TẠP CHÍ KHOA HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE

Tập 18, Số 6 (2021): 1051-1063

Vol. 18, No. 6 (2021): 1051-1063

ISSN:
2734-9918

Website: *http://journal.hcmue.edu.vn*

Bài báo nghiên cứu

MỘT CHỨNG MINH NGẮN CHO BẤT ĐẲNG THỨC HÀM PHÂN PHỐI TRÊN CÁC TẬP MỨC

Nguyễn Thành Nhân[1*], Trần Cát Sử[1], Huỳnh Phước Nguyên[2]

[1]Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

[2]Trường THPT Nguyễn Du, Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

[*]Tác giả liên hệ: Nguyễn Thành Nhân – Email: nhannt@hcmue.edu.vn

Ngày nhận bài: 01-6-2021; ngày nhận bài sửa: 14-6-2021; ngày duyệt đăng: 17-6-2021

TÓM TẮT

Tính chính quy nghiệm cho phương trình elliptic tựa tuyến tính là một trong những bài toán đang được nghiên cứu sôi nổi hiện nay bởi nhiều tác giả, bằng nhiều phương pháp khác nhau. Để khảo sát bài toán này, một phương pháp mới được đề xuất gần đây liên quan đến bất đẳng thức hàm phân phối trên các tập mức thông qua toán tử cực đại cấp phân số. Phương pháp này hiệu quả và có thể ứng dụng cho nhiều lớp phương trình đạo hàm riêng khác nhau. Các điều kiện đủ để chứng minh được bất đẳng thức hàm phân phối là điểm mấu chốt để thu được đánh giá Lorentz trong phương pháp này. Trong bài báo này, chúng tôi đưa ra một chứng minh ngắn cho bất đẳng thức hàm phân phối trên tập mức, dựa trên một điều kiện đủ chung cho hai điều kiện đủ được đề xuất trong bài báo gần đây (Nguyen, & Tran, 2021a).

Từ khóa: đánh giá gradient; bất đẳng thức hàm phân phối trên tập mức; Không gian Lorentz; phương trình *p*-Laplace

1. Giới thiệu

Bài toán đánh giá gradient cho nghiệm của phương trình đạo hàm riêng thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà toán học trong thời gian gần đây. Đây là bài toán liên quan đến tính chính quy nghiệm, một trong những tính chất có ý nghĩa quan trong khi nghiên cứu về phương trình đạo hàm riêng. Cho đến nay, có khá nhiều phương pháp và kĩ thuật được các nhà toán học sử dụng để nghiên cứu đánh giá gradient cho nghiệm của các phương trình đạo hàm riêng, từ dạng phương trình cụ thể trong nhiều ngành khoa học khác nhau, đến các lớp phương trình được tổng quát hóa trong toán học. Trong đó, có thể kể đến các phương pháp đánh giá tính chính quy nghiệm cổ điển, dựa trên các bất đẳng thức Hölder, bất đẳng thức Poincaré, bất đẳng thức Sobolev và các định lí nhúng Sobolev, được trình bày khá phổ biến trong nhiều tài liệu tham khảo về phương trình đạo hàm riêng. Các phương pháp này đánh giá được tính chính quy của nghiệm yếu phương trình đạo hàm riêng trong không gian các

Cite this article as: Nguyen Thanh Nhan, Tran Cat Su, & Huynh Phuoc Nguyen (2021). A short proof for level-set inequalities on distribution functions. *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science, 18*(6), 1051-1063.

hàm khả tích Lesbegue, không gian Sobolev. Bên cạnh đó, sự phát triển liên tục và mạnh mẽ của lĩnh vực giải tích điều hòa gần đây đã mở ra một số hướng nghiên cứu mới cho bài toán khảo sát tính quy nghiệm cho phương trình đạo hàm riêng. Đặc biệt, lí thuyết của Calderón-Zygmund hoặc tính bị chặn của các toán tử cực đại như toán tử Hardy-Littlewood được sử dụng như một công cụ hữu hiệu để thu được tính chính quy nghiệm của phương trình đạo hàm riêng. Ngoài ra, còn khá nhiều phương pháp với kĩ thuật khác nhau bằng cách thông qua toán tử Riesz của De Gorgi hoặc sử dụng bổ đề phủ Vitali, có thể kể đến một số tác giả nổi bật như L. Caffarelli (Caffarelli, & Peral, 1998), G. Mingione (Acerbi, & Mingione, 2001), (Mingione, 2010, 2011), S.-S. Byun (Byun, & Wang, 2004, 2007, 2008, 2012).

Trong một số bài báo gần đây (Tran, & Nguyen, 2019a, 2019b, 2020), (Nguyen, & Tran, 2020), các tác giả đã sử dụng kĩ thuật good-λ, được đề xuất đầu tiên bởi G. Mingione (Mingone, 2001), để chứng minh đánh giá gradient cho phương trình elliptic tựa tuyến tính dưới tác động của toán tử cực đại cấp phân số $\mathbf{M}_\alpha$. Cần nhấn mạnh rằng toán tử cực đại cấp phân số có liên quan mật thiết đến đạo hàm cấp phân số và một số thế vị như thế vị Riesz và thế vị Wolff (xem các bài báo (Mingione, 2010, 2011)), vốn đang được sử dụng một cách hữu hiệu khi nghiên cứu tính chất nghiệm của phương trình đạo hàm riêng gần đây. Mối liên hệ với đạo hàm cấp phân số còn có thể mang lại thông tin hữu ích khi nghiên cứu tính chính quy nghiệm trong không gian Sobolev bậc không nguyên, của nhiều lớp phương trình đạo hàm riêng.

Dựa trên ý tưởng của kĩ thuật good-λ, các tác giả sau đó đã đưa ra một phương pháp mới liên quan đến các bất đẳng thức hàm phân phối tác động lên tập mức của các số hạng chứa nghiệm và dữ liệu, dưới tác động của toán tử cực đại cấp phân số trong (Nguyen, & Tran, 2021a). Cụ thể, tác giả đưa ra hai điều kiện đủ cho hai hàm đo được $\mathcal{F},\mathcal{G}$ (đặc trưng cho nghiệm và dữ liệu của phương trình đạo hàm riêng) để chứng minh được bất đẳng thức so sánh trong không gian Lorentz $L^{q,s}(\Omega)$ dưới dạng

$$\|\mathbf{M}_\alpha\mathcal{G}\|_{L^{q,s}(\Omega)} \le C\|\mathbf{M}_\alpha\mathcal{F}\|_{L^{q,s}(\Omega)}.$$

Phương pháp này sau đó được áp dụng hiệu quả cho nhiều bài toán khác nhau, bao gồm phương trình elliptic tựa tuyến tính (Nguyen, & Tran, 2021a), bài toán obstacle (Nguyen, & Tran, 2020b, 2021b), bài toán pha kép (Tran, & Nguyen, 2021), bài toán chứa số hạng Schödinger (Tran, Nguyen, & Nguyen, 2021).

