TẠP CHÍ KHOA HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH
Tập 19, Số 8 (2022): 1346-1361
Website: https://journal.hcmue.edu.vn
ISSN: 2734-9918

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE
Vol. 19, No. 8 (2022): 1346-1361
https://doi.org/10.54607/hcmue.js.19.8.3429(2022)

Bài báo nghiên cứu

NGHIỆM RENORMALIZED CỦA PHƯƠNG TRÌNH NONLOCAL ELLIPTIC VỚI DỮ LIỆU L^1

Huỳnh Cao Trường[1*], Nguyễn Thanh Long[2]
[1]Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam
[2]Trường Đại học Kinh tế Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam
[*]Tác giả liên hệ: Huỳnh Cao Trường – Email: huynhcaotruong1011@gmail.com
Ngày nhận bài: 04-5-2022; ngày nhận bài sửa: 25-5-2022; ngày duyệt đăng: 30-6-2022

TÓM TẮT

Chúng tôi chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm renormalized không âm cho phương trình nonlocal elliptic, là trường hợp tổng quát của phương trình fractional Laplace, với hàm dữ liệu thuộc L^1. *Kĩ thuật được sử dụng trong bài báo này là kĩ thuật xấp xỉ dãy nghiệm yếu, thông qua hai bước: Chứng minh sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình nonlocal elliptic với hàm dữ liệu* $T_n(f)$ *thay cho* f *(phương pháp chặt cụt); dùng phương pháp xấp xỉ dãy nghiệm yếu trên để thu được nghiệm renormalized.*

Từ khóa: tồn tại; phương trình nonlocal elliptic; nghiệm renormalized; duy nhất

1. Giới thiệu

Hướng nghiên cứu về sự tồn tại nghiệm với dữ liệu đầu vào có tính trơn kém (chẳng hạn các độ đo Radon hoặc lớp hàm L^1) cho các lớp phương trình elliptic và parabolic đóng vai trò quan trọng, góp phần hoàn thiện bức tranh tổng thể về lí thuyết và ứng dụng của phương trình đạo hàm riêng, thu hút sự quan tâm đông đảo của các nhà toán học quốc tế.

Mặt khác, trong những năm gần đây, số lượng công trình nghiên cứu về toán tử fractional Laplace và toán tử non-local ngày càng gia tăng, xem (Applebaum, 2004; Caffarelli, 2012; Caffarelli & Silvestre, 2007; Caffarelli & Valdinoci, 2011; Metzler & Klafter, 2004). Vì lí do này, việc nghiên cứu sự tồn tại nghiệm cho phương trình đạo hàm riêng liên kết với toán tử nonlocal với dữ liệu thuộc L^1 là quan trọng và cần thiết. Tuy nhiên, hiện có rất ít kết quả về hướng này cho toán tử fractional Laplace. Sự tồn tại nghiệm renormalized cho phương trình loại fractional Laplace có thể tham khảo (Alibaud et al., 2010; Teng et al., 2019).

Cho $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ là miền trơn bị chặn. Ở bài báo này, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại nghiệm renormalized cho phương trình dạng

Cite this article as: Huynh Cao Truong, & Nguyen Thanh Long (2022). Renormalized solution for nonlocal elliptic equation with data in L^1. *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science, 19*(8), 1346-1361.

$$\begin{cases} Lu(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

Trong đó, ta giả sử rằng

$$0 \le f \in L^1(\Omega) \tag{1.2}$$

Toán tử L được định nghĩa là

$$L\phi(x) := \text{P.V.}\int_{\Omega} (\phi(x) - \phi(y)) K(x,y) dy$$

với $\phi \in H^s(\Omega)$ và nhân $K : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ thỏa các điều kiện sau:

(A) K là hàm đo được, đối xứng, tức là $K(x,y) = K(y,x), \forall x, y \in \mathbb{R}^N$,

(B) Tồn tại $\Lambda > 1$ sao cho $\Lambda^{-1} \le |x-y|^{N+2s} K(x,y) \le \Lambda, \forall x, y \in \mathbb{R}^N$.

Ta định nghĩa $T_0^s(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} : u \text{ đo được và } T_k(u) \in H_0^s(\Omega), \forall k > 0\}$, ở đây $H^s(\Omega)$ và $H_0^s(\Omega)$ được định nghĩa ở phần sau và T_k là hàm chặt cụt được định nghĩa bởi

$$T_k(t) = \max\{-k, \min\{k, t\}\} = \begin{cases} -k, & t \le -k, \\ t, & |t| \le k, \\ k, & t \ge k. \end{cases}$$

với $k > 0, t \in \mathbb{R}$.

Định nghĩa 1.1. Ta gọi $u \in T_0^s(\Omega)$ là nghiệm renormalized của (1.1) nếu các điều kiện sau đây thỏa mãn

(i) $$\lim_{h\to\infty} \int_{\{(x,y)\in\Omega\times\Omega:(u(x),u(y))\in R_h\}} |u(x) - u(y)| K(x,y) dxdy = 0,$$

với $R_h = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|,|y|\} \ge h+1 \text{ và } (\min\{|x|,|y|\} \le h \text{ hoặc } xy < 0)\}$,

(ii) Với mỗi $\varphi \in H_0^s(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ và $S \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ với giá compact thì

$$\int_{\Omega\times\Omega} (u(x) - u(y))\left[(S(u)\varphi)(x) - (S(u)\varphi)(y)\right] K(x,y) dxdy = \int_{\Omega} fS(u)\varphi dx \tag{1.3}$$

Kết quả chính của bài báo là định lí sau đây:

Định lí 1.2. *Dưới điều kiện khả tích (1.2) thì tồn tại duy nhất nghiệm renormalized không âm của phương trình (1.1).*

Cấu trúc của bài báo: mục 1 giới thiệu lịch sử của vấn đề, ta sẽ định nghĩa và đưa ra vài tính chất cơ bản của không gian fractional Sobolev cũng như các kết quả về bài toán xấp xỉ ở mục 2. Cuối cùng, sự tồn tại nghiệm Renormalized được chứng minh trong mục 3.

Các hằng số C và c luôn được giả sử là số thực dương, không phụ thuộc vào các tham số chính và giá trị có thể thay đổi giữa các đánh giá bất đẳng thức.

2. Nghiệm renormalized cho phương trình nonlocal elliptic với dữ liệu L^1

2.1. Không gian fractional Sobolev

Để thuận tiện cho người đọc, ta nhắc lại định nghĩa và tính chất của không gian fractional Sobolev.

Cho $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ là miền trơn bị chặn, $s \in (0,1)$, không gian fractional Sobolev $H^s(\Omega)$ được định nghĩa bởi

$$H^s(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : [u]_s = \left(\int_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{N+2s}} dxdy \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}.$$

Không gian $H^s(\Omega)$ là không gian Banach phản xạ với chuẩn

$u_{H^s(\Omega)} = u_{L^2(\Omega)} + [u]_s$.

