đếm thập phân là hiểu và sử dụng được định lí này với *b* = 10. Vì thế, nó là cơ sở để ta xác định tri thức nhắm đến trong dạy học hệ đếm thập phân.

Các đơn vị đếm: Các thuật ngữ *đơn vị, chục, trăm, nghìn, triệu*… được sử dụng rộng rãi. Chúng chỉ các đơn vị đếm. Giống như đếm 1, 2, 3 đơn vị, người ta có thể đếm 1, 2, 3 chục. Các đơn vị đếm này chỉ lũy thừa của 10 mà không cần sử dụng cách viết dạng 10^n.

Bằng ngôn ngữ đơn vị đếm, định lí cơ bản về phân tích số nêu ở trên (với cơ số *b* = 10) có thể phát biểu là: *Mọi số đều có thể phân tích được theo một cách duy nhất dưới dạng tổng của các đơn vị đếm, trong đó mỗi đơn vị có mặt không quá 9 lần*. Ví dụ: 234 là 2 trăm, 3 chục, 4 đơn vị. Cách phân tích này được gọi là phân tích chuẩn. "Chữ số ở hàng chục" trong cách nói của chúng ta chính là số lần xuất hiện đơn vị chục trong phân tích chuẩn này. Cũng tồn tại những cách phân tích không chuẩn khác, ví dụ như 560 là 4 trăm và 16 chục, hay 3 trăm 17 chục 90 đơn vị.

Quan hệ giữa các đơn vị: Các đơn vị đếm không độc lập với nhau và việc hiểu thấu đáo quan hệ giữa chúng là một mục tiêu quan trọng của dạy học. Trong quan hệ này phải kể đến: 1 chục = 10 đơn vị, 1 trăm = 10 chục, 1 nghìn = 10 trăm, 1 chục nghìn = 10 nghìn, 1 nghìn nghìn = 1 triệu… Những quan hệ theo chiều ngược lại phức tạp hơn, nhưng cũng cần nắm vững. Chẳng hạn 5 nghìn = năm chục trăm, 1 nghìn = trăm chục.

Hai phương diện của hệ đếm: vị trí và thập phân

Hệ đếm thập phân liên kết hai phương diện: Phương diện vị trí và phương diện thập phân. Về phương diện vị trí, mỗi vị trí ứng với một đơn vị đếm. Chữ số đầu tiên tính từ phải sang trái ứng với hàng đơn vị, chữ số tiếp theo ứng với hàng chục… Vì thế mà trong dãy các chữ số biểu thị một số thì cùng một chữ số nhưng ở các vị trí khác nhau sẽ có giá trị khác nhau. Về phương diện thập phân, cái quan trọng là mối liên hệ giữa các đơn vị đếm: Hai đơn vị đứng liền nhau hơn kém nhau mười lần.

Hai phương diện này không tách rời nhau trong hệ đếm. Thế nhưng, khi nhìn cách viết một số (bằng dãy các chữ số) thì người ta không thấy xuất hiện cơ sở của hệ đếm. Các đơn vị khác nhau và mối liên hệ giữa chúng cũng không được nhìn thấy trong cách viết này. Đó chỉ là quy ước và học sinh phải hiểu những gì mà cách viết này che dấu. Kết hợp hai phương diện vị trí và thập phân là trọng tâm của việc dạy học hệ đếm thập phân. Đặc biệt, hiểu thấu đáo phương diện thập phân là cơ sở để hiểu các quy tắc tính toán (cộng, trừ, nhân, chia) sau này.

2. Dạy học hệ đếm thập phân đặt ra vấn đề cần nghiên cứu

- ***Về phía học sinh***

Một số giáo viên tiểu học mà chúng tôi có dịp tiếp xúc cho biết học sinh của họ phạm phải khá nhiều sai lầm khi giải các bài toán "viết số (được cho bằng lời)", chẳng hạn: đã có không ít em cho đáp số "*205*" đối với bài tập "*viết số hai mươi lăm*", hay tương tự, họ trả lời "*2115*" cho bài tập "*viết số gồm 2 trăm, 11 chục và 5 đơn vị*". Sai lầm tồn tại khá dai dẳng, ngay cả khi thực hiện các phép tính, chẳng hạn kết quả của phép tính 34 + 5 được cho là 84.

Không tìm thấy nghiên cứu của các tác giả Việt Nam về sai lầm, khó khăn của học sinh trong việc hiểu hệ đếm thập phân, nhưng chúng tôi có được khá nhiều nghiên cứu ở nước ngoài về vấn đề này. Dưới đây là vài ví dụ minh họa.

Bednarz và Janvier (1984) sau 5 năm nghiên cứu với nhiều khảo sát đã chỉ ra một số khó khăn của học sinh Canada lứa tuổi 8 – 10. Đặc biệt, các em có khó khăn:

"- để hiểu việc nhóm và vai trò của nó trong cách viết số theo quy ước, dù rằng việc nghiên cứu cách viết chiếm một vị trí cực kì quan trọng trong chương trình;

- để hiểu sự cần thiết của các phép nhóm, cho dù trong quá trình học đã phải giải nhiều bài tập đòi hỏi phải thực hiện chúng;
- để hiểu tại sao lúc thì nhóm, lúc thì lại tách;
- khi phải làm việc đồng thời với việc nhóm ở hai đơn vị khác nhau ;
- trong việc dùng các phép nhóm để giải thích quá trình tính toán, dẫn đến những sai lầm thường gặp trong tính toán."

