TẠP CHÍ KHOA HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH
Tập 20, Số 2 (2023): 192-204
Website: https://journal.hcmue.edu.vn

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE
Vol. 20, No. 2 (2023): 192-204
https://doi.org/10.54607/hcmue.js.20.2.3600(2023)

ISSN: 2734-9918

Bài báo nghiên cứu

ĐIỀU KIỆN CẦN CHO TÍNH VIABLE CỦA PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN NGẪU NHIÊN IMPULSIVE SINH BỞI CHUYỂN ĐỘNG BROWN PHÂN THỨ

Huỳnh Cao Trường[1*], Nguyễn Bình Thành[2], Nguyễn Thanh Long[1], Nguyễn Quốc Cường[3]

[1]Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam
[2]Viện Toán Ứng dụng, Trường Đại học Kinh tế Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam
[3]Trường THCS-THPT Hồng Hà, Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam
[*]Corresponding author: Huynh Cao Truong – Email: huynhcaotruong1011@gmail.com
Ngày nhận bài: 01-10-2022; ngày nhận bài sửa: 15-11-2022; ngày duyệt đăng: 21-02-2023

ABSTRACT

Lí thuyết Viability là một lí thuyết toán học liên quan đến các mô hình phát sinh trong sinh học, kinh tế học, khoa học nhận thức, lí thuyết trò chơi và các lĩnh vực tương tự, cũng như trong các hệ phi tuyến của lí thuyết điều khiển. Lí thuyết này đã được nghiên cứu bởi nhiều tác giả bằng những phương pháp và kĩ thuật khác nhau và vẫn là một trong những hướng nghiên cứu tích cực của phương trình vi phân. Tính chất viable có chứa yếu tố ngẫu nhiên đã được khám phá đầu tiên bởi Aubin và Da Prato (Aubin & Da Prato, 1990). Trong bài báo này, chúng tôi đưa ra một điều kiện cần cho tính viable của một phương trình vi phân hàm ngẫu nhiên impulsive liên kết với chuyển động Brown phân thứ với tham số Hurst $\frac{1}{2} < H < 1$

Từ khóa: chuyển động Brown phân thứ; phương trình vi phân ngẫu nhiên; tính viable

1. Giới thiệu

Bài báo này nghiên cứu kết quả viability cho một phương trình vi phân ngẫu nhiên impulsive liên kết với chuyển động Brown phân thứ. Chính xác hơn, mục đích của chúng tôi là khảo sát phương trình vi phân có dạng

$$\begin{cases} du(t) = f(t,u(t))dt + g(t)dB^H(t), & t \in [0,T] \setminus \{t_1, t_2, ..., t_m\}, \\ u(t_k^+) - u(t_k^-) = I_k\left[u(t_k^-)\right], & k \in \{1, 2, , ..., m\}, \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{1.1}$$

trong đó

- $m \in \mathbb{N}$ và $0 < t_1 < t_2 < ... < t_m < T$,

Cite this article as: Huynh Cao Truong, Nguyen Binh Thanh, Nguyen Thanh Long, & Nguyen Quoc Cuong (2023). A necessary condition of Viability for impulsive stochastic differential equations driven by Fractional Brownian motion. *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science*, *20*(2), 192-204.

- I_k là một hàm impulse cho biết bước nhảy của nghiệm tại thời điểm t_k với $k \in \{1, 2, , ..., m\}$,
- $B^H = \{B^H(t) : t \geq 0\}$ là một chuyển động Brown phân thứ giá trị thực với tham số Hurst $H > \frac{1}{2}$ trên không gian xác suất (Ω, F, P) tương thích với lọc $\{F_t : t \geq 0\}$,
- $u_0 : \Omega \to \mathbb{R}^n$ với $n \in \mathbb{N}$,
- f là toán tử và g là một quá trình ngẫu nhiên.

Một tập con $K \subset \mathbb{R}^n$ với $u_0 \in K$ được gọi là viable với bài toán (1.1) nếu tồn tại một nghiệm mild u của (1.1) sao cho $u(t) \in K$ với mọi $t \in [0, T]$. Định lí 2.6, là kết quả chính của chúng tôi, cung cấp điều kiện cần cho tính viable.