Kí hiệu $H_0^s(\Omega)$ là bao đóng của $C_c^\infty(\Omega)$ tương ứng với chuẩn $\cdot_{H^s(\Omega)}$, nó là không gian con của $H^s(\Omega)$. Ta biết rằng chuẩn $\cdot_{H^s(\Omega)}$ tương đương với chuẩn $[\cdot]_s$ ($[\cdot]_s$ còn gọi là chuẩn Gagliardo).

Bổ đề sau đây cho ta phép nhúng compact vào không gian Lebesgue.

Bổ đề 2.1. **((Zhang & Zhang, 2020), p. 5)** *Cho $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ là miền trơn bị chặn, $s \in (0,1)$, sao cho $s < \frac{N}{2}$. Với $1 < r < p^* := (2N)/(N-2s)$, tồn tại $C = C(N,s,r,\Omega)$ sao cho*

$u_{L^r(\Omega)} \le C u_{H^s(\Omega)}, \forall u \in H^s(\Omega).$

Đồng nghĩa, không gian $H^s(\Omega)$ nhúng liên tục vào $L^r(\Omega)$. Hơn nữa, phép nhúng đó là compact. Nếu có thêm giả thiết $u \in H_0^s(\Omega)$ thì

$u_{L^r(\Omega)} \le C[u]_s$.

Khi đó, $[\cdot]_s$ là chuẩn trên $H_0^s(\Omega)$ và nó tương đương với chuẩn $H_0^s(\Omega)$.

2.2. Sự tồn tại nghiệm renormalized

Đặt $T_n(f) = f_n$, ta được $0 \le f_n \le f$ và f_n hội tụ mạnh về f trong $L^1(\Omega)$. Xét bài toán xấp xỉ của phương trình (1.1)

$$\begin{cases} Lu(x) = f_n(x), & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

Bổ đề 2.2. *Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, tồn tại duy nhất nghiệm yếu $u_n \in H_0^s(\Omega)$ của (2.1) theo nghĩa là với mọi hàm thử $v \in H_0^s(\Omega)$, ta có*

$$\int_{\Omega\times\Omega}\left(u_n(x)-u_n(y)\right)\left(v(x)-v(y)\right)K(x,y)dxdy=\int_\Omega f_n vdx.$$

Hơn nữa, dãy $\{u_n\}_n$ *là dãy tăng, không âm.*

Chứng minh. Với mỗi $\phi\in H_0^s(\Omega)$, ta định nghĩa

$$F(\phi)=\int_{\Omega\times\Omega}\frac{|\phi(x)-\phi(y)|^2K(x,y)}{2}dxdy-\int_\Omega f_n\phi dx.$$

Vì $t\mapsto t^p$ là lồi ngặt nên ta có F lồi ngặt. Hơn nữa

$$|F(u)-F(v)|=\left|\frac{1}{2}\int_{\Omega\times\Omega}\left(|u(x)-u(y)|\sqrt{K(x,y)}\right)^2dxdy\right.$$

$$\left.-\int_{\Omega\times\Omega}\left(|v(x)-v(y)|\sqrt{K(x,y)}\right)^2dxdy\right|+\left|\int_\Omega f_n udx-\int_\Omega f_n vdx\right|$$

$$\le\frac{1}{2}\int_{\Omega\times\Omega}\left|u(x)-v(x)-\left(u(y)-v(y)\right)\right|^2K(x,y)dxdy+\int_\Omega f_n|u-v|dx$$

$$\le C[u-v]_s+f_{n_{L^2(\Omega)}}u-v_{L^2(\Omega)}\le\left(C+f_{n_{L^2(\Omega)}}\right)u-v_{H_0^s(\Omega)}$$

Vậy F liên tục.

Khi đó, với mỗi $u\in H_0^s(\Omega)$ với $[u]_s\ge 1$, theo giả thiết (B) và **Bổ đề 2.1** ta có đánh giá

$$F(u)\ge\frac{1}{2}\int_{\Omega\times\Omega}|u(x)-u(y)|^2K(x,y)dxdy-f_{n_{L^2(\Omega)}}\cdot u_{L^2(\Omega)}\ge C_1\left(u_{H_0^s(\Omega)}\right)^2-C_2u_{H_0^s(\Omega)},$$

dẫn đến F cưỡng bức trên $H_0^s(\Omega)$. Vậy tồn tại phần tử cực tiểu duy nhất u_n của F.

Với $v\in H_0^s(\Omega)$, ta có

$$0=\frac{d}{dt}F(u_n+tv)\Big|_{t=0}$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\Omega\times\Omega}\frac{d}{dt}\left(\left|u_n(x)-u_n(y)+t\left(v(x)-v(y)\right)\right|^2K(x,y)\right)dxdy\Big|_{t=0}$$

$$-\int_{\Omega\times\Omega}\frac{d}{dt}\left(f_n(x)\left(u_n(x)+tv(x)\right)\right)dx\Big|_{t=0}$$

$$=\int_{\Omega\times\Omega}\left(u_n(x)-u_n(y)\right)\left(v(x)-v(y)\right)K(x,y)dxdy-\int_{\Omega\times\Omega}f_n vdx.$$

Vậy u_n là nghiệm yếu của (2.1).

Vì $f\ge 0$ và $f_n=T_n(f)$ là dãy tăng, ta có $\{u_n\}_n$ là dãy tăng, không âm (nguyên lí so sánh, có thể xem trong (Leonori, et al., 2015)). ■

Gọi $u:\Omega\to\mathbb{R}$ là hàm đo được, để thuận tiện cho trình bày, ta kí hiệu

$$U_n(x,y)=u_n(x)-u_n(y),\{u>t\}=\{x\in\Omega:u(x)>t\},\{u\le t\}=\{x\in\Omega:u(x)\le t\},$$

và kí hiệu $|E|$ là độ đo Lebesgue của tập đo được E và $d\upsilon = K(x,y)dxdy$.

Bổ đề 2.3. *Tồn tại* $u \in \mathcal{T}_0^s(\Omega)$ *sao cho* $u_n \to u$ *theo độ đo và* $u_n \to u$ *hầu khắp nơi trên* Ω *khi* $n \to \infty$.

Chứng minh. Lấy $T_k(u_n)$ là hàm thử trong (3.1), với $0 \le f_n \le f \in L^1(\Omega)$, ta có

$$\int_{\Omega\times\Omega} U_n(x,y)\left[T_k(u_n)(x) - T_k(u_n)(y)\right]d\upsilon = \int_\Omega f_n T_k(u_n)dx \le k\int_\Omega f_n dx \le Ck \tag{2.2}$$

với hằng số C độc lập với k và n.

Để ý rằng $\left[T_k(u_n)(x) - T_k(u_n)(y)\right]^2 \le U_n(x,y)\left[T_k(u_n)(x) - T_k(u_n)(y)\right]$ nên từ (2.2) ta có đánh giá

$$\int_{\Omega\times\Omega}\left[T_k(u_n)(x) - T_k(u_n)(y)\right]^2 d\upsilon \le Ck. \tag{2.3}$$

Khi đó dãy $\left\{T_k(u_n)\right\}_n$ bị chặn trong $H_0^s(\Omega)$, ta suy ra $T_k(u_n) \rightharpoonup v$ hội tụ yếu trong $H_0^s(\Omega)$ khi $n \to \infty$.