(Bednarz và Janvier, 1984, tr.30)

Để minh họa, hai tác giả này lấy ví dụ: Khi phỏng vấn, họ thấy rất ít học sinh giải thích được ý nghĩa của việc "mượn 1" bằng thuật ngữ "tách, nhóm" trong phép tính 234 – 178. Trong số những học sinh được điều tra, chỉ 13% ở năm thứ 3 và 19% năm thứ 4 bậc tiểu học thực sự hiểu việc nhóm. Đó là lí do để học sinh phạm phải những sai lầm kiểu:

$\begin{array}{r} 234 \\ -178 \\ \hline 144 \end{array}$	Giải thích của học sinh: lấy số lớn trừ số bé: 8 – 4, 7 – 3, 2 – 1)	$\begin{array}{r} 334 \\ -178 \\ \hline 066 \end{array}$	Giải thích của học sinh: Vay 2 ở hàng trăm để thêm 10 vào hàng chục và 10 vào hàng đơn vị

Hai mươi sáu năm sau, Tempier (2010) cũng nhận thấy chính những khó khăn ấy ở học sinh tiểu học Pháp. Dưới đây là hai ví dụ về sai lầm của HS trình độ CE2 ở Pháp (tương ứng với lớp 3 của Việt Nam) mà Tempier đã đưa ra:

3. Complète	**3. Hãy điền tiếp**
a. 8 dizaines + 5 unités = .8..5……	a. 8 chục + 5 đơn vị = …….
b. 1 centaine + 9 dizaines + 3 unités = .1.9.3….	b. 1 trăm + 9 chục + 3 đơn vị = ……
c. 6 centaines + 9 unités = .6..9…….	c. 6 trăm + 9 đơn vị = ….
d. 7 unités + 2 dizaines + 4 centaines = ..7.2.4.	d. 7 đơn vị + 2 chục + 4 trăm = ……
e. 3 dizaines + 6 centaines = .3..6……	e. 3 chục + 6 trăm = …….

Théo – CE2

3. Complète	**5. Complète**
a. 8 dizaines + 5 unités = .85……..	a. 2 dizaines + 15 unités = ..35……
b. 1 centaine + 9 dizaines + 3 unités = 193…..	b. 4 centaines + 10 dizaines = .410….
c. 6 centaines + 9 unités = 609…..	c. 5 centaines + 12 dizaines + 3 unités = 519…….
d. 7 unités + 2 dizaines + 4 centaines = .427.	d. 6 centaines + 21 dizaines + 14 unités = .635…..
e. 3 dizaines + 6 centaines = 630…..	

Élisa, CE2

Tác giả cho rằng có lẽ Théo có nhìn thấy mối liên hệ giữa đơn vị với thứ tự các chữ số, nhưng không thể kết hợp chúng với nhau. Élisa trả lời đúng cho bài tập số 3. Dường như em đã hiểu phương diện vị trí của hệ đếm. Nhưng như thế vẫn chưa đủ để thành công ở bài số 5. Trong trường hợp này, chẳng hạn ở câu c, cần phải hiểu phương diện thập phân, nắm mối liên hệ giữa các đơn vị để đi đến đáp số 623 (tham khảo Tempier, 2010, tr. 60-61).

- ***Về phía giáo viên***

Không chỉ nghiên cứu khó khăn của học sinh, Tempier (2010) còn chỉ ra những vấn đề cần xem xét cả về phía giáo viên, thông qua các công trình của Liping Ma (1999) và Parouty (2005).

> "Qua phỏng vấn nhiều giáo viên ở Mĩ, tác giả[1] nhận thấy một số người đã không huy động kiến thức về hệ đếm để giải thích những kĩ thuật tính toán trong phép trừ và phép nhân. Thậm chí, khi giải thích, những giáo viên này đã sử dụng thuật ngữ "place value" (giá trị của các chữ số tùy thuộc vào vị trí của chúng) không hoàn toàn đúng như nghĩa của từ."
>
> (Tempier, 2010, tr.59)

Theo Liping Ma (1999), những giáo viên được phỏng vấn :

> "chỉ tập trung vào nửa đầu tiên, place, để nói về "place value". […] Khi nói về "cột hàng chục", hay "cột hàng trăm", họ không nhấn mạnh vào giá trị của chữ số ở cột ấy. Họ sử dụng "hàng chục", "hàng trăm" chỉ như những cái nhãn gán cho các cột ấy mà thôi."
>
> (Liping Ma, 1999, tr. 29. Trích theo Tempier, 2010, tr.59)

Về phần mình, Parouty (2005) đã trao đổi với một số giáo viên tiểu học Pháp để tìm hiểu xem họ nghĩ gì về bài toán sau đây, dự định đưa ra cho học sinh trình độ CE2: *"Để lát*

[1] Liping Ma, 1999. (ND)

gạch một diện tích phẳng, người ta cần 8564 viên gạch vuông. Gạch được bán theo từng gói 100 viên. Vậy cần phải đặt mua bao nhiêu gói?". Phần lớn giáo viên trả lời: "*đây là tình huống dạy học phép chia và không thể đặt ra cho học sinh CE2 được"*. Quá ngạc nhiên, Parouty hỏi tiếp: "*nếu chính bạn được yêu cầu thực hiện phép chia này thì bạn làm thế nào?"*. Tất cả đều trả lời: "*chỉ cần đọc trực tiếp số trăm thôi"*. Tác giả bình luận:

> "Khi đặt ra tình huống lát gạch này, tôi đã không tưởng tượng là giáo viên lại đưa ra cách giải thích như vậy. Điều làm tôi ngạc nhiên là lợi ích của bài toán sẽ thay đổi, tùy theo việc họ đặt tình huống trong bối cảnh học đường hay bối cảnh cuộc sống hàng ngày, bối cảnh xã hội. Họ chờ đợi ở học sinh của mình những chiến lược mà chính họ cũng không huy động."
>
> (Parouty, 2005. Trích theo Tempier, 2010, tr.60)

Hiện tượng này xảy ra không phải do giáo viên thiếu kiến thức. Nó cần được giải thích trong mối liên hệ với những gì mà thể chế đặt ra cho việc dạy học hệ đếm thập phân. Những ràng buộc thể chế có ảnh hưởng lớn đến suy nghĩ của giáo viên về việc dạy các tri thức toán học.