Để chứng minh bất đẳng thức hàm phân phối, hai điều kiện đủ trong (Nguyen, & Tran, 2021a) dựa trên sự tồn tại của một hàm đo được, thỏa mãn bất đẳng thức Hölder ngược hoặc thuộc không gian L^∞_{loc}. Tuy nhiên, chúng tôi nhận thấy rằng hai điều kiện đủ này có thể được thu gọn trong cùng một điều kiện chung thông qua một lớp hàm thỏa mãn bất đẳng thức Hölder ngược. Từ ý tưởng trên, trong bài báo này, chúng tôi chứng minh lại một kết quả thu gọn hơn trong (Nguyen, & Tran, 2021a) về bất đẳng thức hàm phân phối trên tập mức. Từ đó suy ra đánh giá so sánh trong không gian Lorentz. Kết quả này có thể ứng dụng cho bài toán chính quy nghiệm của nhiều lớp phương trình đạo hàm riêng như trong nhiều bài báo được công bố gần đây.

2. Một số định nghĩa và giả thiết cho điều kiện đủ

Trong mục này, chúng tôi giới thiệu một số định nghĩa và kí hiệu được sử dụng trong toàn bài báo. Từ đó, chúng tôi đưa ra các giả thiết chính cho điều kiện đủ để xây dựng bất đẳng thức hàm phân phối trên tập mức.

Định nghĩa 1.1. Cho $0 \le \alpha \le n$ và $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Khi đó toán tử cực đại cấp phân số $\mathbf{M}_\alpha f$ của f được định nghĩa như sau:

$$\mathbf{M}_\alpha f(x) = \sup_{\rho>0} \rho^\alpha \frac{1}{\mathcal{L}^n\left(B_\rho(x)\right)} \int_{B_\rho(x)} |f(y)|dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.1}$$

trong đó kí hiệu $\mathcal{L}^n(E)$ là độ đo Lebesgue của tập E trong $\mathbb{R}^n$.

Định nghĩa 1.2. Cho $0 \le \alpha \le n$ và $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Ta định nghĩa hai toán tử cực đại chặt cụt của hàm f ở cấp $r > 0$ như sau:

$$\mathbf{M}^r_\alpha f(x) = \sup_{0<\rho<r} \rho^\alpha \frac{1}{\mathcal{L}^n\left(B_\rho(x)\right)} \int_{B_\rho(x)} |f(y)|dy \tag{2.2}$$

và

$$\mathbf{T}^r_\alpha f(x) = \sup_{\rho>r} \rho^\alpha \frac{1}{\mathcal{L}^n\left(B_\rho(x)\right)} \int_{B_\rho(x)} |f(y)|dy. \tag{2.3}$$

Định nghĩa 1.3. Cho $B \subset \Omega$, ta kí hiệu $Q(B)$ là lớp các bộ ba hàm $(\mathcal{G},\varphi,\psi)$ xác định trên B sao cho tồn tại hằng số $\tilde{c} \ge 1$ thỏa mãn các đánh giá sau trên B:

$$\mathcal{G} \le \tilde{c}(\varphi+\psi), \quad \varphi \le \tilde{c}(\mathcal{G}+\psi), \quad \psi \le \tilde{c}(\mathcal{G}+\varphi). \tag{2.4}$$

Định nghĩa 1.4. Cho $\gamma > 1$ và $\varphi \in L^1_{loc}(\Omega_{2r}(\upsilon))$, $r > 0$ và $\upsilon \in \mathbb{R}^n$ trong đó chúng tôi kí hiệu $\Omega_{2r}(\upsilon) = B_{2r}(\upsilon) \cap \Omega$. Hàm φ được gọi là thuộc vào lớp Hölder ngược $\mathcal{RH}^\gamma(\Omega_r(\upsilon))$ nếu tồn tại $C = C(n,\gamma) > 0$ sao cho

$$\left(\frac{1}{\mathcal{L}^n\left(\Omega_r(\upsilon)\right)} \int_{\Omega_r(\upsilon)} [\varphi(x)]^\gamma dx\right)^{\frac{1}{\gamma}} \le C \frac{1}{\mathcal{L}^n\left(\Omega_{2r}(\upsilon)\right)} \int_{\Omega_{2r}(\upsilon)} \varphi(x)dx. \tag{2.5}$$

Định nghĩa 1.5. Với $r_0 > 0$ cố định, hai hàm $\mathcal{F},\mathcal{G}$ được gọi là thỏa mãn điều kiện **(A1)** với số $\gamma_0 \in (1,+\infty]$ cho trước nếu với mọi $\upsilon \in \overline{\Omega}$, $r \in (0; r_0/2]$, ta có thể tìm được hai hàm đo được φ,ψ xác định trên $\Omega_{2r}(\upsilon)$ sao cho $(\mathcal{G},\varphi,\psi)\in Q(\Omega_{2r}(\upsilon))$ với hằng số $\tilde{c}\geq 1$, $\varphi\in\mathcal{RH}^{\gamma_0}(\Omega_r(\upsilon))$ và đánh giá sau luôn đúng với mọi $\varepsilon\in(0;1)$:

$$\int_{\Omega_r(\upsilon)}\psi(x)dx\leq\varepsilon\int_{\Omega_{2r}(\upsilon)}\mathcal{G}(x)dx+c_\varepsilon\int_{\Omega_{2r}(\upsilon)}\mathcal{F}(x)dx. \tag{2.6}$$

Chúng tôi nhấn mạnh rằng điều kiện (2.6) trên đây được xem là thu gọn của hai điều kiện ($A2_1$) và ($A2_2$) trong bài báo (Nguyen & Tran, 2021a) vì với giả thiết (2.4) và (2.6) (cũng chính là điều kiện ($A2_1$)) trong trường hợp $\gamma_0=+\infty$, ta có thể dễ dàng chứng minh được điều kiện ($A2_2$) được thỏa mãn.

Định nghĩa 1.6. Hai hàm $\mathcal{F},\mathcal{G}$ được gọi là thỏa mãn điều kiện **(A2)** nếu có hằng số C dương sao cho:

$$\int_\Omega\mathcal{G}(x)dx\leq C\int_\Omega\mathcal{F}(x)dx. \tag{2.7}$$

Định nghĩa 1.7. Cho $0\leq\alpha\leq n$ và $\mathcal{G}\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Khi đó hàm phân phối trên các tập mức của hàm $\mathcal{G}$, kí hiệu là $d^\alpha_{\mathcal{G}}$, được định nghĩa là hàm phân phối (theo nghĩa thông thường) của hàm $\mathbf{M}_\alpha\mathcal{G}$. Cụ thể hơn, với mọi $\lambda\geq 0$, ta đặt

$$d^\alpha_{\mathcal{G}}(\Omega;\lambda):=d_{\mathbf{M}_\alpha\mathcal{G}}(\Omega;\lambda)=\mathcal{L}^n(\mathcal{V}_\alpha(\mathcal{G};\lambda)\cap\Omega), \tag{2.8}$$

với $\mathcal{V}_\alpha(\mathcal{G};\lambda)$ xác định bởi:

$$\mathcal{V}_\alpha(\mathcal{G};\lambda):=\{x\in\mathbb{R}^n:\ \mathbf{M}_\alpha\mathcal{G}(x)>\lambda\}.$$

Ta dùng kí hiệu $\mathcal{V}^c_\alpha(\mathcal{G};\lambda)$ cho phần bù của $\mathcal{V}_\alpha(\mathcal{G};\lambda)$ trong $\mathbb{R}^n$, nghĩa là :

$$\mathcal{V}^c_\alpha(\mathcal{G};\lambda)=\{x\in\mathbb{R}^n:\ \mathbf{M}_\alpha\mathcal{G}(x)\leq\lambda\}.$$

Bất đẳng thức hàm phân phối trong kết quả chính được chứng minh dựa trên bổ đề sau đây, được biết đến như một dạng của bổ đề phủ Vitali.