Kết quả đầu tiên về hướng này được xây dựng bởi Aubin và Da Prato trong (Aubin & Da Prato, 1990) (xem thêm (Ahmed, 2011; Gautier & Thibault, 1993). Trong đó, các tác giả đã rút ra một đặc trưng về tính viability của bài toán (1.1) trong trường hợp chuyển động Brownian, tức là $H = \frac{1}{2}$, và $f(t, u(t)) = F(u(t))$. Sau đó (Buckdahn et al., 2002) đã xây dựng điều kiện cần và đủ cho tính viablity của phương trình vi phân ngẫu nhiên dạng forward-backward. Đây có thể xem là các trường hợp đặc biệt của bài toán (1.1) khi $H = \frac{1}{2}$. Mở rộng cho trường hợp $\frac{1}{2} < H < 1$ có thể tìm thấy trong (Ciotir & Rascanu, 2009; Xu & Luo, 2019; Xu, 2019).

Chúng tôi lưu ý rằng yếu tố impulsive không xuất hiện trong bất cứ nghiên cứu nào trước đây. Cấu trúc của bài báo như sau: Trong mục 2, chúng tôi giới thiệu một số kiến thức chuẩn bị và kết quả chính của bài báo. Trong mục 3, chúng tôi đưa ra một số hệ quả trực tiếp từ các giả thiết trong kết quả chính. Những kết quả này mở đường cho chứng minh của kết quả chính.

2. Kiến thức chuẩn bị và các kết quả chính

Trong phần này, chúng ta sẽ xem xét kĩ hơn các kiến thức cơ bản để chứng minh định lí chính – Định lí 2.6. Đặc biệt, chúng tôi sẽ giới thiệu các kí hiệu và không gian hàm thích hợp trong Tiểu mục 2.1. Sau đó, chúng tôi trình bày một tích phân pathwise đối với chuyển động Brown phân thứ trong Tiểu mục 2.2. Cuối cùng, chúng tôi giới thiệu kết quả chính trong Tiểu mục 2.3.

2.1. Không gian hàm

Chúng tôi giới thiệu các kí hiệu sau: Cho một tập hợp $E \subset \mathbb{R}^n$, ta kí hiệu E^c là $\mathbb{R}^n \setminus E$ và 1_E là hàm đặc trưng của hàm trên E. Các hằng số C và c luôn được giả sử là dương và không phụ thuộc vào các tham số chính. Hơn nữa, giá trị của chúng có thể thay đổi từ dòng này sang dòng khác. Chúng tôi thường sử dụng bất đẳng thức $e^{-t} \le C(\eta)t^{-\eta}$ với mọi $t \ge 0$ và $\eta > 0$.

Cho không gian xác suất đầy đủ (Ω, F, P) với lọc $\{F_t : t \ge 0\}$. Cho $\gamma \in (0,1]$ và $[a,b] \subset \mathbb{R}^n$. Ta định nghĩa

$$C^\gamma([a,b];\mathbb{R}^n) := \left\{\phi \in C([a,b];\mathbb{R}^n) : |\phi|_{\gamma;[a,b]} < \infty\right\},$$

trong đó

$$|\phi|_{\gamma;[a,b]} := \sup_{t\in[a,b]} |\phi(t)| + \sup_{a\le s,t\le b} \frac{|\phi(t)-\phi(s)|}{|t-s|^\gamma}.$$

Cho $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Ta gọi $W^{\alpha,1}(a,b;\mathbb{R}^n)$ là không gian tất cả các hàm đo được $f:[a,b] \to \mathbb{R}^n$ sao cho

$$\|f\|_{W^{\alpha,1};[a,b]} := \int_a^b \frac{\|f(s)\|}{(s-a)^\alpha} ds + \int_a^b \int_a^s \frac{\|f(s)-f(\lambda)\|}{(s-\lambda)^{\alpha+1}} d\lambda ds < \infty.$$

Từ đây về sau, chúng tôi sử dụng $\|\cdot\|$ để kí hiệu cho chuẩn Euclide trên $\mathbb{R}^n$.