Theo **Bổ đề 2.1**, $H_0^s(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ là phép nhúng compact nên $T_k(u_n)$ hội tụ mạnh về v trong $L^2(\Omega)$. Suy ra $\left\{T_k(u_n)\right\}_n$ có dãy con hội tụ hầu khắp nơi về v trên Ω.

Từ (2.3), với mỗi $k \ge 1$, ta có:

$$\int_{\Omega\times\Omega}\left|\frac{T_k(u_n)(x) - T_k(u_n)(y)}{k^{\frac{1}{2}}}\right|^2 d\upsilon \le C,$$

kết hợp với **Bổ đề 2.1**, ta có

$$k^{-\frac{1}{2}} T_k(u_n)^2_{L^2(\Omega)} \le C,$$

với hằng số C độc lập với k và n. Khi đó

$$\left|\{u_n \ge k\}\right| = \left|\{T_k(u_n) = k\}\right| = \int_{\{T_k(u_n)=k\}} dx = \int_{\{T_k(u_n)=k\}}\left|\frac{T_k(u_n)}{k}\right|^2 dx$$

$$\le \int_\Omega \left|\frac{T_k(u_n)}{k}\right|^2 dx = k^{-1}k^{-\frac{1}{2}}T_k(u_n)^2_{L^2(\Omega)} \le Ck^{-1},$$

dẫn đến

$$\lim_{k\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\left|\{u_n \ge k\}\right| = 0. \tag{2.4}$$

Với mỗi $t > 0$, ta có

$$\left|\{|u_n - u_m| > t\}\right| \le \left|\{u_n > k\}\right| + \left|\{u_m > k\}\right| + \left|\{|T_k(u_n) - T_k(u_m)| > t\}\right|. \tag{2.5}$$

Chú ý rằng

$$\left|\left\{\left|T_k\left(u_n\right)-T_k\left(u_m\right)\right|>t\right\}\right| \le \int_{\left|\left\{\left|T_k\left(u_n\right)-T_k\left(u_m\right)\right|>t\right\}\right|}\left|\frac{T_k\left(u_n\right)-T_k\left(u_m\right)}{t}\right|^2 dx \le \frac{1}{t^2} T_k\left(u_n\right)-T_k\left(u_m\right)^2_{L^2(\Omega)}.$$

Kết hợp với $\left\{T_k\left(u_n\right)\right\}_n$ là dãy Cauchy trong $L^2\left(\Omega\right)$ nên

$$\lim_{m,n\to\infty}\left|\left\{\left|T_k\left(u_n\right)-T_k\left(u_m\right)\right|>t\right\}\right| = 0. \tag{2.6}$$

Từ (2.4), (2.5), (2.6) ta được

$$\lim_{m,n\to\infty}\left|\left\{\left|u_n-u_m\right|>t\right\}\right| = 0,$$

điều này dẫn đến $u_n \to u$ theo độ đo và $u_n \to u$ h.k.n trên Ω, $n\to\infty$.

Từ $u_n \to u$ h.k.n trên Ω, suy ra $T_k\left(u_n\right)\to T_k\left(u\right)$ h.k.n trên Ω, mà $T_k\left(u_n\right)\to v$ h.k.n trên Ω nên $v = T_k\left(u\right)\in H_0^s\left(\Omega\right)$ h.k.n trên Ω hay $u\in \mathcal{T}_0^s\left(\Omega\right)$ và $T_k\left(u_n\right)\to T_k\left(u\right)$ mạnh trong $L^2\left(\Omega\right)$. Theo **Bổ đề 2.2** ta có $\left\{u_n\right\}_n$ là dãy tăng nên $u_n \le u$ h.k.n trên Ω. ■

Bổ đề 2.4. *Với mỗi* $k>0$, $T_k\left(u_n\right)$ *hội tụ mạnh về* $T_k\left(u\right)$ *trong không gian* $H_0^s\left(\Omega\right)$ *khi* $n\to\infty$

Chứng minh. Lấy $T_k\left(u_n\right)-T_k\left(u\right)$ là hàm thử trong (2.1), ta có:

$$\int_{\Omega\times\Omega} U_n\left(x,y\right)\left[\left(T_k\left(u_n\right)\left(x\right)-T_k\left(u\right)\left(x\right)\right)-\left(T_k\left(u_n\right)\left(y\right)-T_k\left(u\right)\left(y\right)\right)\right]d\upsilon$$
$$=\int_{\Omega} T_n\left(f\right)\left(T_k\left(u_n\right)-T_k\left(u\right)\right)dx. \tag{2.7}$$

Ta kí hiệu

$$I_{1,n}=\int_{\Omega\times\Omega} U_n\left(x,y\right)\left[T_k\left(u_n\right)\left(x\right)-T_k\left(u_n\right)\left(y\right)\right]d\upsilon$$

và

$$I_{2,n}=\int_{\Omega\times\Omega} U_n\left(x,y\right)\left[T_k\left(u\right)\left(x\right)-T_k\left(u\right)\left(y\right)\right]d\upsilon.$$

Từ (2.7) ta có

$$I_{1,n}=I_{2,n}+\int_{\Omega} T_n\left(f\right)\left[T_k\left(u_n\right)\left(x\right)-T_k\left(u\right)\left(x\right)\right]dx. \tag{2.8}$$

Ta kí hiệu $T_{n,k}\left(x,y\right)=T_k\left(u_n\right)\left(x\right)-T_k\left(u_n\right)\left(y\right)$. Khi đó:

$$I_{1,n}=\int_{\Omega\times\Omega}\left[U_n\left(x,y\right)-T_{n,k}\left(x,y\right)\right]T_{n,k}\left(x,y\right)d\upsilon+\int_{\Omega\times\Omega}\left[T_{n,k}\left(x,y\right)\right]^2 d\upsilon,$$

và

$$I_{2,n}=\int_{\Omega\times\Omega} U_n\left(x,y\right)\left[T_k\left(u\right)\left(x\right)-T_k\left(u\right)\left(y\right)\right]d\upsilon = J_1+J_2$$

trong đó

$$J_1=\int_{\Omega\times\Omega}\left[U_n\left(x,y\right)-T_{n,k}\left(x,y\right)\right]\left[T_k\left(u\right)\left(x\right)-T_k\left(u\right)\left(y\right)\right]d\upsilon,$$
$$J_2=\int_{\Omega\times\Omega} T_{n,k}\left(x,y\right)\left[T_k\left(u\right)\left(x\right)-T_k\left(u\right)\left(y\right)\right]d\upsilon.$$