Bổ đề 1.8.(Caffarelli & Peral, 1998) *Xét hai tập con đo được $\mathcal{P}\subset\mathcal{Q}$ của Ω. Giả sử có hai hằng số $\varepsilon\in(0;1)$ và $r\in(0;r_0]$ sao cho*

i) $\mathcal{L}^n(\mathcal{P})\leq\varepsilon\mathcal{L}^n(B_r(0))$;

ii) với mọi $\xi\in\Omega$ và $\rho\in(0;r]$, nếu $\mathcal{L}^n(\mathcal{P}\cap B_\rho(\xi))>\varepsilon\mathcal{L}^n(B_\rho(\xi))$ thì $\Omega_\rho(\xi)\subset\mathcal{Q}$.

Khi đó tồn tại hằng số dương $C=C(n)>0$ sao cho $\mathcal{L}^n(\mathcal{P})\leq C\varepsilon\mathcal{L}^n(\mathcal{Q})$.

Bổ đề 1.9. (Nguyen, & Tran, 2021a, Lemma 3.3) *Với mỗi $s\geq 1$ và $\alpha\in\left[0,\frac{n}{s}\right)$, tồn tại số $C=C(n,\alpha,s)>0$ sao cho bất đẳng thức sau đúng*

$$d_{\mathcal{G}}^{\alpha}\left(\mathbb{R}^n;\lambda\right)\le C(\lambda^{-1}\|\mathcal{G}\|_{L^s(\mathbb{R}^n)})^{\frac{ns}{n-\alpha s}}, \tag{2.9}$$

với mọi $\lambda>0$ *và* $\mathcal{G}\in L^s(\mathbb{R}^n)$.

Định nghĩa 1.10. Cho $0<q<\infty$ và $0<s\le\infty$. Không gian Lorentz $L^{q,s}(\Omega)$ là tập hợp các hàm f đo được trên Ω sao cho $\|f\|_{L^{q,s}(\Omega)}<\infty$, với $\|\bullet\|_{L^{q,s}(\Omega)}$ được định nghĩa như sau:

$$\|f\|_{L^{q,s}(\Omega)}:=\left[q\int_0^\infty\left[\lambda^q d_f(\Omega;\lambda)\right]^{\frac{s}{q}}\frac{d\lambda}{\lambda}\right]^{\frac{1}{s}},\qquad 0<s<\infty,$$

và trong trường hợp $s=\infty$ thì: $\|f\|_{L^{q,\infty}(\Omega)}:=\sup_{\lambda>0}\left[\lambda^q d_f(\Omega;\lambda)\right]^{\frac{1}{q}}$.

3. Các kết quả chính

Bổ đề 3.1. *Cho* $\alpha\in[0,n)$ *và* $\mathcal{F},\mathcal{G}\in L^1(\Omega;\mathbb{R}^+)$ *thỏa mãn điều kiện (A2) và* $\varepsilon,\lambda>0$ *sao cho:*

$$\mathcal{V}_{\alpha}^{C}\left(\mathcal{F};\varepsilon c_{\varepsilon}^{-1}\lambda\right)\cap\Omega\ne\varnothing. \tag{3.10}$$

Khi đó, tồn tại hằng số $C=C(n,\alpha)>0$ *sao cho:*

$$d_{\mathcal{G}}^{\alpha}\left(\Omega;\varepsilon^{-\frac{n-\alpha\gamma}{n\gamma}}\lambda\right)\le C\left(\varepsilon^{1+\frac{n-\alpha\gamma}{n\gamma}}c_{\varepsilon}^{-1}\right)^{\frac{n}{n-\alpha}}diam(\Omega)^n, \tag{3.11}$$

trong đó, kí hiệu $diam(\Omega):=\sup_{x,y\in\Omega}d(x,y)$ *là đường kính của miền* Ω.

Chứng minh. Nhờ vào bất đẳng thức (2.9) trong Bổ đề 1.9 và đánh giá (2.7), ta có:

$$d_{\mathcal{G}}^{\alpha}\left(\Omega;\varepsilon^{-\frac{n-\alpha\gamma}{n\gamma}}\lambda\right)\le C_{n,\alpha}\left(\left(\varepsilon^{-\frac{n-\alpha\gamma}{n\gamma}}\lambda\right)^{-1}\int_\Omega\mathcal{G}(x)dx\right)^{\frac{n}{n-\alpha}}\le C_{n,\alpha}\left(\left(\varepsilon^{-\frac{n-\alpha\gamma}{n\gamma}}\lambda\right)^{-1}\int_\Omega\mathcal{F}(x)dx\right)^{\frac{n}{n-\alpha}}.$$

Nhờ vào giả thiết (3.1) ta sẽ tìm được một phần tử $z_0\in\Omega$ sao cho $\mathbf{M}_\alpha\mathcal{F}(z_0)\le\varepsilon c_\varepsilon^{-1}\lambda$. Hơn nữa, từ định nghĩa của toán tử cực đại cấp phân số $\mathbf{M}_\alpha$, ta sẽ có

$$\int_\Omega\mathcal{F}(x)dx\le C_nD_0^n\frac{1}{\mathcal{L}^n\left(B_{D_0}(z_0)\right)}\int_{B_{D_0}(z_0)}\mathcal{F}(x)dx\le C_nD_0^{n-\alpha}\mathbf{M}_\alpha\mathcal{F}(z_0)\le C_nD_0^{n-\alpha}\varepsilon c_\varepsilon^{-1}\lambda,$$

với D_0 là đường kính của Ω. Từ hai bất đẳng thức trên ta dễ dàng suy ra

$$d_{\mathcal{G}}^{\alpha}\left(\Omega;\varepsilon^{-\frac{n-\alpha\gamma}{n\gamma}}\lambda\right)\le C_{n,\alpha}\left(\varepsilon^{1+\frac{n-\alpha\gamma}{n\gamma}}c_{\varepsilon}^{-1}\right)^{\frac{n}{n-\alpha}}D_0^n.$$

Như vậy ta đã hoàn thành chứng minh Bổ đề 3.1. □

Bổ đề 3.2. *Cho* $\alpha \in [0,n)$ *và* $\mathcal{G} \in L^1(\Omega;\mathbb{R}^+)$ *cùng với* $\lambda, \rho > 0$, $\xi \in \Omega$ *sao cho:*

$$\mathcal{V}_{\alpha}^{C}(\mathcal{G};\lambda) \cap \Omega_{\rho}(\xi) \neq \varnothing. \tag{3.12}$$

Khi đó với mọi $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0)$ *với* ε_0 *đủ nhỏ sao cho* $\varepsilon_0^{-\frac{n-\alpha\gamma}{n\gamma}} > 3^n$ *ta có:*

$$d_{\mathcal{G}}^{\alpha}\left(\Omega_{\rho}(\xi);\varepsilon^{-\frac{n-\alpha\gamma}{n\gamma}}\lambda\right) \leq d_{\chi_{B_{2\rho}(\xi)}\mathcal{G}}^{\alpha}\left(\Omega_{\rho}(\xi);\varepsilon^{-\frac{n-\alpha\gamma}{n\gamma}}\lambda\right). \tag{3.13}$$