Cho phân hoạch

$$t_0 \equiv a < t_1 < t_2 < \ldots < t_m < b \equiv t_{m+1},$$

Ta định nghĩa $PC([a,b];\mathbb{R}^n)$ là không gian tất cả các hàm $\varphi:[a,b] \to \mathbb{R}^n$ liên tục tại $t \notin \{t_j\}_{j=1}^m$ sao cho $\varphi(t_j^+)$ và $\varphi(t_j^-)$ là hữu hạn và $\varphi(t_j^+) = \varphi(t_j^-)$ với mỗi $j \in \{1,2,\ldots,m\}$. Ta có $PC([a,b];\mathbb{R}^n)$ là không gian Banach với chuẩn

$$\|\varphi\|_{PC} := \sup\{\|\varphi(t)\| : t \in [a,b]\}.$$

Trong phần tiếp theo, chúng tôi cũng sử dụng không gian $PC^\gamma([a,b];\mathbb{R}^n)$ định nghĩa bởi

$$PC^\gamma([a,b];\mathbb{R}^n) := \left\{\varphi \in PC([a,b];\mathbb{R}^n) : [\varphi]_{\gamma,j} < \infty \ \forall j \in \{0,1,\ldots,m\}\right\},$$

trong đó

$$[\varphi]_{\gamma,j} := \sup_{t_j<s<t<t_{j+1}} \frac{\|\varphi(t)-\varphi(s)\|}{|t-s|^\gamma}, \ j \in \{1,2,\ldots,m\},$$

và

$$[\varphi]_{\gamma,0} := \sup_{t_0<s<t<t_1} \frac{\|\varphi(t)-\varphi(s)\|}{|t-s|^{\gamma}}.$$

Ta có $PC([a,b];\mathbb{R}^n)$ không gian Banach với chuẩn

$$\|\varphi\|_{\gamma;[a,b]} := \|\varphi\|_{PC} + \max_{0\le j\le m}[\varphi]_{\gamma,j}.$$

Các chuẩn tương đương trên $PC^{\gamma}([0,T];\mathbb{R}^n)$ sau đây cũng rất hữu dụng. Cho $\lambda \ge 0$, ta đặt

$$\|\phi\|_{\gamma;\lambda;[a,b]} := \sup_{t\in[a,b]} e^{-\lambda t}|\phi(t)| + \max_{0\le j\le m}[\varphi]_{\gamma;\lambda,j}$$

với mỗi $\phi \in PC^{\gamma}([0,T];\mathbb{R}^n)$, trong đó

$$[\varphi]_{\gamma;\lambda,j} := \sup_{t_j<s<t<t_{j+1}} e^{-\lambda t}\frac{\|\varphi(t)-\varphi(s)\|}{|t-s|^{\gamma}},\ \ j\in\{1,2,...,m\}$$

và

$$[\varphi]_{\gamma;\lambda,0} := \sup_{t_0<s<t<t_1} e^{-\lambda t}\frac{\|\varphi(t)-\varphi(s)\|}{|t-s|^{\gamma}}.$$

Ta đặt

$$\|\cdot\|_{\gamma;0;[a,b]} = \|\cdot\|_{\gamma;[a,b]}$$

Ta có phép nhúng liên tục

$$PC^{\gamma_1}([a,b];\mathbb{R}^n) \subset PC^{\gamma_2}([a,b];\mathbb{R}^n)$$

với $\gamma_1 \ge \gamma_2$. Đặc biệt,

$$PC^{1-\alpha}([a,b];\mathbb{R}^n) \subset PC^{\alpha}([a,b];\mathbb{R}^n)$$

với $0<\alpha<\dfrac{1}{2}$.

2.2. Tích hợp ngẫu nhiên pathwise sinh bởi chuyển động Brown phân thứ

Một chuyển động Brown phân thứ (fBM) với tham số Hurst $H\in(0,1)$ định nghĩa trên không gian xác suất (Ω, F, P) là một quá trình Gauss liên tục $B^H = \{B_t^H : t\in[0,T]\}$ với hàm hiệp phương sai

$$R_H(t,s) = \mathrm{E}\left(B_t^H B_s^H\right) = \frac{1}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H}\right)$$

với mọi $s,t\in[0,T]$. Ta biết rằng, B_t^H có một bản sao mà quỹ đạo liên tục Holder với bậc nhỏ hơn *H*. Cụ thể hơn, với mọi $\varepsilon\in(0,H)$ tồn tại một biến ngẫu nhiên dương $\eta_{\varepsilon,T}$ sao cho

$$\left|B_t^H - B_s^H\right| \le \eta_{\varepsilon,T}\left|t-s\right|^{H-\varepsilon} \quad \text{a.e.}$$

Hơn nữa, $\mathrm{E}\left(\left|\eta_{\varepsilon,T}\right|^p\right) < \infty$ với mọi $p \in [1,\infty)$ (xem Bổ đề 7.4 trong (Nualart & Rascanu, 2002)).