Đánh giá J_2:

$$J_2 \le \left(\int_{\Omega\times\Omega}\left|T_{n,k}(x,y)\right|^2 d\upsilon\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\Omega\times\Omega}\left|T_k(u)(x)-T_k(u)(y)\right|^2 d\upsilon\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le \frac{1}{2}\left(\int_{\Omega\times\Omega}\left|T_{n,k}(x,y)\right|^2 d\upsilon\right)+\frac{1}{2}\left(\int_{\Omega\times\Omega}\left|T_k(u)(x)-T_k(u)(y)\right|^2 d\upsilon\right).$$

Vậy từ (2.8) ta có:

$$I_{1,n} \le \frac{1}{2}\left(\int_{\Omega\times\Omega}\left|T_{n,k}(x,y)\right|^2 d\upsilon\right)+\frac{1}{2}\left(\int_{\Omega\times\Omega}\left|T_k(u)(x)-T_k(u)(y)\right|^2 d\upsilon\right)+J_1$$

$$+\int_\Omega T_n(f)\left[T_k(u_n)-T_k(u)\right]dx.$$

Kết hợp với định nghĩa của $I_{1,n}$ ta được:

$$\int_{\Omega\times\Omega}\left[U_n(x,y)-T_{n,k}(x,y)\right]\left[T_k(u_n)(x)-T_k(u)(x)-T_k(u_n)(y)+T_k(u)(y)\right]d\upsilon$$

$$+\frac{1}{2}\int_{\Omega\times\Omega}\left|T_{n,k}(x,y)\right|^2 d\upsilon$$

$$\le \frac{1}{2}\int_{\Omega\times\Omega}\left|T_k(u)(x)-T_k(u)(y)\right|^2 d\upsilon+\int_\Omega T_n(f)\left[T_k(u_n)-T_k(u)\right]dx.$$

Bằng việc chia $\Omega\times\Omega = A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4$ trong đó

$$A_1=\left\{(x,y)\in\Omega\times\Omega : u_n(x)\le k, u_n(y)\le k\right\},$$

$$A_2=\left\{(x,y)\in\Omega\times\Omega : u_n(x)\ge k, u_n(y)\ge k\right\},$$

$$A_3=\left\{(x,y)\in\Omega\times\Omega : u_n(x)\le k, u_n(y)\ge k\right\},$$

$$A_4=\left\{(x,y)\in\Omega\times\Omega : u_n(x)\ge k, u_n(y)\le k\right\}.$$

Ta dễ dàng chứng minh được:

$$\left[U_n(x,y)-T_{n,k}(x,y)\right]\left[T_k(u_n)(x)-T_k(u)(x)-T_k(u_n)(y)+T_k(u)(y)\right]\ge 0$$

trên từng tập hợp A_1, A_2, A_3, A_4. Do đó:

$$\int_{\Omega\times\Omega}\left[U_n(x,y)-T_{n,k}(x,y)\right]\left[T_k(u_n)(x)-T_k(u)(x)-T_k(u_n)(y)+T_k(u)(y)\right]d\upsilon\ge 0.$$

Suy ra:

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega\times\Omega}\left|T_{n,k}(x,y)\right|^2 d\upsilon$$

$$\le\frac{1}{2}\int_{\Omega\times\Omega}\left|T_k(u)(x)-T_k(u)(y)\right|^2 d\nu+\int_\Omega T_n(f)\left[T_k(u_n)-T_k(u)\right]dx. \tag{2.9}$$

Do $\lim_{n\to\infty} T_k(u_n) = T_k(u)$ trong $L^2(\Omega)$ nên có một dãy con mà ta vẫn kí hiệu là $\{T_k(u_n)\}_k$ hội tụ hầu khắp nơi về $T_k(u)$. Mà $T_n(f)\left[T_k(u_n) - T_k(u)\right] \le 2kf$ nên nhờ định lí hội tụ bị chặn ta có

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega T_n(f)\left[T_k(u_n) - T_k(u)\right]dx = 0.$$

Nhớ rằng $T_{n,k}(x,y) = T_k(u_n)(x) - T_k(u_n)(y)$. Áp dụng bổ đề Fatou và (2.9), ta có:

$$\int_{\Omega\times\Omega}\left|T_k(u)(x) - T_k(u)(y)\right|^2 d\upsilon = \int_{\Omega\times\Omega}\liminf_{n\to\infty}\left|T_{n,k}(x,y)\right|^2 d\upsilon$$

$$\le \liminf_{n\to\infty}\int_{\Omega\times\Omega}\left|T_{n,k}(x,y)\right|^2 d\upsilon \le \limsup_{n\to\infty}\int_{\Omega\times\Omega}\left|T_{n,k}(x,y)\right|^2 d\upsilon$$

$$\le \limsup_{n\to\infty}\left(\int_{\Omega\times\Omega}\left|T_k(u)(x) - T_k(u)(y)\right|^2 d\upsilon + 2\int_\Omega T_n(f)\left[T_k(u_n) - T_k(u)\right]dx\right)$$

$$\le \int_{\Omega\times\Omega}\left|T_k(u)(x) - T_k(u)(y)\right|^2 d\upsilon.$$

Suy ra

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega\times\Omega}\left|T_k(u_n)(x) - T_k(u_n)(y)\right|^2 d\upsilon = \int_{\Omega\times\Omega}\left|T_k(u)(x) - T_k(u)(y)\right|^2 d\upsilon.$$

Để ý rằng:

$$\left|\left[T_k(u_n)(x) - T_k(u_n)(y)\right] - \left[T_k(u)(x) - T_k(u)(y)\right]\right|^2$$

$$\le 2\left(\left|T_k(u_n)(x) - T_k(u_n)(y)\right|^2 + \left|T_k(u)(x) - T_k(u)(y)\right|^2\right).$$

Tiếp tục áp dụng bổ đề Fatou, ta có:

$$\int_{\Omega\times\Omega}\left|T_k(u)(x) - T_k(u)(y)\right|^2 d\upsilon$$

$$= \int_{\Omega\times\Omega}\frac{1}{2}\liminf_{n\to\infty}\left[\left|T_k(u_n)(x) - T_k(u_n)(y)\right|^2 + \left|T_k(u)(x) - T_k(u)(y)\right|^2\right.$$

$$\left. - \left|\left[T_k(u_n)(x) - T_k(u_n)(y)\right] - \left[T_k(u)(x) - T_k(u)(y)\right]\right|^2\right] d\upsilon$$

$$\le \liminf_{n\to\infty}\int_{\Omega\times\Omega}\frac{1}{2}\left[\left|T_k(u_n)(x) - T_k(u_n)(y)\right|^2 + \left|T_k(u)(x) - T_k(u)(y)\right|^2\right.$$

$$\left. - \left|\left[T_k(u_n)(x) - T_k(u_n)(y)\right] - \left[T_k(u)(x) - T_k(u)(y)\right]\right|^2\right] d\upsilon$$

$$= \int_{\Omega\times\Omega}\left|T_k(u)(x) - T_k(u)(y)\right|^2 d\upsilon$$

$$- \limsup_{n\to\infty}\int_{\Omega\times\Omega}\left|\left[T_k(u_n)(x) - T_k(u_n)(y)\right] - \left[T_k(u)(x) - T_k(u)(y)\right]\right|^2 d\upsilon.$$