Ảnh hưởng của sự lựa chọn thể chế cũng là lí do mà Bednarz và Janvier viện dẫn để giải thích cho sai lầm của học sinh. Họ cho rằng nguyên nhân nằm ở những hoạt động được đưa ra cho học sinh trong dạy học. Trong những hoạt động ấy, "việc biểu diễn số theo hàng, tuân thủ thứ tự trong cách viết số theo quy ước", "việc áp đặt quá sớm một sự biểu diễn theo thứ tự tất yếu sẽ dẫn trẻ đến chỗ giải thích cách viết bằng những thuật ngữ *thứ tự*, *vị trí*, và tách xa khỏi nghĩa thực sự gắn với vị trí theo cách nhóm". Như vậy, để nghiên cứu việc dạy học toán nói chung, dạy học hệ đếm thập phân nói riêng, cần phải xem xét sự lựa chọn của thể chế, thông qua phân tích chương trình, sách giáo khoa (SGK), sách giáo viên, các đề thi quốc gia, v.v…

Tiếp theo dòng nghiên cứu, chúng tôi tự hỏi: Liệu học sinh Việt nam có gặp những khó khăn tương tự? Vì sao? Làm thế nào để họ làm chủ và huy động được các kiến thức về hệ đếm thập phân, một kiến thức toán học nền tảng? Thừa nhận cách giải thích của các tác giả trên, cũng là phù hợp với quan điểm của Thuyết nhân học, chúng tôi xác định rằng ***phân tích sự lựa chọn của thể chế là phương pháp nghiên cứu*** cần theo đuổi để tìm hiểu việc dạy học hệ đếm thập phân ở trường tiểu học Việt Nam.

3. Thiết lập lưới các tổ chức toán học tham chiếu: vì sao và như thế nào ?

Về mặt phương pháp luận, để phân tích sự lựa chọn của thể chế, chúng tôi đặt mình vào Thuyết nhân học trong Didactic (Chevallard, 1992) được hình thành từ khái niệm *chuyển hóa sư phạm* do Chevallard (1991) đề nghị. Khái niệm *chuyển hóa sư phạm* nhắc nhở nhà nghiên cứu và giáo viên tránh một cách nghĩ sai lầm, cho rằng tri thức toán học trình bày trong chương trình hay SGK tuy có được đơn giản hóa (để có thể dạy được và học được) nhưng vẫn là bản copy trung thành của tri thức bác học. Theo quan niệm này, người ta không đặt ra câu hỏi về sự thỏa đáng của những lựa chọn thể chế. Thực ra thì không phải chỉ có duy nhất một cách lựa chọn. Mà mỗi lựa chọn đều đặt ra nhiều ràng buộc và có ảnh hưởng lớn đến ứng xử của giáo viên cũng như học sinh.

Sự lựa chọn của thể chế thể hiện một phần quan trọng ở những hoạt động đưa ra cho học sinh. Mỗi hoạt động thuộc một kiểu nhiệm vụ nào đó, là yếu tố đầu tiên trong bốn yếu tố tạo thành một tổ chức toán học, viết tắt là *OM* (gốc từ tiếng Pháp là *Organisation Mathématique*)[2]. Theo ngôn ngữ của khái niệm tổ chức toán học, Bosch và Gascon (2005) mô tả các mắt xích của quá trình chuyển hóa sư phạm bằng sơ đồ :

OM bác học → OM cần dạy → OM được dạy → OM học được

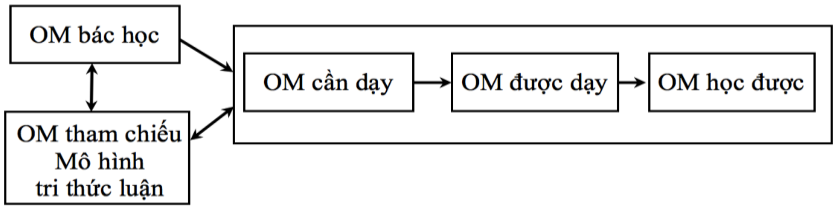
Bosch và Gascon (2005) nhấn mạnh: không thể hiểu kiến thức học sinh học nếu không nghiên cứu các mắt xích của quá trình chuyển hóa sư phạm. Đó chính là lí do giải thích cho việc chúng tôi bàn đến vấn đề phân tích sự lựa chọn của thể chế - một trong các mắt xích đó, đối với việc dạy học hệ đếm thập phân.

Như vậy, vấn đề là làm rõ các *OM* cần dạy. Ở đây, câu hỏi đặt ra cho nhà nghiên cứu là: lấy cái gì làm căn cứ để bàn về tính thỏa đáng của các *OM* cần dạy cũng như để xây dựng các tình huống dạy học? Chính phân tích tri thức luận sẽ mang lại câu trả lời cho câu hỏi này[3]. Phân tích đó sẽ giúp nhà nghiên cứu xác định *những tổ chức toán học cần được triển khai* trong dạy học. Bosch và Gascon (2005) gọi đó là các *OM* tham chiếu.