Tiếp theo, chúng tôi giới thiệu tích phân ngẫu nhiên pathwise liên kết với B^H. Cho $H > \frac{1}{2}$. Khi đó tích phân $\int_a^t g(s)\,dB^H(s),\ t \in [a,b]$, được xác định với mọi quá trình ngẫu nhiên $g = \{g(t) : a \le t \le b\}$ có quỹ đạo thuộc $W^{\alpha,1}(a,b;\mathbb{R}^n)$ với $1-H < \alpha < \frac{1}{2}$.

Đặc biệt,

$$\int_a^b g(s)\,dB^H(s) = e^{-i\pi\alpha}\int_a^b \left(D_{a^+}^{\alpha} g\right)\left(D_{b^-}^{1-\alpha} B_{b^-}^H\right) dt.$$

Trong đó, với $t \in [a,b]$,

$$B_{b^-}^H(t) := B^H(t) - \lim_{\varepsilon \to 0^+} B^H(b-\varepsilon),$$

và $D_{a^+}^{\alpha}$, $D_{b^-}^{1-\alpha}$ là các đạo hàm Weyl cho bởi

$$D_{a^+}^{\alpha} g(t) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{g(t)}{(t-a)^{\alpha}} + \alpha\int_a^t \frac{g(t)-g(s)}{(t-s)^{1+\alpha}}\,ds\right)$$

và

$$D_{b^-}^{1-\alpha} B^H(t) := \frac{(-1)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{B^H(t)-B^H(b)}{(b-t)^{1-\alpha}} + (1-\alpha)\int_t^b \frac{B^H(t)-B^H(s)}{(s-t)^{\alpha}}\,ds\right).$$

Ta có

$$\left\|\int_a^b g(s)\,dB^H(s)\right\| \le K\left(\alpha,[a,b]\right)\|g\|_{W^{\alpha,1};[a,b]}, \tag{2.1}$$

trong đó

$$K\left(\alpha,[a,b]\right) := \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\sup_{a \le \tau < s \le b}\left|D_{s-}^{1-\alpha} B_{s-}^H(\tau)\right| < \infty \quad \text{a.s.}$$

Chi tiết hơn, độc giả có thể xem (Boufoussi & Hajji, 2011; Boufoussi, Hajji & Lakhel, 2012), (Maslowski & Nualart, 2003).

2.3. *Kết quả chính*

Chúng tôi sẽ giới thiệu một số giả thiết cơ bản.

(H1) $g : [0,T] \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ là một quá trình ngẫu nhiên tương thích với lọc *F*sao cho với hầu chắc chắn $\omega \in \Omega$, quỹ đạo $g(\cdot,\omega)$ là liên tục Holder, tức là tồn tại các hằng số $1-H < \beta \le 1$ và $L_0 > 0$ sao cho

$$\|g(t)-g(s)\| \le L_0 |t-s|^{\beta}$$

với mọi $s,t \in [0.T]$.

(H2) Hàm $f:[0,T]\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ thỏa mãn các điều kiện sau:

(i) f là hàm Carathédory, tức là,

+ $t \mapsto f(t,x)$ đo được với mỗi $x \in \mathbb{R}^n$,

+ $x \mapsto f(t,x)$ liên tục với hầu hết $t \in [0,T]$.

(ii) f tăng trưởng tuyến tính, theo nghĩa là tồn tại một hằng số $L_1 > 0$ thỏa mãn

$$\|f(t,x)\| \le L_1(1+\|x\|)$$

với mọi $t \in [0,T]$ và $x \in \mathbb{R}^n$.

(N) Với mỗi $k \in \{1,2,...,m\}$, tồn tại hằng số $\sigma_k > 0$ sao cho

$$\sum_{k=1}^{m} \sigma_k = 1 \text{ và } \|I_k(x)\| \le \sigma_k \|x\|$$

với mọi $x \in \mathbb{R}^n$.

Chú ý 2.1. *Từ (H1) ta có,*

$$\|g(t)\| \le \|g(0)\| + L_0 |t|^{\beta} \le \|g(0)\| + L_0 T^{\beta} := L_{0,T}$$

với mọi $t \in [0,T]$.