Suy ra $\limsup_{n\to\infty}\int_{\Omega\times\Omega}\left|\left[T_k(u_n)(x) - T_k(u_n)(y)\right] - \left[T_k(u)(x) - T_k(u)(y)\right]\right|^2 d\upsilon \le 0,$

Vậy $\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega\times\Omega}\left|\left[T_k(u_n)(x)-T_k(u_n)(y)\right]-\left[T_k(u)(x)-T_k(u)(y)\right]\right|^2 d\upsilon=0$, hay

$$\lim_{n\to\infty}\left[T_k(u_n)-T_k(u)\right]_s=0.$$

Do $[\cdot]_s$ là chuẩn trong $H_0^s(\Omega)$ nên ta có: $T_k(u_n)\to T_k(u)$ mạnh trong $H_0^s(\Omega)$. ■

3. Kết luận

Bây giờ, chúng tôi sẽ chứng minh sự tồn tại và duy nhất nghiệm renormalized không âm cho trường hợp tổng quát cho phương trình fractional Laplace.

Định lí 3.1. Hàm số u có được trong **Bổ đề 2.3** là nghiệm renormalized duy nhất của phương trình (1.1).

Chứng minh.

*(i) Chứng minh sự tồn tại của nghiệm renormalized. T*a chia phần chứng minh này thành 2 bước.

Bước 1. Ta chứng minh rằng

$$\lim_{h\to\infty}\int_{\{(x,y)\in\Omega\times\Omega:(u(x),u(y))\in R_h\}}|u(x)-u(y)|d\upsilon=0.$$

Với mỗi $h>0$, ta kí hiệu $G_h(t)=t-T_h(t)$. Dễ dàng có được $T_1(G_h(u_n))\le 1$ trên Ω và $T_1(G_h(u_n))=0$ trên $\{u_n\le h\}$. Lấy $T_1(G_h(u_n))$ là hàm thử trong (2.1), ta có

$$\int_{\Omega\times\Omega}U_n(x,y)\left[T_1(G_h(u_n))(x)-T_1(G_h(u_n))(y)\right]d\upsilon=\int_\Omega f_nT_1(G_h(u_n))dx$$

$$=\int_{\{u_n\le h\}}f_nT_1(G_h(u_n))dx+\int_{\{u_n>h\}}f_nT_1(G_h(u_n))dx$$

$$=\int_{\{u_n>h\}}f_nT_1(G_h(u_n))dx\le\int_{\{u_n>h\}}f_ndx\le\int_{\{u_n>h\}}fdx.$$

Nếu $(u_n(x),u_n(y))\in R_h$ thì

$$|u_n(x)-u_n(y)|\le U_n(x,y)\left[T_1(G_h(u_n))(x)-T_1(G_h(u_n))(y)\right].$$

Khi đó

$$\int_{\{(u_n(x),u_n(y))\in R_h\}}|u_n(x)-u_n(y)|d\upsilon\le\int_{\{u_n>h\}}fdx. \tag{3.1}$$

Theo bổ đề Fatou, ta có

$$\int_{\Omega\times\Omega}|u(x)-u(y)|\chi_{\{(u(x),u(y))\in R_h\}}d\upsilon=\int_{\Omega\times\Omega}\liminf_{n\to\infty}|u_n(x)-u_n(y)|\chi_{\{(u_n(x),u_n(y))\in R_h\}}d\upsilon$$

$$\le\liminf_{n\to\infty}\int_{\Omega\times\Omega}|u_n(x)-u_n(y)|\chi_{\{(u_n(x),u_n(y))\in R_h\}}d\upsilon\le\liminf_{n\to\infty}\int_{\{u_n>h\}}fdx.$$

Với $0\le f\in L^1(\Omega)$ và (2.4) ta thu được

$$\lim_{h\to\infty}\int_{\Omega\times\Omega}|u(x)-u(y)|\chi_{\{(u(x),u(y))\in R_h\}}d\upsilon\le\lim_{h\to\infty}\lim_{n\to\infty}\int_{\{u_n>h\}}fdx=0.$$

Bước 2. Với mỗi $\varphi \in H_0^s(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ và $S \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ với giá compact, ta chứng minh u thỏa (1.4). Lấy $S(u_n)\varphi$ như là hàm thử trong (2.1), ta có:

$$\int_{\Omega\times\Omega} U_n(x,y)\left[\left(S(u_n)\varphi\right)(x) - \left(S(u_n)\varphi\right)(y)\right]d\upsilon = \int_\Omega f_n S(u_n)\varphi dx. \qquad (3.2)$$

Chú ý rằng

$$\int_{\Omega\times\Omega} U_n(x,y)\left[\left(S(u_n)\varphi\right)(x) - \left(S(u_n)\varphi\right)(y)\right]d\upsilon$$

$$= \int_{\Omega\times\Omega} U_n(x,y)\left[S(u_n)(x) - S(u_n)(y)\right]\cdot \frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}d\upsilon$$

$$+ \int_{\Omega\times\Omega} U_n(x,y)\left[\varphi(x) - \varphi(y)\right]\cdot \frac{S(u_n)(x)+S(u_n)(y)}{2}d\upsilon := I_1 + I_2.$$

Vì S có giá compact nên supp S bị chặn, giả sử rằng $\operatorname{supp} S \subset [-M, M]$. Ta định nghĩa các tập con của $\Omega\times\Omega$ như sau:

$$B_{1,n} = \{(x,y) \in \Omega\times\Omega : u_n(x) \ge M, u_n(y) \ge M\},$$

$$B_{2,n} = \{(x,y) \in \Omega\times\Omega : u_n(x) \le M, u_n(y) \le M\},$$

$$B_{3,n} = \{(x,y) \in \Omega\times\Omega : M \le u_n(x) \le M+1, u_n(y) \le M\},$$

$$B_{4,n} = \{(x,y) \in \Omega\times\Omega : u_n(x) \ge M+1, u_n(y) \le M\},$$

$$B_{5,n} = \{(x,y) \in \Omega\times\Omega : u_n(x) \le M, M \le u_n(y) \le M+1\},$$

$$B_{6,n} = \{(x,y) \in \Omega\times\Omega : u_n(x) \le M, u_n(y) \ge M+1\}.$$

Đầu tiên, ta sẽ đánh giá I_1. Kí hiệu

$$G_n(x,y) = U_n(x,y)\left[S(u_n)(x) - S(u_n)(y)\right]\cdot \frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}.K(x,y),$$

$$G(x,y) = U(x,y)\left[S(u)(x) - S(u)(y)\right]\cdot \frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}.K(x,y)$$

(ở đây $U(x,y) = u(x) - u(y)$).

(1) Trên $B_{1,n}$, $S(u_n)(x) = S(u_n)(y) = 0$. Khi đó $G_n(x,y) = 0$.