> "*OM* tham chiếu là *OM* mà nhà nghiên cứu xem là cơ sở để thực hiện phân tích của mình. Nó không nhất thiết phải trùng với *OM* bác học, vốn là nguồn gốc hình thành nên nó (vì trong *OM* tham chiếu đã chứa đựng những yếu tố của các *OM* bác học). Nhưng *OM* tham chiếu được diễn đạt theo những thuật ngữ rất gần gũi với các *OM* bác học. *OM* tham chiếu là *OM* mà nhà nghiên cứu dùng để kiểm chứng tính ngẫu nhiên và vì thế mà nó phải chịu những thay đổi thường xuyên".
>
> (Bosch et Gascon, 2005. Trích theo Tempier, 2013, tr.12)

Những *OM* tham chiếu liên quan đến đối tượng tri thức *O* là lưới vấn đề mà nhà nghiên cứu có thể sử dụng để xem xét các *OM* cần dạy, hay phân tích thực hành dạy học của giáo viên, cũng là điểm tựa để giáo viên thiết kế dự án giảng dạy của mình. Nhưng cũng cần phải nói đến mối liên hệ ngược lại giữa *OM* cần dạy với *OM* tham chiếu. Trong một thể chế dạy học có thể có những *OM* cần dạy là "vết" của một hay một số *OM* bác học nào đó (đã được làm biến đổi cho phù hợp với các ràng buộc của thể chế). Vì thế, không phải chỉ phân tích lịch sử, mà việc nghiên cứu những tài liệu học đường (chương trình, SGK phổ thông, giáo trình bậc đại học, sách giáo viên, các đề thi, v.v…) trong nhiều thể chế khác nhau cũng mang lại những yếu tố để thiết lập các *OM* tham chiếu. Hai phân tích (tri thức luận và thể chế) bổ sung cho nhau trong sơ đồ sau của Bosche và Garcon (2005) :

[2] Nếu muốn tìm hiểu khái niệm này, bạn đọc có thể tham khảo Annie B. và các tác giả, 2004.
[3] Về lợi ích của phân tích tri thức luận đối với các nghiên cứu về sự lựa chọn của thể chế, bạn đọc có thể tìm thấy câu trả lời đầy đủ hơn trong Lê Thị Hoài Châu, 2017.



4. Một lưới *OM* tham chiếu cho dạy học hệ đếm thập phân

Mục đích của chúng tôi là tìm hiểu các *OM* tham chiếu cho phép làm rõ phương diện thập phân của hệ đếm. Chúng tôi nhắc lại rằng *OM* tham chiếu được nhà nghiên cứu xây dựng và sử dụng như một công cụ để xem xét các *OM* cần dạy từ phương diện tri thức luận. Phương pháp luận để xây dựng, như đã trình bày trên, sẽ là tiến trình gồm hai bước:

- Nghiên cứu tri thức bác học, ở đây là hệ đếm thập phân;
- Sử dụng một số kết quả phân tích thể chế đã có, trong đó các *OM* cần dạy đã được xác định.

4.1. Đặc trưng tri thức luận của hệ đếm thập phân

Trong khuôn khổ bài báo này, chúng tôi không trình bày một nghiên cứu tri thức luận về hệ đếm thập phân (lịch sử hình thành, các cách định nghĩa, v.v…). Đặc trưng tri thức luận của hệ đếm thập phân đã được chúng tôi nêu ở phần đầu của bài báo. Hiểu hệ đếm thập phân là hiểu và sử dụng được định lí cơ bản về hệ đếm. Đối với học sinh tiểu học thì điều đó được xác định qua việc nắm được các đơn vị đếm, mối quan hệ giữa chúng, và liên kết hai phương diện (vị trí, thập phân) trong việc giải quyết nhiều vấn đề về số (đọc, viết số, so sánh, giải thích các quy tắc tính toán, đổi đơn vị đo, v.v…).

4.2. Ba tổ chức toán học địa phương liên quan đến hệ đếm

Chambris (2008) đã tiến hành nghiên cứu lịch sử dạy học hệ đếm thập phân trong một giai đoạn khá dài (thế kỉ XX) của giáo dục toán học ở Pháp, thông qua phân tích các chương trình, SGK. Một trong những kết luận mà tác giả đưa ra là trong thời gian cuối thế kỉ, những hoạt động liên quan đến phương diện thập phân đã ít xuất hiện trong các SGK toán tiểu học.

Kế thừa kết quả nghiên cứu của Chambris và một số tác giả khác, bằng cách tính đến các *OM* cần dạy và được dạy kể từ thế kỉ XX, Tempier (2013) đã xây dựng một lưới các *OM* tham chiếu cho hệ đếm thập phân. Các *OM* được xây dựng chỉ liên quan đến số tự nhiên. Trong phần còn lại của bài báo, chúng tôi cũng chỉ nói về số tự nhiên.

Ba tổ chức toán học địa phương được Tempier kí hiệu là OM_{card}, OM_{trad}, OM_{ord} (*card*, *trad*, *ord* lần lượt là viết tắt của các từ *cardinal* (bản số, lực lượng) *tradition* (dịch), *ordinal* (thứ tự)), trong đó OM_{card} và OM_{ord} là lí do tồn tại của OM_{trad}. Ba tổ chức toán học địa phương này cùng thuộc một tổ chức toán học vùng liên quan đến kiến thức về số nguyên. Tổ chức toán học vùng ấy lại nằm trong tổ chức toán học tổng thể liên kết các kiến thức về đại lượng, số đo, số và tính toán (tham khảo Tempier (2013), tr. 43-44). Bảng 1 dưới đây kể ra một số kiểu nhiệm vụ tạo nên các tổ chức toán học điểm thuộc mỗi một trong ba tổ chức toán học địa phương trên.