Chứng minh. Với mọi $\zeta \in B_{\rho}(\xi)$ ta có thể biểu diễn toán tử cực đại cấp phân số $\mathbf{M}_{\alpha}\mathcal{G}$ như là giá trị lớn nhất của hai toán tử chặt cụt của hàm $\mathcal{G}$ ở mức $\rho > 0$ đã được định nghĩa ở Định nghĩa 1.2 như sau:

$$\mathbf{M}_{\alpha}\mathcal{G}(\zeta) = \max\left\{\mathbf{M}_{\alpha}^{\rho}\mathcal{G}(\zeta);\mathbf{T}_{\alpha}^{\rho}\mathcal{G}(\zeta)\right\}. \tag{3.14}$$

Hơn nữa, giả thiết (3.3) giúp ta tìm được phần tử $z_1 \in \Omega_{\rho}(\xi)$ và $\mathbf{M}_{\alpha}\mathcal{G}(z_1) \leq \lambda$. Khi đó ta dễ dàng kiểm tra được bao hàm thức sau:

$$B_r(\zeta) \subset B_{r+\rho}(\xi) \subset B_{r+2\rho}(z_1) \subset B_{3r}(z_1), \text{ với mọi } r \geq \rho.$$

Từ đó, ta có thể đánh giá $\mathbf{T}_{\alpha}^{\rho}\mathcal{G}$ bằng cách làm trội tích phân của $\mathcal{G}$ trên $B_r(\zeta)$ bởi tích phân trên của chính nó trên tập $B_{3r}(z_1)$ như sau:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}_{\alpha}^{\rho}\mathcal{G}(\zeta) &= \sup_{r\geq\rho} r^{\alpha}\frac{1}{\mathcal{L}^n(B_r(\zeta))}\int_{B_r(\zeta)}\mathcal{G}(x)\,dx \\ &\leq \sup_{r\geq\rho}\frac{\mathcal{L}^n(B_{3r}(z_1))}{\mathcal{L}^n(B_r(\zeta))} r^{\alpha}\frac{1}{\mathcal{L}^n(B_{3r}(z_1))}\int_{B_{3r}(z_1)}\mathcal{G}(x)\,dx \\ &\leq 3^{n-\alpha}\sup_{r\geq\rho}(3r)^{\alpha}\frac{1}{\mathcal{L}^n(B_{3r}(z_1))}\int_{B_{3r}(z_1)}\mathcal{G}(x)\,dx \leq 3^n\mathbf{M}_{\alpha}\mathcal{G}(z_1) \leq 3^n\lambda.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Mặt khác, với $r \in (0;\rho)$ tùy ý ta lại có $B_r(\zeta) \subset B_{r+\rho}(\xi) \subset B_{2\rho}(\xi)$ nên suy ra $\mathcal{G} \equiv \chi_{B_{2\rho}(\xi)}\mathcal{G}$ trên tập $B_r(\zeta)$ và hơn nữa

$$\sup_{0<r\leq\rho} r^{\alpha}\frac{1}{\mathcal{L}^n(B_r(\zeta))}\int_{B_r(\zeta)}\mathcal{G}(y)\,dy = \sup_{0<r\leq\rho} r^{\alpha}\frac{1}{\mathcal{L}^n(B_r(\zeta))}\int_{B_r(\zeta)}\chi_{B_{2\rho}(\xi)}\mathcal{G}(y)\,dy.$$

Nói cách khác, ta có $\mathbf{M}_{\alpha}^{\rho}\mathcal{G}(\zeta) = \mathbf{M}_{\alpha}^{\rho}(\chi_{B_{2\rho}(\xi)}\mathcal{G})(\zeta)$. Như vậy ta có thể viết lại (3.5) dưới dạng như sau:

$$\mathbf{M}_{\alpha}\mathcal{G}(\zeta) = \max\left\{\mathbf{M}_{\alpha}^{\rho}\left(\chi_{B_{2\rho}(\xi)}\mathcal{G}\right)(\zeta);\mathbf{T}_{\alpha}^{\rho}\mathcal{G}(\zeta)\right\}.$$

Kết hợp với (3.6), ta có:

$$\mathbf{M}_{\alpha}\mathcal{G}(\zeta) \le \max\left\{\mathbf{M}_{\alpha}^{\rho}\left(\chi_{B_{2\rho}(\xi)}\mathcal{G}\right)(\zeta); 3^n\lambda\right\}, \forall \zeta \in B_{\rho}(\xi). \tag{3.16}$$

Cuối cùng, từ (3.7) có thể rút ra rằng với mọi ε sao cho $\varepsilon^{-\frac{n-\alpha\gamma}{n\gamma}} > 3^n$ ta sẽ có:

$$\mathcal{V}_{\alpha}\left(\mathcal{G}; \varepsilon^{-\frac{n-\alpha\gamma}{n\gamma}}\lambda\right) \cap \Omega_{\rho}(\xi) = \left\{\zeta \in \Omega : \mathbf{M}_{\alpha}^{\rho}\left(\chi_{B_{2\rho}(\xi)}\mathcal{G}\right)(\zeta) > \varepsilon^{-\frac{n-\alpha\gamma}{n\gamma}}\lambda\right\} \cap \Omega_{\rho}(\xi). \tag{3.17}$$

Từ (3.8) có thể suy ra (3.4) và ta hoàn thành chứng minh Bổ đề 3.2.

Bổ đề 3.3. *Xét* $\gamma_0 \in (1; +\infty], \gamma \in (1, \gamma_0], \alpha \in \left[0; \frac{n}{\gamma}\right)$ *và hai hàm* $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ *thỏa mãn điều kiện (A1) với số* $\gamma_0 \in (1, +\infty]$. *Khi đó với mọi* ε *sao cho* $\varepsilon^{-\frac{n-\alpha\gamma}{n\gamma}} > 3^n$, *thỏa mãn*

$$\mathcal{V}_{\alpha}^{C}(\mathcal{G}; \lambda) \cap \Omega_{\rho}(\xi) \ne \emptyset \text{ và } \mathcal{V}_{\alpha}^{C}\left(\mathcal{F}; \varepsilon c_{\varepsilon}^{-1}\lambda\right) \cap \Omega_{\rho}(\xi) \ne \emptyset,$$

với $\xi \in \Omega$ *và* $\rho, \lambda > 0$ *thì ta sẽ có bất đẳng thức sau đây:*

$$d_{\mathcal{G}}^{\alpha}\left(\Omega_{\rho}(\xi); \varepsilon^{-\frac{n-\alpha\gamma}{n\gamma}}\lambda\right) \le C\left(\varepsilon^{-\frac{n-\alpha\gamma}{n\gamma}}\right)^{-\frac{n\gamma}{n-\alpha\gamma}}\rho^n = C\varepsilon\rho^n. \tag{3.18}$$

Ở đây, hằng số C *chỉ phụ thuộc vào* n, α, γ *và* $\tilde{c}$.