(2) Trên $B_{2,n}$, $T_M(u_n)(x) = u_n(x)$ và $T_M(u_n)(y) = u_n(y)$. Khi đó

$$U_n(x,y)\left[S(u_n)(x) - S(u_n)(y)\right]$$

$$= \left[T_M(u_n)(x) - T_M(u_n)(y)\right]\cdot\left[S(T_M(u_n))(x) - S(T_M(u_n))(y)\right].$$

Chú ý rằng theo định lí giá trị trung bình, ta có

$$S(T_M(u_n))(x) - S(T_M(u_n))(y) = S'(\Psi)\left[T_M(u_n)(x) - T_M(u_n)(y)\right]$$

với Ψ nằm giữa $T_M(u_n)(x)$ và $T_M(u_n)(y)$. Từ đây ta chứng minh được:

$$\left\{\left[S\left(T_M\left(u_n\right)\right)(x)-S\left(T_M\left(u_n\right)\right)(y)\right]\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}.\sqrt{K(x,y)}\,\chi_{B_{2,n}}\right\}_n$$

bị chặn trong $L^2(\Omega\times\Omega)$. Thật vậy,

$$A=\int_{\Omega\times\Omega}\left|\left[S\left(T_M\left(u_n\right)\right)(x)-S\left(T_M\left(u_n\right)\right)(y)\right]\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}\sqrt{K(x,y)}\,\chi_{B_{2,n}}\right|^2 dxdy$$

$$=\int_{B_{2,n}}\left[S\left(T_M\left(u_n\right)\right)(x)-S\left(T_M\left(u_n\right)\right)(y)\right]^2\left[\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}\right]^2 K(x,y)dxdy.$$

Vì $\varphi\in L^\infty(\Omega)$ nên $\left[\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}\right]^2$ bị chặn. Vậy

$$A\le C\int_{B_{2,n}}\left[S\left(T_M\left(u_n\right)\right)(x)-S\left(T_M\left(u_n\right)\right)(y)\right]^2 d\upsilon$$

$$\le C\int_{B_{2,n}}\left[S'(\Psi)\left[T_M\left(u_n\right)(x)-T_M\left(u_n\right)(y)\right]\right]^2 d\upsilon.$$

Do $S\in W^{1,\infty}$ nên ta có

$$A\le C\int_{B_{2,n}}\left[T_M\left(u_n\right)(x)-T_M\left(u_n\right)(y)\right]^2 d\upsilon\le CT_M\left(u_n\right)_{H_0^s(\Omega)}.$$

Vì $T_M\left(u_n\right)\to T_M(u)$ trong $H_0^s(\Omega)$ dãy $\left\{T_M\left(u_n\right)_{H_0^s(\Omega)}\right\}_n$ bị chặn.

Vậy $\int_{\Omega\times\Omega}\left|\left[S\left(T_M\left(u_n\right)\right)(x)-S\left(T_M\left(u_n\right)\right)(y)\right]\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}\sqrt{K(x,y)}\,\chi_{B_{2,n}}\right|^2 dxdy\le C.$

Mặt khác, từ **Bổ đề 2.4** ta có

$$\lim_{n\to\infty}\left[T_M\left(u_n\right)(x)-T_M\left(u_n\right)(y)\right].\sqrt{K(x,y)}=\left[T_M(u)(x)-T_M(u)(y)\right]\sqrt{K(x,y)}$$

trong $L^2(\Omega\times\Omega)$

Như vậy, ta có:

$$\int_{B_{2,n}}G_n(x,y)dxdy=\int_{B_{2,n}}U_n(x,y)\left[S\left(u_n\right)(x)-S\left(u_n\right)(y)\right]\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}K(x,y)dxdy$$

$$=\int_{\Omega\times\Omega}\left[T_M\left(u_n\right)(x)-T_M\left(u_n\right)(y)\right].\left[S\left(u_n\right)(x)-S\left(u_n\right)(y)\right]\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}.\chi_{B_{2,n}}\ K(x,y)dxdy$$

$$\to\int_{\Omega\times\Omega}\left[T_M(u)(x)-T_M(u)(y)\right]\left[S(u)(x)-S(u)(y)\right]\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}\ \chi_{\{u(x)\le M,u(y)\le M\}}d\upsilon.$$

(3) Trên $B_{3,n} = \{(x,y) \in \Omega \times \Omega : M \le u(x) \le M+1, u_n(y) \le M\}$. Tương tự như **(2)** ta chứng minh được $\lim_{n\to\infty} \int_{B_{3,n}} G_n(x,y)\,dxdy = \int_{\{M \le u(x) \le M+1, u_n(y) \le M\}} G(x,y)\,dxdy.$

(4) Trên $B_{4,n}$ ta có

$$\max\{u_n(x), u_n(y)\} = u_n(x) \ge M+1 \text{ và } \min\{u_n(x), u_n(y)\} = u_n(y) \le M$$

nên $(u_n(x), u_n(y)) \in R_M$. Theo **(3.1)** ta có $\lim_{M\to\infty}\lim_{n\to\infty} \int_{B_{4,n}} |u_n(x) - u_n(y)|\,d\upsilon = 0$.

Do đó ta có $\lim_{M\to\infty}\lim_{n\to\infty} \int_{B_{4,n}} G_n(x,y)\,dxdy = 0.$

Dễ thấy rằng

$$\int_{B_{3,n}} G_n(x,y)\,dxdy = \int_{B_{5,n}} G_n(x,y)\,dxdy \text{ và} \int_{B_{4,n}} G_n(x,y)\,dxdy = \int_{B_{6,n}} G_n(x,y)\,dxdy,$$

nên ta có:

$$I_1 = \int_{\Omega\times\Omega} G_n(x,y)\,dxdy = \left(\int_{B_{1,n}} + \int_{B_{2,n}} + 2\int_{B_{3,n}} + 2\int_{B_{4,n}} \right) G_n(x,y)\,dxdy.$$

Từ **(1)**, **(2)**, **(3)** và **(4)**, ta có

$$\lim_{n\to\infty} I_1 = \lim_{M\to\infty}\lim_{n\to\infty} I_1 = \lim_{M\to\infty} \int_{\{u(x)\le M, u(y)\le M\}} G(x,y)\,dxdy + 2\lim_{M\to\infty} \int_{\{M\le u(x)\le M+1, u(y)\le M\}} G(x,y)\,dxdy$$

$$= \int_{\Omega\times\Omega} G(x,y)\,dxdy = \int_{\Omega\times\Omega} U(x,y)\big[S(u)(x) - S(u)(y)\big] \cdot \frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}.K(x,y)\,dxdy.$$

Hoàn toàn tương tự, ta cũng chứng minh được

$$\lim_{n\to\infty} I_2 = \int_{\Omega\times\Omega} U(x,y)(\varphi(x) - \varphi(y)).\frac{S(u)(x)+S(u)(y)}{2}\,d\upsilon.$$

Từ (2.11) ta có $I_1 + I_2 = \int_\Omega T_n(f) S(u_n) \varphi dx.$ Do đó

$$\lim_{n\to\infty}(I_1 + I_2) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega T_n(f) S(u_n)\varphi dx$$

Mà $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega T_n(f) S(u_n)\varphi dx = \int_\Omega f S(u) \varphi dx.$ Vậy

$$\int_{\Omega\times\Omega} (u(x) - u(y))\big[(S(u)\varphi)(x) - (S(u)\varphi)(y)\big]\,d\nu = \int_\Omega f S(u)\varphi dx.$$

Ta hoàn tất Bước 2, nghĩa là đã chứng minh được u là nghiệm renormalized cho phương trình (1.1).