Bảng 1. *Một số kiểu nhiệm vụ tạo nên lưới tổ chức toán học tham chiếu về hệ đếm*

Ba *OM* địa phương	***OM**$_{card}$* nhóm các kiểu nhiệm vụ vận dụng số ở khía cạnh số lượng	***OM**$_{trad}$* nhóm các kiểu nhiệm vụ đọc, viết và chuyển đổi các dạng viết	***OM**$_{ord}$* nhóm các kiểu nhiệm vụ vận dụng số ở khía cạnh thứ tự
Một số kiểu nhiệm vụ tạo thành các tổ chức toán học điểm	- Đếm số phần tử của một tập hợp - Tạo ra một tập hợp có số phần tử cho trước. - So sánh số phần tử của các tập hợp	- Phân tích một số - Tổng hợp (tạo ra) một số - Chuyển đổi giữa các đơn vị đếm - Viết số được cho bằng lời - Đọc (bằng lời) một số viết ở dạng dãy chữ số	- So sánh hai số tự nhiên - Sắp xếp thứ tự một dãy số - Tìm số nằm giữa hai số - Đóng khung một số (giữa hai số tròn chục, tròn trăm,… liên tiếp) - Đặt số / đọc số trên một đường thẳng khắc vạch - Viết tới, viết lùi (hay đọc tới, đọc lùi) một dãy số
Công nghệ	Dãy đếm miệng theo đơn vị nhỏ nhất (một, hai, ba,…) Xem chục, trăm,… như những đơn vị đếm đơn giản (một chục, hai chục,…, một trăm, hai trăm,…)	- *Phương diện vị trí:* các đơn vị từ bé đến lớn được viết theo thứ tự từ phải sang trái - *Phương diện thập phân:* mười đơn vị của một hàng bằng một đơn vị của hàng đứng ngay sau nó	Cả hai phương diện của hệ đếm đều cần thiết cho việc giải thích các kĩ thuật giải quyết những kiểu nhiệm vụ trên
	Công nghệ chung θ là “hệ đếm thập phân”, được cấu thành từ hai yếu tố, θ_P nói về phương diện vị trí và θ_D nói về phương diện thập phân.		

5. Phân tích thể chế: Một đóng góp quan trọng của mô hình tổ chức toán học tham chiếu

Lưới các tổ chức toán học tham chiếu mang lại cho chúng tôi những yếu tố trả lời câu hỏi: Trong dạy học hệ đếm thập phân ở tiểu học, *cái gì cần tồn tại và có thể tồn tại*? Chúng tôi đã sử dụng lưới *OM* tham chiếu này để xem SGK toán bậc tiểu học đã tính đến những *cái cần tồn tại* này như thế nào. Đồng thời, để chỉ ra những *cái có thể tồn tại,* chúng tôi đặt phân tích SGK Việt Nam trong mối quan hệ so sánh với những kiểu nhiệm vụ hiện diện trong:

- Hàng loạt SGK hiện hành, trình độ CE2 của Pháp, được tham khảo từ công trình của Tempier (2013). Trong bảng 2 chúng tôi dùng chữ cái P để chỉ các SGK này;
- Các SGK toán tiểu học của Việt Nam, được kí hiệu bằng VN.

Kết quả phân tích của chúng tôi được trình bày tóm tắt trong Bảng 2. Chúng tôi không nói đến các yếu tố kĩ thuật, công nghệ, lí thuyết của những tổ chức toán học hình thành từ các kiểu nhiệm vụ được liệt kê qua phân tích các SGK.

Bảng 2. *Những kiểu nhiệm vụ hiện diện trong các SGK được phân tích*

OM địa phương	Kiểu nhiệm vụ		P	VN
OM_{card}	T1 : Đếm số phần tử của một tập hợp		×	×
	T2 : Tạo ra một tập hợp ứng với số		×	
	T3 : So sánh các tập hợp		×	×
OM_{trad}	T4 Phân tích một số	T41: Phân tích số $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ thành các nghìn, trăm, chục, đơn vị	×	×
		T42: Phân tích số $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ thành tổng các số tròn nghìn, tròn trăm, tròn chục, đơn vị	×	×
		T43: Phân tích số $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ thành tổng các số tròn nghìn, tròn trăm, tròn chục, đơn vị dưới dạng các lũy thừa của 10	×	
		T44: Phân tích số $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ thành các nghìn, trăm, chục, đơn vị dưới dạng bảng	×	×
		T45: Xác định số chục, số trăm, số nghìn của số	×	
		T46: Xác định giá trị của chữ số a trong một số cho trước		×
		T47: Viết các chữ số thuộc lớp nghìn, lớp đơn vị của một số		×
	T5 Tổng hợp (tạo ra) một số	T51: Viết số biết số đó gồm $\overline{a_1000}$, $\overline{a_200}$, $\overline{a_30}$, $\overline{a_4}$ $a_1 \in N^*; a_2, a_3, a_4 \in N$ và đều nhỏ hơn hay bằng 9	×	×
		T52: Viết số biết số đó gồm a_1 nghìn, a_2 trăm, a_3 chục, a_4 đơn vị trong đó $a_1 \in N^*; a_2, a_3, a_4 \in N$ và đều nhỏ hơn hay bằng 9	×	×
		T53: Viết số biết số đó gồm a_1 nghìn, a_2 trăm, a_3 chục, a_4 đơn vị trong đó $a_1 \in N^*; a_2, a_3, a_4 \in N$	×	
	T6: Chuyển đổi giữa các đơn vị đếm trăm, chục, đơn vị		×	
	T7 : Viết số biết phát biểu bằng lời của số đó		×	×
	T8 : Đọc số		×	×
OM_{ord}	T9 : So sánh hai số tự nhiên		×	×
	T10 : Sắp xếp thứ tự một dãy số		×	×
	T11 : Tìm số nằm giữa hai số a và b (a < b)		×	×
	T12 : Đóng khung một số giữa hai số tròn chục liên tiếp		×	×
	T13 : Đặt số / đọc số trên một đường thẳng khắc vạch		×	×
	T14 : Viết tới, viết lùi một dãy số		×	×