Chứng minh. Nếu $B_{2\rho}(\xi) \subset \Omega$ thì ta chọn $R = 2\rho$ và $\upsilon = \xi$. Ngược lại, nếu $B_{2\rho}(\xi) \cap \Omega^C \ne \emptyset$ thì ta chọn $R = 4\rho$ và $\upsilon \in \partial\Omega$ sao cho $|\xi - \upsilon| = dist(\xi; \partial\Omega) \le 2\rho$. Theo cách chọn R và υ như trên, ta luôn có $B_{2\rho}(\xi) \subset B_R(\upsilon)$. Nhờ vậy, ta có thể đánh giá vế trái của (3.9) bằng cách áp dụng Bổ đề 3.2 với $\varepsilon^{-\frac{n-\alpha\gamma}{n\gamma}} > 3^n$ và sử dụng tính chất của bộ ba hàm $\mathcal{G}, \varphi, \psi$ thỏa mãn $\mathcal{G} \le \tilde{c}(\varphi + \psi)$ trong Định nghĩa 1.5 với $\tilde{c} \ge 1$ như sau:

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{G}}^{\alpha}\left(\Omega_{\rho}(\xi); \varepsilon^{-\frac{n-\alpha\gamma}{n\gamma}}\lambda\right) &\le d_{\chi_{B_R(\upsilon)}\mathcal{G}}^{\alpha}\left(\Omega_{\rho}(\xi); \varepsilon^{-\frac{n-\alpha\gamma}{n\gamma}}\lambda\right) \\ &\le d_{\chi_{B_R(\upsilon)}\varphi}^{\alpha}\left(\Omega_{\rho}(\xi); \frac{\tilde{c}^{-1}}{2}\varepsilon^{-\frac{n-\alpha\gamma}{n\gamma}}\lambda\right) + d_{\chi_{B_R(\upsilon)}\psi}^{\alpha}\left(\Omega_{\rho}(\xi); \frac{\tilde{c}^{-1}}{2}\varepsilon^{-\frac{n-\alpha\gamma}{n\gamma}}\lambda\right). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Để tiếp tục đánh giá hai biểu thức ở vế phải của (3.10), ta sử dụng Bổ đề 1.9 lần lượt với $s = 1$ và $s = \gamma > 1$. Đầu tiên ta viết lại đánh giá (3.10) dưới dạng biểu thức có chứa trung bình tích phân như sau:

$$d_{\mathcal{G}}^{\alpha}\left(\Omega_{\rho}\left(\xi\right);\varepsilon^{-\frac{n-\alpha\gamma}{n\gamma}}\lambda\right)\leq C\left(\frac{\tilde{c}}{\varepsilon^{-\frac{n-\alpha\gamma}{n\gamma}}\lambda}R^{n}\frac{1}{\mathcal{L}^{n}\left(B_{R}\left(\upsilon\right)\right)}\int_{B_{R}\left(\upsilon\right)}\psi\left(x\right)dx\right)^{\frac{n}{n-\alpha}}$$
$$+C\left(\left(\frac{\tilde{c}}{\varepsilon^{-\frac{n-\alpha\gamma}{n\gamma}}\lambda}\right)^{\gamma}R^{n}\frac{1}{\mathcal{L}^{n}\left(B_{R}\left(\upsilon\right)\right)}\int_{B_{R}\left(\upsilon\right)}\left|\varphi\left(x\right)\right|^{\gamma}dx\right)^{\frac{n}{n-\alpha\gamma}}. \tag{3.20}$$

Giả thiết $\varphi\in\mathcal{RH}^{\gamma_0}(\Omega_{2R}(\upsilon))$ có thể viết lại thành bất đẳng thức sau:

$$\left(\frac{1}{\mathcal{L}^{n}\left(B_{R}\left(\upsilon\right)\right)}\int_{B_{R}\left(\upsilon\right)}\left|\varphi\left(x\right)\right|^{\gamma_0}dx\right)^{\frac{1}{\gamma_0}}\leq C\frac{1}{\mathcal{L}^{n}\left(B_{2R}\left(\upsilon\right)\right)}\int_{B_{2R}\left(\upsilon\right)}\left|\varphi\left(x\right)\right|dx. \tag{3.21}$$

Với $1<\gamma\leq\gamma_0$, áp dụng bất đẳng thức H"o"¨lder ta có đánh giá:

$$\int_{B_{R}\left(\upsilon\right)}\left|\varphi\left(x\right)\right|^{\gamma}dx\leq\left(\int_{B_{R}\left(\upsilon\right)}\left|\varphi\left(x\right)\right|^{\gamma_0}dx\right)^{\frac{\gamma}{\gamma_0}}\left(\int_{B_{R}\left(\upsilon\right)}1^{\frac{\gamma_0}{\gamma_0-\gamma}}dx\right)^{1-\frac{\gamma}{\gamma_0}}=\left(\int_{B_{R}\left(\upsilon\right)}\left|\varphi\left(x\right)\right|^{\gamma_0}dx\right)^{\frac{\gamma}{\gamma_0}}\left(\mathcal{L}^{n}\left(B_{R}\left(\upsilon\right)\right)\right)^{1-\frac{\gamma}{\gamma_0}},$$

và từ đó dẫn đến

$$\left(\frac{1}{\mathcal{L}^{n}\left(B_{R}\left(\upsilon\right)\right)}\int_{B_{R}\left(\upsilon\right)}\left|\varphi\left(x\right)\right|^{\gamma}dx\right)^{\frac{1}{\gamma}}\leq\left(\frac{1}{\mathcal{L}^{n}\left(B_{R}\left(\upsilon\right)\right)}\int_{B_{R}\left(\upsilon\right)}\left|\varphi\left(x\right)\right|^{\gamma_0}dx\right)^{\frac{1}{\gamma_0}}. \tag{3.22}$$

Từ (3.12) và (3.13) ta có

$$\left(\frac{1}{\mathcal{L}^{n}\left(B_{R}\left(\upsilon\right)\right)}\int_{B_{R}\left(\upsilon\right)}\left|\varphi\left(x\right)\right|^{\gamma}dx\right)\leq C\left(\frac{1}{\mathcal{L}^{n}\left(B_{2R}\left(\upsilon\right)\right)}\int_{B_{2R}\left(\upsilon\right)}\left|\varphi\left(x\right)\right|dx\right)^{\gamma}$$
$$\leq C\left(\tilde{c}\frac{1}{\mathcal{L}^{n}\left(B_{2R}\left(\upsilon\right)\right)}\int_{B_{2R}\left(\upsilon\right)}\mathcal{G}\left(x\right)dx+\tilde{c}\frac{1}{\mathcal{L}^{n}\left(B_{2R}\left(\upsilon\right)\right)}\int_{B_{2R}\left(\upsilon\right)}\psi\left(x\right)dx\right) \tag{3.23}$$

Mặt khác, từ giả thiết ta có thể tìm được $z_1,z_2\in\Omega_{\rho}\left(\xi\right)$ thỏa mãn $\mathbf{M}_{\alpha}\mathcal{G}\left(z_1\right)\leq\lambda$ và $\mathbf{M}_{\alpha}\mathcal{G}\left(z_2\right)\leq\varepsilon c_{\varepsilon}^{-1}\lambda$. Bên cạnh đó, ta có dãy các tập lồng nhau sau:

$$B_{2R}\left(\upsilon\right)\subset B_{3R}\left(\upsilon\right)\subset B_{3R+\rho}\left(z_1\right)\cap B_{3R+\rho}\left(z_2\right)\subset B_{4R}\left(z_1\right)\cap B_{4R}\left(z_2\right).$$