Tiếp theo, ta định nghĩa nghiệm mild của bài toán (1.1). Cho $\alpha \in (1-H, \alpha_0)$, trong đó

$$\alpha_0 := \min\left\{\frac{1}{2}, \beta\right\} \tag{2.2}$$

và β xuất hiện trong (H1). Ta nhắc lại phân hoạch

$$t_0 \equiv 0 < t_1 < t_2 < ... < t_m < T \equiv T_{m+1}.$$

và không gian $PC^{1-\alpha}([0,T];\mathbb{R}^n)$ sẽ tương ứng với phân hoạch này.

Định nghĩa 2.2. *Một quá trình ngẫu nhiên $u:[0,T]\times\Omega \to \mathbb{R}^n$ được gọi là nghiệm mild của bài toán (1.1) nếu $u(0) = u_0$ và các điều kiện sau thỏa mãn:*

(i) Quá trình u tương thích với lọc $F = \{F_t : t \in [0,T]\}$.

(ii) Với hầu hết $\omega \in \Omega$, quỹ đạo $u(\cdot,\omega)$ trên $[0,T]$ thuộc $PC^{1-\alpha}([0,T];\mathbb{R}^n)$.

(iii) Với mọi $t \in [0,T]$, ta có

$$u(t) = u_0 + \int_0^t f(s,u(s))ds + \int_0^t g(s)dB^H(s) + \sum_{0<t_k<t} I_k[u(t_k)].$$

Bây giờ chúng tôi giới thiệu chính xác định nghĩa tính viable cho (1.1).

Định nghĩa 2.3. *Cho K là một tập con của* $\mathbb{R}^n$ *sao cho* $u_0 \in K$*. Khi đó K gọi là* $PC^{1-\alpha}$*-viable của bài toán (1.1) nếu tồn tại ít nhất một nghiệm mild* $u \in PC^{1-\alpha}\left(\left[0,T\right];\mathbb{R}^n\right)$ *sao cho* $u\left(t\right) \in K$ *với mọi* $t \in \left[0,T\right]$.

Đặt

$$J_0 = \left[0, t_1\right] \text{ và } J_k = \left(t_k, t_{k+1}\right)$$

với mỗi $k \in \{1, 2, ..., m\}$. Tính chất tiếp tuyến tiếp theo được giới thiệu để thu được tính viable của bài toán (1.1).

Định nghĩa 2.4. (Điều kiện tiếp xúc)**.** *Giả sử* $\theta \in \left[0,T\right]$ *và* $y \in K$*. Ta nói cặp* $\left(f, g\right)$ *là* $\left(1-\alpha\right)-$ *tiếp xúc với K tại* $\left(\theta, y\right)$ *nếu tồn tại hằng số đủ nhỏ* $h > 0$ *và hai hàm* $U:\left[\theta, \theta+h\right] \to \mathbb{R}^n$, $V:\left[\theta, \theta+h\right] \to \mathbb{R}^n$ *với* $U\left(\theta\right) = V\left(\theta\right) = 0$ *sao cho điều kiện sau được thỏa mãn: Tồn tại hai hằng số* $D > 0$ *và* $M > 0$ *độc lập với* θ *và h sao cho*

$$\left|U\left(s\right)\right| \le D$$

với mọi $s \in \left[\theta, \theta+h\right]$,

$$\left|V\left(t\right) - V\left(s\right)\right| \le M\left|t-s\right|^{\beta}$$

với mọi $k \in \{1, 2, ..., m\}$ *và* $s, t \in \left[\theta, \theta+h\right]$*, trong đó* β *xuất hiện trong (H1). Hơn nữa,*

$$y + \left(t-\theta\right) f\left(\theta, y\right) + g\left(\theta\right)\left[B^H\left(t\right) - B^H\left(\theta\right)\right] + \int_\theta^t U\left(s\right) ds + \int_\theta^t V\left(s\right) dB^H\left(s\right) \in K$$

với mọi $t \in \left[\theta, \theta+h\right]$.

Ta có nhận xét sau đây

Chú ý 2.5. *Nếu không có hiện tượng impulsive, Định nghĩa 2.4 chính là Định nghĩa 12 trong (Ciotir & Rascanu, 2009).*

Bây giờ chúng tôi đã sẵn sàng để giới thiệu kết quả chính của bài báo này.