So với danh sách các kiểu nhiệm vụ trong Bảng 1, phân tích SGK Việt Nam chỉ cho chúng tôi thấy thêm hai tổ chức toán học điểm thuộc OM_{trad}, được hình thành từ kiểu nhiệm vụ *T46* (*xác định giá trị của chữ số a trong một số cho trước*) và *T47* (*viết các chữ số thuộc lớp nghìn, lớp đơn vị của một số*).

Trong các kiểu nhiệm vụ trên, có 8/22 liên quan đến phương diện thập phân là: *T1, T42, T43, T45, T46, T51, T53* và *T6,* còn lại thì đến liên quan phương diện vị trí. Bảng trên cho thấy ở Pháp phương diện vị trí được ưu tiên với số kiểu nhiệm vụ nhiều hơn hẳn (13/20). Ghi nhận này dẫn Tempier đến kết luận rằng học sinh Pháp hiểu phép đếm chủ yếu dựa trên phương diện vị trí và như vậy sự ít chú trọng phương diện thập phân được xem là nguồn gốc của những khó khăn (Tempier, 2010). Thế nhưng nguyên lí thập phân lại cần thiết cho hệ đếm. Nguyên lí này có thể được làm việc qua các hoạt động huy động các quy tắc lập nhóm và rã nhóm. Theo tác giả thì hiện nay một số SGK Pháp đã chú trọng nhiều hơn đến các kiểu nhiệm vụ có huy động phương diện thập phân, cụ thể là *T53, T6* đã xuất hiện khá nhiều.

Ở Việt Nam, trong các SGK hiện hành dùng cho lớp 3, 4 hoàn toàn không xuất hiện *T2, T43, T53, T6* và như vậy chỉ có 5/18 kiểu nhiệm vụ liên quan phương diện thập phân.

Đối với *T5,* thể chế dạy học toán lớp 3, 4 Việt Nam cũng có đưa vào hai kiểu nhiệm vụ *T51* (*viết số biết số đó gồm* $\overline{a_1000}$, $\overline{a_200}$, $\overline{a_30}$, $\overline{a_4}$) và *T52* (*Viết số biết số đó gồm* a_1 *nghìn,* a_2 *trăm,* a_3 *chục,* a_4 *đơn vị trong đó* $a_1 \in \mathrm{N}^*; a_2, a_3, a_4 \in \mathrm{N}$ *và đều nhỏ hơn hay bằng 9*). Tuy nhiên, có một sự khác biệt trong cả hai kiểu nhiệm vụ trên: Trong SGK Pháp thì các đơn vị đếm có thể được sắp xếp theo thứ tự ngẫu nhiên, còn ở SGK Việt Nam thì chúng luôn luôn được xếp theo thứ tự từ hàng cao đến hàng thấp. Điều này có thể dẫn đến việc hình thành một quy tắc hành động mà theo đó thì khi viết thành số học sinh sẽ đặt lại các đơn vị đếm theo đúng thứ tự mà chúng được liệt kê trong đề bài tập. Quy tắc đó làm mờ đi ý nghĩa của phương diện thập phân, chỉ chú trọng phương diện vị trí. Do đó, việc sắp xếp các đơn vị đếm theo thứ tự ngẫu nhiên là cần thiết, nhằm tái lập lại ý nghĩa của phương diện thập phân, đồng thời cho thấy quy tắc hành động vừa nêu trên không mang lại câu trả lời chính xác nữa. Ngoài ra, trong các SGK toán lớp 3, 4 của Việt Nam hoàn toàn vắng mặt kiểu nhiệm vụ *T53* (*viết số biết số đó gồm* a_1 *nghìn,* a_2 *trăm,* a_3 *chục,* a_4 *đơn vị trong đó* $a_1 \in \mathrm{N}^*; a_2, a_3, a_4 \in \mathrm{N}$). Đây là một sự bổ sung quan trọng cho *T52*. Với *T53* thì các đơn vị đếm ở mỗi hàng có thể lớn hơn 9, đòi hỏi học sinh phải hiểu được các đơn vị đếm và mối quan hệ giữa chúng (phương diện thập phân).