Từ đó dẫn đến đánh giá:

$$\frac{1}{\mathcal{L}^{n}\left(B_{2R}\left(\upsilon\right)\right)}\int_{B_{2R}\left(\upsilon\right)}\mathcal{G}\left(x\right)dx\leq 2^{n}\frac{1}{\mathcal{L}^{n}\left(B_{4R}\left(\upsilon\right)\right)}\int_{B_{2R}\left(\upsilon\right)}\mathcal{G}\left(x\right)dx$$
$$\leq 2^{n}\left(4R\right)^{-\alpha}\mathbf{M}_{\alpha}\mathcal{G}\left(x\right)\left(z_1\right)\leq 2^{n}R^{-\alpha}\lambda.$$

Tức là ta đã có bất đẳng thức sau:

$$\frac{1}{\mathcal{L}^n\left(B_{2R}(\upsilon)\right)}\int_{B_{2R}(\upsilon)} \mathcal{G}(x)\,dx \le 2^n R^{-\alpha}\lambda. \tag{3.24}$$

Một cách tương tự, ta có

$$\frac{1}{\mathcal{L}^n\left(B_{2R}(\upsilon)\right)}\int_{B_{2R}(\upsilon)} \mathcal{F}(x)\,dx \le 2^n \frac{1}{\mathcal{L}^n\left(B_{4R}(\upsilon)\right)}\int_{B_{2R}(\upsilon)} \mathcal{F}(x)\,dx$$

$$\le 2^n (4R)^{-\alpha}\,\mathbf{M}_\alpha \mathcal{F}(x)(z_1) \le 2^n R^{-\alpha}\kappa\lambda.$$

Nghĩa là ta đánh giá được

$$\frac{1}{\mathcal{L}^n\left(B_{2R}(\upsilon)\right)}\int_{B_{2R}(\upsilon)} \mathcal{F}(x)\,dx \le 2^n R^{-\alpha}\kappa\lambda. \tag{3.25}$$

Dựa vào đánh giá (2.6), (3.15), (3.17) ta suy ra:

$$\frac{1}{\mathcal{L}^n\left(B_{R}(\upsilon)\right)}\int_{B_{R}(\upsilon)} \psi(x)\,dx \le 2^n\left(\varepsilon + c_\varepsilon \varepsilon c_\varepsilon^{-1}\right)R^{-\alpha}\lambda = 2^{n+1}\varepsilon R^{-\alpha}\lambda, \tag{3.26}$$

với mọi $\varepsilon \in (0;1)$. Từ (3.10), (3.14), và (3.17) ta rút ra kết luận:

$$d_{\mathcal{G}}^{\alpha}\left(\Omega_\rho(\xi);\varepsilon^{-\frac{n-\alpha\gamma}{n\gamma}}\lambda\right) \le C\left(2^n\tilde{c}\sigma^{-1}\varepsilon\right)^{\frac{n}{n-\alpha}}R^n + C\left(2^n\tilde{c}^2\sigma^{-1}(1+\varepsilon)\right)^{\frac{n\gamma}{n-\alpha\gamma}}R^n.$$

Chọn ε để $\varepsilon^{-\frac{n-\alpha\gamma}{n\gamma}} > 3^n$ và $\varepsilon c_\varepsilon^{-1} \in (0;\varepsilon)$ thì ta thu được (3.9). Như vậy ta đã hoàn thành chứng minh Bổ đề 3.3. □

Định lí 3.4. *Cho* $\gamma_0 \in (1;+\infty]$, $\gamma \in (1,\gamma_0]$, $\alpha \in \left[0;\frac{n}{\gamma}\right)$ *và hai hàm* $\mathcal{F},\mathcal{G} \in L^1(\Omega;\mathbb{R}^+)$ *thỏa mãn các điều kiện (A1) với số* γ_0 *và (A2). Khi đó tồn tại* $\varepsilon_0 \in (0;1)$ *sao cho*

$$d_{\mathcal{G}}^{\alpha}\left(\Omega;\varepsilon^{-\frac{n-\alpha\gamma}{n\gamma}}\lambda\right) \le C\varepsilon d_{\mathcal{G}}^{\alpha}(\Omega;\lambda) + d_{\mathcal{F}}^{\alpha}\left(\Omega;\varepsilon c_\varepsilon^{-1}\lambda\right), \tag{3.27}$$

với mọi $\lambda > 0$ *và* $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0)$.

Chứng minh. Đầu tiên ta sẽ chứng minh bất đẳng thức sau đây:

$$\mathcal{L}^n\left(\mathcal{V}_\alpha\left(\mathcal{G};\varepsilon^{-\frac{n-\alpha\gamma}{n\gamma}}\lambda\right)\cap \mathcal{V}_\alpha^C\left(\mathcal{G};\varepsilon c_\varepsilon^{-1}\lambda\right)\cap\Omega\right) \le C\varepsilon\mathcal{L}^n\left(\mathcal{V}_\alpha(\mathcal{G};\lambda)\cap\Omega\right). \tag{3.28}$$

Để tiến hành, ta cần sử dụng Bổ đề 1.8 với hai tập con của Ω được định nghĩa như sau:

$$\mathcal{P} := \mathcal{V}_\alpha\left(\mathcal{G};\varepsilon^{-\frac{n-\alpha\gamma}{n\gamma}}\lambda\right)\cap \mathcal{V}_\alpha^C\left(\mathcal{F};\varepsilon c_\varepsilon^{-1}\lambda\right)\cap\Omega \quad \text{và} \quad \mathcal{Q} := \mathcal{V}_\alpha(\mathcal{G};\lambda)\cap\Omega.$$

Ta sẽ chứng minh hai tập này thỏa các điều kiện i) và ii) của Bổ đề 1.8. Đầu tiên ta thấy (3.19) hiển nhiên đúng nếu $\mathcal{P}$ rỗng, do đó ta chỉ xét trường hợp khi $\mathcal{P} \neq \varnothing$. Nhờ bất đẳng thức (3.2) trong Bổ đề 3.1 mà ta sẽ có i), cụ thể là:

$$\mathcal{L}^n(\mathcal{P}) \le d_{\mathcal{G}}^{\alpha}\left(\Omega; \varepsilon^{-\frac{n-\alpha\gamma}{n\gamma}}\lambda\right) \le C\left(\left(\varepsilon^{-\frac{n-\alpha\gamma}{n\gamma}}\right)^{-1} \varepsilon c_\varepsilon^{-1}\right)^{\frac{n}{n-\alpha}} \mathcal{L}^n\left(B_r(0)\right) \le \varepsilon \mathcal{L}^n\left(B_r(0)\right). \tag{3.29}$$

Tiếp theo, điều kiện ii) sẽ được chứng minh bằng phản chứng. Cụ thể, ta giả sử $\Omega_\rho(\xi) \cap \mathcal{Q}^C \neq \varnothing$, với $\xi \in \Omega$ và $\rho \in (0;r]$ và sẽ chỉ ra rằng:

$$\mathcal{L}^n\left(\mathcal{P} \cap \mathcal{B}_\rho(\xi)\right) \le \varepsilon \mathcal{L}^n\left(\mathcal{B}_\rho(\xi)\right). \tag{3.30}$$