(ii) Chứng minh sự duy nhất của nghiệm renormalized

Đầu tiên, ta xác định một hàm thử thích hợp S_σ, $\sigma > 0$ như sau

$$S_\sigma(r)=\begin{cases} r, & |r|<\sigma,\\ \left(\sigma+\frac{1}{2}\right)\mp\frac{1}{2}\left[r\mp(\sigma+1)^2\right], & \sigma\le\pm r\le\sigma+1,\\ \pm\left(\sigma+\frac{1}{2}\right), & \pm r>\sigma+1\end{cases}\tag{3.3}$$

Bởi **(**Abdellaoui, et al., 2019) ta có

$$S'_\sigma(r)=\begin{cases}1, & |r|<\sigma,\\ \sigma+1-|r|, & \sigma\le|r|\le\sigma+1,\\ 0, & |r|>\sigma+1\end{cases}$$

Hơn nữa $S'_\sigma\in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$, supp $S'_\sigma\subset[-\sigma-1,\sigma+1]$ và $T_k\left(S_\sigma(u)-S_\sigma(v)\right)\in H_0^s(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$. Gọi u, v là hai nghiệm renormalized của phương trình (1.1). Trong điều kiện (1.4), ta lấy $S=S'_\sigma$ ta có

$$\int_{\Omega\times\Omega}U(x,y)\left[\varphi(x)-\varphi(y)\right]\cdot\frac{S'_\sigma(u)(x)+S'_\sigma(u)(y)}{2}d\upsilon$$
$$+\int_{\Omega\times\Omega}U(x,y)\left[S'_\sigma(u)(x)-S'_\sigma(u)(y)\right]\cdot\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}d\upsilon=\int_\Omega fS'_\sigma(u)\varphi dx$$

và

$$\int_{\Omega\times\Omega}V(x,y)\left[\varphi(x)-\varphi(y)\right]\cdot\frac{S'_\sigma(v)(x)+S'_\sigma(v)(y)}{2}d\upsilon$$
$$+\int_{\Omega\times\Omega}V(x,y)\left[S'_\sigma(v)(x)-S'_\sigma(v)(y)\right]\cdot\frac{\varphi(x)+\varphi(y)}{2}d\upsilon=\int_\Omega f\,S'_\sigma(v)\varphi dx,$$

ở đây, $V(x,y)=v(x)-v(y)$. Với mọi $k>0$ cố định,vì $T_k\left(S_\sigma(u)-S_\sigma(v)\right)\in H_0^s(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ nên ta lấy $\varphi=T_k\left(S_\sigma(u)-S_\sigma(v)\right)$ là hàm thử trong cả hai đẳng thức trên. Đặt

$$J_1=\int_{\Omega\times\Omega}\left[\frac{S'_\sigma(u)(x)+S'_\sigma(u)(y)}{2}U(x,y)-\frac{S'_\sigma(v)(x)+S'_\sigma(v)(y)}{2}V(x,y)\right]$$
$$\cdot\left[T_k\left(S_\sigma(u)-S_\sigma(v)\right)(x)-T_k\left(S_\sigma(u)-S_\sigma(v)\right)(y)\right]d\upsilon,$$

$$J_2=\int_{\Omega\times\Omega}\left[U(x,y)\left(S'_\sigma(u)(x)-S'_\sigma(u)(y)\right)-V(x,y)\left(S'_\sigma(v)(x)-S'_\sigma(v)(y)\right)\right].$$
$$.\frac{T_k\left(S_\sigma(u)-S_\sigma(v)\right)(x)+T_k\left(S_\sigma(u)-S_\sigma(v)\right)(y)}{2}d\upsilon,$$

$$J_3=\int_\Omega f\left(S'_\sigma(u)-S'_\sigma(v)\right)T_k\left(S_\sigma(u)-S_\sigma(v)\right)dx.$$

Khi đó

$$J_1 + J_2 = J_3. \quad (3.4)$$

Ta đánh giá J_1, J_2 và J_3. Ta viết

$$J_1 = \int_{\Omega\times\Omega}\left[U(x,y) - V(x,y)\right]\cdot\left[T_k\left(S_\sigma(u) - S_\sigma(v)\right)(x) - T_k\left(S_\sigma(u) - S_\sigma(v)\right)(y)\right]d\upsilon$$

$$+\int_{\Omega\times\Omega}\left(\frac{S_\sigma^{'}(u)(x) + S_\sigma^{'}(u)(y)}{2} - 1\right)U(x,y)$$

$$\cdot\left[T_k\left(S_\sigma(u) - S_\sigma(v)\right)(x) - T_k\left(S_\sigma(u) - S_\sigma(v)\right)(y)\right]d\upsilon$$

$$+\int_{\Omega\times\Omega}\left(1 - \frac{S_\sigma^{'}(u)(x) + S_\sigma^{'}(u)(y)}{2}\right)V(x,y)$$

$$\cdot\left[T_k\left(S_\sigma(u) - S_\sigma(v)\right)(x) - T_k\left(S_\sigma(u) - S_\sigma(v)\right)(y)\right]d\upsilon$$

$$= J_{1,1} + J_{1,2} + J_{1,3}.$$

Xét $\sigma \geq k$, ta có:

$$J_{1,1} \geq \int_{\left\{|u|\leq\frac{k}{2},|v|\leq\frac{k}{2}\right\}}\left(U(x,y) - V(x,y)\right)\cdot\left[\left(u(x) - v(x)\right) - \left(u(y) - v(y)\right)\right]d\upsilon. \quad (3.5)$$

Vì $S_\sigma^{'}(r) = 1$ khi σ đủ lớn nên theo định lí hội tụ bị chặn Lebesgue, ta có được $J_{1,2}$, $J_{1,3} \to 0$ khi $\sigma \to +\infty$. Hơn nữa

$$|J_2| \leq C\left(\int_{\{(u(x),u(y))\in R_\sigma\}}|u(x) - u(y)|d\upsilon + \int_{\{(v(x),v(y))\in R_\sigma\}}|v(x) - v(y)|d\upsilon\right).$$

Từ **Định nghĩa 1.1** ta có

$$\lim_{\sigma\to+\infty}\left(|J_{1,2}| + |J_{1,3}| + |J_2|\right) = 0.$$

Chú ý rằng $f\left(S_\sigma^{'}(u) - S_\sigma^{'}(v)\right) \to 0$ mạnh trong $L^1(\Omega)$, khi $\sigma \to +\infty$, suy ra

$$\lim_{\sigma\to+\infty}|J_3| = 0.$$

Do đó, trong (3.4) cho $\sigma \to +\infty$, kết hợp với đánh giá (3.5), ta có

$$\int_{\left\{|u|\leq\frac{k}{2},|v|,\leq\frac{k}{2}\right\}}\left(U(x,y) - V(x,y)\right)\cdot\left[\left(u(x) - v(x)\right) - \left(u(y) - v(y)\right)\right]d\upsilon = 0,$$

suy ra $u = v$ h.k.n trên tập $\left\{|u| \leq \frac{k}{2}, |v| \leq \frac{k}{2}\right\}$. Vì k là tùy ý nên $u = v$ h.k.n trên Ω. Chứng minh hoàn tất.