Kiểu nhiệm vụ *T6* chính là bước đệm cần thiết để thực hiện *T53*. Ngoài ra, trong luận án của mình, Tempier đã chỉ ra sự cần thiết và tầm quan trọng của *T6*. Ta thấy, yếu tố công nghệ của *T6* là cơ sở để giải thích cho các kĩ thuật tính toán. Để minh họa, hãy xét một phân tích về kĩ thuật thực hiện phép toán cộng:

> "Trong trường hợp phép cộng, khi chúng ta thực hiện 1593 + 345, cần phải sắp xếp hai số từ bên phải để các chữ số cùng hàng ở hai số nằm thẳng cột với nhau.

$$\begin{array}{r} {}^{1} \\ 1593 \\ +\ 345 \\ \hline 1938 \end{array}$$

Trong khoảng hàng chục, chúng ta cộng 4 chục với 9 chục, chúng ta có được 13 chục mà chúng ta sau đó phải chuyển đổi sang 1 trăm và 3 chục. Vì vậy, có việc giữ lại 1 trong hàng trăm (nhớ 1 ở hàng trăm). Kĩ thuật được biện minh như sau: phương diện vị trí để biện minh cho sự sắp xếp theo chiều dọc của các con số và phương diện thập phân để biện minh cho sự chuyển đổi giữa các đơn vị (mối quan hệ 10 chục = 1 trăm cho ví dụ trên).

Trong trường hợp cộng có nhớ ở hàng cao nhất, chẳng hạn như 512 + 834, chuyển đổi được thực hiện trực tiếp trong kết quả. Ở ví dụ này : 5 trăm + 8 trăm = 13 trăm, tức là 1 nghìn và 3 trăm, chúng ta viết 3 cho hàng trăm và 1 cho hàng nghìn."

(Tempier, 2013, tr 55)

Để làm rõ hơn vị trí trong thể chế Việt Nam của các *OM* mà yếu tố công nghệ liên quan đến phương diện thập phân, chúng tôi cũng thống kê số lượng bài tập trong SGK và sách bài tập (SBT) toán 3, 4. Kết quả thu được là:

Bảng 3. *Bảng thống kê số lượng bài tập theo 2 phương diện vị trí và thập phân*

Phương diện	SGK, SBT Toán 3	SGK, SBT Toán 4	Tổng
Vị trí	105 (94,6%)	91 (82,7%)	196 (88,7%)
Thập phân	6 (5,4%)	19 (17,3%)	25 (11,3%)

Bảng thống kê cho thấy dù là lớp 3 hay lớp 4 thì số lượng bài tập có huy động phương diện vị trí cũng chiếm tỉ lệ áp đảo so với số bài tập cần huy động phương diện thập phân: 94,6% đối lập với 5,4% ở lớp 3 và 82,7% đối lập với 17,3% ở lớp 4. Tuy nhiên có thể thấy từ lớp 3 lên lớp 4 thì tỉ lệ bài tập loại thứ hai đã tăng lên đáng kể, từ 5,4% lên 17,3%, cho dù vẫn còn khá khiêm tốn so với phương diện vị trí. Như vậy, thể chế dạy học toán lớp 3, 4 Việt Nam cũng ưu tiên phương diện vị trí so với phương diện thập phân khi dạy học các nội dung về hệ đếm thập phân. Hiện tượng này cũng gặp trong thể chế dạy học lớp CE2 của Pháp. Chúng tôi nhắc lại rằng, các tác giả Pháp đã kết luận: Chính sự chưa chú trọng đúng mức phương diện thập phân là nguồn gốc của những sai lầm phổ biến ở học sinh.

6. Kết luận: đóng góp của mô hình OM tham chiếu

Lưới các *OM* tham chiếu một công cụ hiệu quả giúp nhà nghiên cứu làm rõ những nét chuyên biệt của thể chế dạy học một tri thức toán học xác định: cái gì cần tồn tại nhưng đã không tồn tại hoặc chỉ hiện diện mờ nhạt trong thể chế? Trong trường hợp của chúng tôi thì lưới *OM* tham chiếu do Tempier xây dựng là cơ sở để xem xét quan hệ của thể chế dạy học toán ở tiểu học Việt Nam với hệ đếm thập phân. Phân tích chương trình, SGK đặt trong cách tiếp cận của *Thuyết nhân học* và lưới *OM* tham chiếu đã cho phép chúng tôi trả lời các câu hỏi: Trong thể chế dạy học toán bậc tiểu học, hai phương diện *vị trí* và *thập phân* hiện diện như thế nào? Việc dạy và học phải chịu những ràng buộc gì? Đâu là hệ quả có thể dự đoán trước của chúng? Cái gì cần phải được bổ sung cho quan hệ của thể chế được xem xét với đối tượng hệ đếm thập phân?

Lưới *OM* tham chiếu còn giúp cho nhà nghiên cứu thiết kế các tình huống dạy học. Chúng tôi nhắc lại: "... *OM* tham chiếu là *OM* mà nhà nghiên cứu dùng để kiểm chứng tính ngẫu nhiên và vì thế mà nó phải chịu những thay đổi thường xuyên". Như vậy, sau tiến trình hai bước để thiết lập lưới các *OM* tham chiếu mà chúng tôi đã nói ở trên (nghiên cứu tri thức bác học; sử dụng những kết quả phân tích thể chế trong một số công trình đã có) thì bằng cách đưa thêm vào những yếu tố mới, nhà nghiên cứu có thể xây dựng tình huống dạy học nhắm đến một hay một số *OM* tham chiếu nào đó.

Trong thực tế, chúng tôi đã chọn *OM* hình thành từ kiểu nhiệm vụ *T6: chuyển đổi giữa các đơn vị đếm* - do sự cần thiết của nó đối với việc hiểu và sử dụng hệ đếm thập phân. Trong tình huống dạy học này, *OM* mà chúng tôi xây dựng chứa đựng thêm ba yếu tố sau mà chúng tôi muốn đưa thêm vào để kiểm chứng tính thỏa đáng của chúng.