Thực vậy, không mất tính tổng quát có thể giả sử $\mathcal{P} \cap \mathcal{B}_\rho(\xi) \neq \varnothing$. Sử dụng kết quả (3.9) trong Bổ đề 3.3, ta có đánh giá sau:

$$\mathcal{L}^n\left(\mathcal{P} \cap \mathcal{B}_\rho(\xi)\right) \le C\left[\left(\left(\varepsilon^{-\frac{n-\alpha\gamma}{n\gamma}}\right)^{-1} \varepsilon\right)^{\frac{n}{n-\alpha}} + \left(\varepsilon^{-\frac{n-\alpha\gamma}{n\gamma}}\right)^{\frac{-n\gamma}{n-\alpha\gamma}}\right]\mathcal{L}^n\left(\mathcal{B}_\rho(\xi)\right)$$

$$= C\left[\varepsilon^{1+\frac{n}{\gamma(n-\alpha)}} + \varepsilon\right]\mathcal{L}^n\left(\mathcal{B}_\rho(\xi)\right) \le \varepsilon \mathcal{L}^n\left(\mathcal{B}_\rho(\xi)\right). \tag{3.31}$$

Trong (3.20) và (3.22) ta thấy rằng $\left(\left(\varepsilon^{-\frac{n-\alpha\gamma}{n\gamma}}\right)^{-1} \varepsilon\right)^{\frac{n}{n-\alpha}} = \varepsilon^{1+\frac{n}{\gamma(n-\alpha)}}$ và $c_\varepsilon > 1$. Do đó các bất đẳng thức này đúng cho mọi $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0)$, với ε_0 đủ nhỏ để $C\varepsilon_0^{\frac{n}{\gamma(n-\alpha)}} < 1$ và $\varepsilon_0^{-\frac{n-\alpha\gamma}{n\gamma}} > 3^n$. Vậy theo Bổ đề 1.8 ta có: $\mathcal{L}^n(\mathcal{P}) \le C\varepsilon\mathcal{L}^n(\mathcal{Q})$, hay (3.19). Mặt khác, ta lại có nhận xét $\mathcal{V}_\alpha\left(\mathcal{G}; \varepsilon^{-\frac{n-\alpha\gamma}{n\gamma}}\lambda\right) \cap \Omega = \mathcal{P} \cup \left(\mathcal{V}_\alpha\left(\mathcal{F}; \varepsilon c_\varepsilon^{-1}\lambda\right) \cap \Omega\right)$, thay vào (3.19) ta được:

$$d_{\mathcal{G}}^{\alpha}\left(\Omega; \varepsilon^{-\frac{n-\alpha\gamma}{n\gamma}}\lambda\right) \le C\varepsilon d_{\mathcal{G}}^{\alpha}(\Omega;\lambda) + d_{\mathcal{F}}^{\alpha}\left(\Omega; \varepsilon c_\varepsilon^{-1}\lambda\right).$$

Vậy ta đã hoàn thành phép chứng minh Định lí 3.4. □

Định lí 3.5. *Cho $\gamma_0 \in (1,\infty]$ và hai hàm $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in L^1\left(\Omega;\mathbb{R}^+\right)$ thỏa mãn **(A1)** và **(A2)**. Khi đó nếu $\gamma_0 < \infty$ thì với mọi $\alpha \in \left[0, \frac{n}{\gamma_0}\right), 0 < q < \frac{n\gamma_0}{n-\alpha\gamma_0}$ và $0 < s \le \infty$ ta có:*

$$\mathbf{M}_\alpha \mathcal{F} \in L^{q,s}(\Omega) \Rightarrow \mathbf{M}_\alpha \mathcal{G} \in L^{q,s}(\Omega).$$

Nếu $\gamma_0 = \infty$ thì mệnh đề trên đúng với mọi $\alpha \in [0,n)$, $0 < q < \infty$ và $0 < s \le \infty$.

Chứng minh. Để chứng minh mệnh đề trên ta có thể chứng minh tồn tại một hằng số $C = C(n,\gamma_0,\alpha,q,s)$ dương sao cho:

$$\|\mathbf{M}_\alpha \mathcal{G}\|_{L^{q,s}(\Omega)} \le C \|\mathbf{M}_\alpha \mathcal{F}\|_{L^{q,s}(\Omega)}. \tag{3.32}$$

Đầu tiên ta xét trường hợp $\gamma_0 < \infty$. Nhờ vào Định lí 3.4, ta tìm được $\varepsilon_0 > 0$ đủ nhỏ sao cho với mọi $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ và $\lambda > 0$, có:

$$d_{\mathcal{G}}^{\alpha}\left(\Omega; \varepsilon^{-\frac{n-\alpha\gamma_0}{n\gamma_0}} \lambda\right) \le C\varepsilon d_{\mathcal{G}}^{\alpha}(\Omega;\lambda) + d_{\mathcal{F}}^{\alpha}\left(\Omega; \varepsilon c_\varepsilon^{-1}\lambda\right). \tag{3.33}$$

Do $\lambda > 0$ tùy ý nên ta có thể đổi biến λ thành $\delta\lambda$ và lúc này chuẩn của $\mathbf{M}_\alpha \mathcal{G}$ trong không gian Lorentz $L^{q,s}(\Omega)$ có thể viết lại dưới dạng:

$$\|\mathbf{M}_\alpha \mathcal{G}\|_{L^{q,s}(\Omega)}^s = \delta^s q \int_0^\infty \left[\lambda^q d_{\mathcal{G}}^{\alpha}(\Omega;\delta\lambda)\right]^{\frac{s}{q}} \frac{d\lambda}{\lambda}, \quad \forall \delta > 0. \tag{3.34}$$

Nhờ vào (3.24) và (3.25), ta có:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{M}_\alpha \mathcal{G}\|_{L^{q,s}(\Omega)}^s &= \left(\varepsilon^{-\frac{n-\alpha\gamma_0}{n\gamma_0}}\right)^s q \int_0^\infty \left[\lambda^q d_{\mathcal{G}}^{\alpha}\left(\Omega; \varepsilon^{-\frac{n-\alpha\gamma_0}{n\gamma_0}}\lambda\right)\right]^{\frac{s}{q}} \frac{d\lambda}{\lambda} \\ &\le C\left(\varepsilon^{-\frac{n-\alpha\gamma_0}{n\gamma_0}}\right)^s \varepsilon^{\frac{s}{q}} q \int_0^\infty \left[\lambda^q d_{\mathcal{G}}^{\alpha}(\Omega;\lambda)\right]^{\frac{s}{q}} \frac{d\lambda}{\lambda} + C\left(\varepsilon^{-\frac{n-\alpha\gamma_0}{n\gamma_0}}\right)^s q \int_0^\infty \left[\lambda^q d_{\mathcal{F}}^{\alpha}\left(\Omega; \varepsilon c_\varepsilon^{-1}\lambda\right)\right]^{\frac{s}{q}} \frac{d\lambda}{\lambda} \quad (3.35) \\ &= C\left(\varepsilon^{-\frac{n-\alpha\gamma_0}{n\gamma_0}}\right)^s \varepsilon^{\frac{s}{q}} \|\mathbf{M}_\alpha \mathcal{G}\|_{L^{q,s}(\Omega)}^s + C\left(\varepsilon^{-\frac{n-\alpha\gamma_0}{n\gamma_0}}\right)^s \left(\varepsilon c_\varepsilon^{-1}\right)^{-s} \|\mathbf{M}_\alpha \mathcal{F}\|_{L^{q,s}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Với $0 < s < \infty$ và $0 < q < \dfrac{n\gamma_0}{n-\alpha\gamma_0}$, ta có thể chọn $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ trong (3.26) sao cho

$$C\varepsilon^{s\left(\frac{1}{q} - \frac{n-\alpha\gamma_0}{n\gamma_0}\right)} \le \frac{1}{2}.$$