Định lí 2.6. (Điều kiện cần cho tính viable)**.** *Cho K là một tập con đóng của* $\mathbb{R}^n$ *sao cho* $u_0 \in K$*. Cho* $\frac{1}{2} < H < 1$ *và* $1 - H < \alpha < \alpha_0$*, trong đó* α_0 *xuất hiện trong* (2.2). *Giả sử* (H1), (H2) *và* (N) *được thỏa mãn. Hơn nữa, giả sử rằng K là* $PC^{1-\alpha}-viable$ *của bài toán* (1.1). *Khi đó* $\left(f, g\right)$ *là* $\left(1-\alpha\right)-$ *tiếp xúc với K tại* $\left(0, u_0\right)$.

3. Kết luận

3.1. Đánh giá tiên nghiệm

Cho $\frac{1}{2} < H < 1$ và $1 - H < \alpha < \alpha_0$, trong đó α_0 được giới thiệu trong (2.2).

Mệnh đề 3.1. *Giả sử* (H1) *thỏa mãn. Cho* $k \in \{0,...,m\}$ *và* $s,\tau,t \in J_k$ *sao cho* $s \le \tau \le t$*. Khi đó, tồn tại* $C_0 = C_0(T,\alpha,\beta,L_0) > 0$ *sao cho*

$$\left\| \int_s^t g(\theta)\, dB^H(\theta) \right\| \le C_0 \left[(t-s)^{1-\alpha} + (t-s)^{\beta+1-\alpha} \right].$$

Chứng minh. Từ (2.1) ta có

$$\begin{aligned} \left\| \int_s^t g(\theta)\, dB^H(\theta) \right\| &\le K(\alpha,[s,t]) \left(\int_s^t \frac{\|g(\theta)\|}{(\theta-s)^\alpha} d\theta + \int_s^t \int_s^\theta \frac{\|g(\theta)-g(v)\|}{(\theta-v)^{\alpha+1}} dv d\theta \right) \\ &\le K(\alpha,[0,T]) \left(\int_s^t \frac{\|g(\theta)\|}{(\theta-s)^\alpha} d\theta + \int_s^t \int_s^\theta \frac{\|g(\theta)-g(v)\|}{(\theta-v)^{\alpha+1}} dv d\theta \right) \end{aligned}$$

Tiếp theo, ta đánh giá từng số hạng bên phải. Với số hạng đầu tiên, sử dụng Chú ý **2.1** để thu được

$$\int_s^t \frac{\|g(\theta)\|}{(\theta-s)^\alpha} d\theta \le L_{0,T} \int_s^t (\theta-s)^{-\alpha} d\theta = \frac{L_{0,T}}{1-\alpha} (t-s)^{1-\alpha}.$$

Với số hạng thứ hai, (H1) dẫn đến

$$\int_s^t \int_s^\theta \frac{\|g(\theta)-g(v)\|}{(\theta-v)^{\alpha+1}} dv d\theta \le L_0 \int_s^t \int_s^\theta \frac{(\theta-v)^\beta}{(\theta-v)^{\alpha+1}} dv d\theta \le \frac{L_0}{(\beta-\alpha)(\beta-\alpha+1)} (t-s)^{\beta-\alpha+1}.$$

Cộng hai số hạng lại ta có

$$\left\| \int_s^t g(\theta)\, dB^H(\theta) \right\| \le K(\alpha,[0,T]) \left(\frac{L_{0,T}}{1-\alpha} (t-s)^{1-\alpha} + \frac{L_0}{(\beta-\alpha)(\beta-\alpha+1)} (t-s)^{\beta-\alpha+1} \right).$$

Ta hoàn thành chứng minh. ■

Mệnh đề 3.2. *Giả sử (H1) được định nghĩa. Đặt*

$$\mathbf{J}(g)(t) := \int_0^t f(s)\, dB^H(s)$$

với $t \in [0,T]$*. Khi đó* $\mathbf{J}(g) \in C^{1-\alpha}([0,T];\mathbb{R}^n)$*. Hơn nữa, tồn tại* $M_0 = M_0(T,\alpha,\beta,L_0) > 0$ *sao cho*

$$\|\mathbf{J}(g)\|_{\alpha;\lambda;[0,T]} \le M_0$$

với $\lambda \ge 0$.