Yếu tố thứ nhất là học sinh phải được làm việc với những số lớn.

Yếu tố thứ hai là trình huống có sử dụng phương tiện trực quan. Đây là một phương tiện không thể thiếu đối với dạy học nhiều tri thức toán ở bậc tiểu học. Để dạy hệ đếm thập phân, SGK Toán lớp 1 đã dùng các que tính: 1 que tính rời biểu diễn 1 đơn vị, 10 que tính được bó lại biểu diễn cho 1 chục hay 10 đơn vị. Ngoài que tính, các hình vẽ (bông hoa, con chim, v.v…) cũng được sử dụng khi trình bày các phép tính cộng, trừ, nhân, chia. Đến lớp 2, khi học số tự nhiên trong phạm vi 1000, học sinh được học thêm đơn vị đếm mới là "trăm", "nghìn" và biết thêm quan hệ mới giữa các đơn vị (10 chục bằng 1 trăm, 10 trăm bằng 1 nghìn). Lúc này phương tiện que tính không còn tiện lợi nên người ta dùng mô hình các ô vuông. Khi học sang vòng số lớn hơn (ở lớp 3, 4), mô hình ô vuông cũng không còn tiện lợi cho việc biểu diễn mối quan hệ giữa các đơn vị. Lúc này người ta dùng các hình lập phương và các thẻ có ghi số (tham khảo Nguyễn Thị Minh Yến, 2017). So với thẻ ghi số, các hình lập phương trực quan hơn, nhưng lại chỉ thuận lợi cho những số có nhiều nhất là 7 chữ số. Có lẽ vì khó khăn của việc dùng phương tiện trực quan để trình bày những vấn đề liên quan đến các số lớn nên loại phương tiện này ít được khai thác cho việc nghiên cứu các vòng nhiều chữ số. Từ những ghi nhận trên, chúng tôi muốn đưa vào trong tình huống dạy học những số lớn với phương tiện trực quan là các thẻ số.

Yếu tố thứ ba mà chúng tôi tính đến được đặt trong phạm vi Lí thuyết tình huống. Hoạt động được thiết kế dưới dạng trò chơi, có chứa đựng sự trao đổi giữa các thành viên cùng đội và sau đó là giữa các đội. Phương tiện vật chất (thẻ số) trao cho học sinh làm việc tạo nên môi trường phản hồi để loại bỏ các chiến lược không dẫn đến thành công. Bạn đọc có thể tham khảo tình huống được thiết kế trong Nguyễn Thị Minh Yến (2017).

Một đóng góp thứ ba của mô hình *OM* tham chiếu nằm ở những nghiên cứu thực hành dạy học của giáo viên. Nó cho phép ta phân tích các *OM* được giáo viên triển khai trong lớp học. Đây là một hướng phát triển tiếp theo cho nghiên cứu mà chúng tôi đã thực hiện trong Nguyễn Thị Minh Yến (2017).

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Bessot A., Comiti C., Lê Thị Hoài Châu, Lê Văn Tiến. (2004). *Những yếu tố cơ bản của didactic toán (Éléments fondamentaux de didactique des mathématiques)* - Sách song ngữ Việt-Pháp. NXB ĐHQG Thành phố Hồ Chí Minh.

Lê Thị Hoài Châu. (2017). Sự cần thiết của phân tích tri thức luận đối với các nghiên cứu về hoạt động dạy học và đào tạo giáo viên. *Kỉ yếu Hội thảo CIDMath 6*, NXB Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh

Đỗ Đình Hoan, (Chủ biên) và các tác giả. (2014). *Toán 1, Toán 2, Toán 3, Toán 4*. NXB Giáo dục Việt Nam.

Đỗ Đình Hoan. (Chủ biên) và các tác giả. (2014). *Sách giáo viên Toán 1, Toán 2, Toán 3, Toán 4.* NXB Giáo dục Việt Nam.

Bednarz, N., Janvier, B. (1984). *La numération: les difficultés suscitées par son apprentissage*, Grand N, N°33, 5-31.

Bosch M. et Gascon J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In Mercier A., Margolinas C. (eds). *Balises pour la didactique des mathématiques,* Edition la Pensée Sauvage, Grenoble, 177-122.

Chaachoua Yasmina (2016), *Praxéologie de référence de l'aspect décimal de la numération par la manipulation selon le modèle T4TEL*, Mémoire de Master 2, Université de Grenoble Alpes.

Chambris C. (2012). Consolider la maîtrise de la numeration etdes grandeurs à l'entrée au collège. Le système métrique peut-il être utile ? *Petit x*, N°89, 5-31, Edition La Pensée Sauvage, Grenoble, France.

Chevallard. (1991). *La transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné.* Edition La Pensée Sauvage, Grenoble, France.

Chevallard. (1992). Conceps fondamentaux de la Didactique: Perspectivé apportées par une approche anthropologique, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, N° 12 (1), 73-112.

Ma L. (1999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics.* Edition L'harmattant, 259-312.

Parouty V. (2005). Compter sur lé erreurs pour compter sans erreurs: état des lieux sur l'enseignement de la numération décimale de position au cycle 3. *Actes du XXXIème colloque COPIRELEM*. IREM de Toulouse.

Tempier F. (2010). Une étude dé programmé et manuels sur la numeration décimale au CE2, *Grand N, N° 86,* 59-90.

Tempier F. (2013). *La numération décimale de position à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource,* Thèse de doctorat, Université Paris 7.