Từ đó, suy ra bất đẳng thức (3.23). Tiếp theo ta xét trường hợp nếu $\gamma_0 = \infty$. Sử dụng Định lí 3.4, ta cũng chứng minh được bất đẳng thức hàm phân phối sau:

$$d_{\mathcal{G}}^{\alpha}\left(\Omega; \varepsilon^{-\frac{n-\alpha\gamma}{n\gamma}} \lambda\right) \le C\varepsilon d_{\mathcal{G}}^{\alpha}(\Omega;\lambda) + d_{\mathcal{F}}^{\alpha}\left(\Omega; \varepsilon c_\varepsilon^{-1}\lambda\right), \quad \forall \gamma \in (0,\infty).$$

Khi đó, với mọi $0 < s < \infty$ và $0 < q < \infty$, ta chọn $\gamma > 1$ sao cho: $\frac{1}{\gamma} < \frac{1}{q} + \frac{\alpha}{n}$. Thực hiện các bước chứng minh như trên, ta cũng chứng minh được bất đẳng thức (2.3). Vậy ta đã được (3.23) trong trường hợp $0 < s < \infty$. Chứng minh hoàn toàn tương tự cho trường hợp $s = +\infty$. Như vậy ta đã hoàn thành chứng minh Định lí 3.5. □

4. Kết luận

Trong bài báo này, chúng tôi đã cải tiến chứng minh của bất đẳng thức hàm phân phối trên tập mức dựa trên việc thu gọn giả thiết trong điều kiện đủ được đưa ra trong các bài báo trước đây. Kết quả này có thể nâng cao khả năng ứng dụng của phương pháp, khi vận dụng vào bài toán chính quy nghiệm của các phương trình đạo hàm riêng.

❖ ***Tuyên bố về quyền lợi:*** *Các tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.*

❖ ***Lời cảm ơn:*** *Bài báo này được tài trợ bởi Bộ Giáo dục và Đào tạo, đề tài cấp Bộ, Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh, mã số B2021-SPS-01-T.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Acerbi, E., & Mingione, G. (2001), Regularity results for a class of functionals with non-standard growth, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 156, 121-140.

Caffarelli, L.-A, & Peral, I. (1998). On $W^{1,p}$ estimates for elliptic equations in divergence form, *Commun. Pure Appl. Math., 51*(1), 1-21.

Byun, S.-S, & Wang, L. (2004). Elliptic equations with BMO coefficients in Reifenberg domains, *Comm. Pure Appl. Math.*, 57, 1283-1310.

Byun, S.-S, & Wang, L. (2007). L^p-estimates for general nonlinear elliptic equations, *Indiana Univ. Math. J., 56*(6), 3193-3221.

Byun, S.-S, & Wang, L. (2008). Elliptic equations with BMO nonlinearity in Reifenberg domains, *Adv. Math., 219*(6), 1937-1971.

Byun, S.-S, & Wang, L. (2012). Nonlinear gradient estimates for elliptic equations of general type, *Calc. Var. Partial Differential Equations, 45*(3-4), 403-419.

Mingione, G. (2007). The Calderón-Zygmund theory for elliptic problems with measure data, *Ann. Scuola. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (V)*, 6, 195-261.

Mingione, G. (2010). Gradient estimates below the duality exponent, *Math. Ann.*, 346, 571-627.

Mingione, G. (2011). Gradient potential estimates, *J. Eur. Math. Soc.*, 13, 459-486.

Nguyen, T.-N., & Tran, M.-P. (2020a). Lorentz improving estimates for the *p*-Laplace equations with mixed data, *Nonlinear Anal.*, 200, 111960.

Nguyen, T.-N., & Tran, M.-P. (2020b). Weighted distribution approach to gradient estimates for quasilinear elliptic double-obstacle problems in Orlicz spaces, *preprint*, arXiv:2006.02645.

Nguyen, T.-N., & Tran, M.-P. (2021a). Level-set inequalities on fractional maximal distribution functions and applications to regularity theory, *J. Funct. Anal., 280*(1), 108797.

Nguyen, T.-N., & Tran, M.-P. (2021b). Lorentz estimates for quasi-linear elliptic double obstacle problems involving a Schrödinger term, *Math. Methods Appl. Sci.*, *44*(7), 6101-6116.

Tran, M.-P., & Nguyen, T.-N. (2019a). Generalized good-λ techniques and applications to weighted Lorentz regularity for quasilinear elliptic equations, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 357*(8), 664-670.

Tran, M.-P., & Nguyen, T.-N. (2019b). Weighted Lorentz gradient and point-wise estimates for solutions to quasilinear divergence form elliptic equations with an application, *preprint*, arXiv:1907.01434.

Tran, M.-P., & Nguyen, T.-N. (2020). New gradient estimates for solutions to quasilinear divergence form elliptic equations with general Dirichlet boundary data, *J. Differ. Equ.*, *268*(4), 1427-1462.

Tran, M.-P., & Nguyen, T.-N. (2021). Global Lorentz estimates for non-uniformly nonlinear elliptic equations via fractional maximal operators, *J. Math. Anal. Appl.*, *501*(1), 124084.

Tran, M.-P., Nguyen, T.-N., & Nguyen, G.-B. (2021). Lorentz gradient estimates for a class of elliptic *p*-Laplacian equations with a Schrödinger term, *J. Math. Anal. Appl.*, *496*(1), 124806.

A SHORT PROOF FOR LEVEL-SET INEQUALITIES ON DISTRIBUTION FUNCTIONS

Nguyen Thanh Nhan[1*], Tran Cat Su[1], Huynh Phuoc Nguyen[2]

[1]Ho Chi Minh City University of Education, Vietnam

[2]Nguyen Du High School, Ho Chi Minh City, Vietnam

[*]Corresponding author: Nguyen Thanh Nhan – Email: nhannt@hcmue.edu.vn

Received: June 01, 2021; Revised: June 14, 2021; Accepted: June 17, 2021

ABSTRACT

The regularity of solutions to quasi-linear elliptic equations is one of the most interesting topics of research for many mathematicians with different methods. A new method has been established to study this problem, via level-set inequalities on fractional maximal distribution functions. This method is very efficient and able to apply to many classes of partial differential equations. The sufficient conditions to build the level-set inequalities are key to obtain the Lorentz estimates in this method. In this article, we give a short proof for the level-set inequalities on fractional maximal distribution functions, which is based on one sufficient condition instead of two in a paper by Nguyen and Tran (2021a).

Keywords: gradient estimates; level-set inequalities on distribution functions; Lorentz spaces; *p*-Laplace equations