■

❖ ***Tuyên bố về quyền lợi:*** *Các tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Abdellaoui, B., Attar, A., & Bentifour, R. (2019). On the fractional *p*-Laplacian equations with weight and general datum. *Adv. Nonlinear Anal.* 8, 144-174.

Adams, R. A. (1975*). Sobolev Spaces*. Academic Press, New York.

Alibaud, N., Andreianov, B., & Bendahmane, M. (2010). Renormalized solutions of the fractional Laplace equation. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I,* 348, 759-762.

Applebaum, D. (2004). Lévy processes–from probability to finance quantum groups. *Notices Amer. Math. Soc.*, *51*(11), 1336-1347.

Bahrouni, A., & Radulescu, V. (2018). On a new fractional Sobolev space and applications to nonlocal variational problems with variable exponent. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S*, *11*(3), 379-389.

Bendahmane, M., Wittbold, P., & Zimmermann, A. (2010). Renormalized solutions for a nonlinear parabolic equation with variable exponents and L^1 data. *J. Differential Equations*, *249*(6), 1483-1515.

Blanchard, D., Murat, F., & Redwane, H. (2001). Existence and uniqueness of a renormalized solution for a fairly general class of nonlinear parabolic problems. *J. Differential Equations, 177*(2), 331-374.

Bogdan, K., Burdzy, K., & Chen, Z. (2003). Censored stable processes. *Probab. Theory Related Fields*, *127*, 89-152.

Teng, K., Zhang, C., & Zhou, S. (2019). Renormalized and entropy solutions for the fractional p-Laplacian evolution equations. *J. Evol. Equ*, *19*, 559-584.

Caffarelli, L. (2012). Nonlocal equations, drifts and games. *Nonlinear Partial Differ. Equ. Abel Symp., 7*, 37-52.

Caffarelli, L., & Silvestre, L. (2007). An extension problem related to the fractional Laplacian. *Comm. Partial Differential Equations, 32*, 1245-1260.

Caffarelli, L., & Valdinoci, E. (2011). Uniform estimates and limiting arguments for nonlocal minimal surfaces. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, *41*, 203-240.

Chen, Z. Q., & Kumagai, T. (2003). Heat kernel estimates for stable-like process on d-sets, Stochastic Process. *Stochastic Processes and their Applications*, *108*(1), 27-62.

Del Pezzo, L. M., & Rossi, J. D. (2017). Traces for fractional Sobolev spaces with variable exponents. *Adv. Oper. Theory*, *2*(4), 435-446.

Del Pezzo, L. M., & Salort, A. M. (2015). The first non-zero Neumann *p*-fractional eigenvalue. *Nonlinear Anal*, *118*, 130-143.

Diening, L. , Harjulehto, P., Hasto, P., & Ruzicka, M. (2011). *Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents*. in: Lecture Notes in Mathematics, *2017*, Springer-Verlag, Heidelberg.

DiPerna, R. J., & Lions, P. L. (1989). On the Cauchy problem for Boltzmann equations: Global existence and weak stability. *Ann. of Math*, *130*, 321-366.

Fan, X., & Zhao, D. (2001). On the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{m,p(x)}(\Omega)$. *J. Math. Anal. Appl*, *263*, 424-446.

Guan, Q. (2006). Integration by parts formula for regional fractional Laplacian. *Comm. Math. Phys*, *266*, 289-329.

Guan, Q., & Ma, Z. (2006). Reflected symmetric α-stable processes and regional fractional Laplacian. *Probab. Theory Related Fields*, *134*, 649-694.

Ho, K., & Kim, Y. H. (2019). A-priori bounds and multiplicity of solutions for nonlinear elliptic problems involving the fractional p(·)-Laplacian, *188*, 179-201.

Ho, K., & Sim, I. (2017). A-priori bounds and existence for solutions of weighted elliptic equations with a convection term. *Adv. Nonlinear Anal*, *6*, 427-445.

Kaufmann, U., Rossi, J. D., & Vidal, R. (2017). Fractional Sobolev spaces with variable exponents and fractional p(x)-Laplacians. *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ*, *76*, 1-10.

Leonori, T., Peral, I., Primo, A., & Soria, F. (2015). Basic estimates for solutions of a class of nonlocal elliptic and parabolic equations. *Discrete Contin. Dyn. Syst*, *35*(12), 6031-6068.

Metzler, R., & Klafter, J. (2004). The restaurant at the random walk: recent developments in the description of anomalous transport by fractional dynamics. *J. Phys. A*, *37*, 161-208.

Zhang, C., & Zhang, X. (2020). Renormalized solutions fo the fractional $p(x)$ −Laplacian equation with L^1 data. *Nonlinear Analysis*, *190*, 111610.

Zhang, C., & Zhou, S. (2010). Entropy and renormalized solutions for the *p*(*x*)-Laplacian equation with measure data. *Bull. Aust. Math. Soc*, *82*(3), 459-479.

RENORMALIZED SOLUTION FOR NONLOCAL ELLIPTIC EQUATION WITH DATA IN L^1

Huynh Cao Truong[1*], Nguyen Thanh Long[2]

[1]*University of Science, Ho Chi Minh City, Vietnam National University Ho Chi Minh City, Vietnam*

[2]*University of Economics Ho Chi Minh City, Vietnam*

[*]*Corresponding author: Huynh Cao Truong – Email: huynhcaotruong1011@gmail.com*

Received: May 04, 2022; Revised: May 25, 2022; Accepted: June 30, 2022

ABSTRACT

Our purpose is to investigate the existence and the uniqueness of the non-negative renormalized solution for the nonlocal elliptic equation – which is the generalized case of the fractional Laplace equation, with the data in L^1. *The technique we apply in this paper is approximation methods, including two steps: proving the existence of a weak solution for the nonlocal elliptic equation with the truncated data* $T_n(f)$, *instead of* f *(the truncated method); approximating the weak solution to get the renormalized solution. Moreover, we also use the Young measure technique, the integral by part formula, and the method related to the nonlocal operator and Sobolev's spaces with non-integer order.*

Keywords: existence; nonlocal elliptic equation; renormalized solutions; uniqueness