Chứng minh. Đầu tiên ta quan sát rằng $\mathbf{J}(g)$ được định nghĩa tốt vì và $1-H < \alpha < \alpha_0$ và $g \in C^\beta([0,T];\mathbb{R}^n)$. Chú ý rằng $\|\mathbf{J}(g)\|_{\alpha;\lambda;[0,T]} \le \|\mathbf{J}(g)\|_{\alpha;[0,T]}$. Do đó, ta chỉ còn phải chứng minh rằng

$$\|\mathbf{J}(g)\|_{\alpha;[0,T]} \le M_0.$$

Thật vậy, lấy $0 \le s < t \le T$. Khi đó

$$\frac{\left\|\mathbf{J}(g)(t)-\mathbf{J}(g)(s)\right\|}{(t-s)^{1-\alpha}} \le (t-s)^{\alpha-1}\left\|\int_0^t f(\theta)\,dB^H(\theta)\right\|$$

$$\le C_0 (t-s)^{\alpha-1}\left[(t-s)^{1-\alpha}+(t-s)^{\beta+1-\alpha}\right]$$

$$\le C_0\left[1+T^{\beta}\right],$$

trong đó **Mệnh đề 3.1** đã được sử dụng trong bất đẳng thức thứ hai.

Ngoài ra, do đó, chúng ta có

$$\left\|\mathbf{J}(g)(t)\right\| \le C_0\left[1+T^{\beta}\right]t^{1-\alpha} \le C_0\left[1+T^{\beta}\right]T^{1-\alpha}$$

với mọi $t \in [0,T]$ vì $\mathbf{J}(g)(0)=0$.

Kết luận được suy ra từ hai đánh giá trên. ■

Mệnh đề 3.3. *Giả sử (H2) được thỏa mãn. Cho* $u \in PC^{1-\alpha}\left([0,T],\mathbb{R}^n\right)$. *Đặt*

$$\mathbf{I}(f)(t) := \int_0^t f\left(s,u(s)\right)ds$$

với $t \in [0,T]$. *Khi đó*

$$\mathbf{I}(f) \in PC^{1-\alpha}\left([0,T];\mathbb{R}^n\right)$$

Hơn nữa, tồn tại các hằng số $M_1 = M_1(T,\alpha,L_1) > 0$ *và sao cho*

$$\left\|\mathbf{I}(f)\right\|_{\alpha;\lambda;[0,T]} \le M_1 + M_2\left\|u\right\|_{1-\alpha;\lambda;[0,T]}$$

với mọi $\lambda \ge 0$ *và*

$$\lim_{\lambda\to\infty} M_2 = 0.$$

Chứng minh. Từ (H2) (ii) ta có

$$\left\|f\left(t,u(t)\right)\right\| \le L_1\left(1+\left\|u(t)\right\|\right)$$

với mọi $t \in [0,T]$.

Lấy $\lambda \ge 0, k \in \{0,\ldots,m\}$ và $s,t \in J_k$ sao cho $s < t$. Đánh giá trên cho ta

$$e^{-\lambda t}\frac{\left\|\mathbf{I}(f)(t)-\mathbf{I}(f)(s)\right\|}{(t-s)^{1-\alpha}} \le e^{-\lambda t}(t-s)^{\alpha-1}\left\|\int_s^t f\left(\theta,u(\theta)\right)d\theta\right\|$$

$$\le e^{-\lambda t}(t-s)^{\alpha-1}\int_s^t L_1\left(1+\left\|u(\theta)\right\|\right)d\theta$$

$$= e^{-\lambda t}L_1(t-s)^{\alpha} + L_1(t-s)^{\alpha-1}\int_s^t e^{-\lambda(t-\theta)}e^{-\lambda\theta}\left\|u(\theta)\right\|d\theta$$

$$\le L_1T^{\alpha} + L_1\|u\|_{1-\alpha;\lambda;[0,T]}\int_s^t e^{-\lambda(t-\theta)}(t-\theta)^{\alpha-1}\,d\theta$$

$$\le L_1T^{\alpha} + L_1\|u\|_{1-\alpha;\lambda;[0,T]}\,\lambda^{-\alpha}\int_0^{\infty} e^{-z}z^{\alpha-1}dz$$

$$= L_1T^{\alpha} + \frac{\Gamma(\alpha)L_1}{\lambda^{\alpha}}\|u\|_{1-\alpha;\lambda;[0,T]}.$$

Ngoài ra, chúng tôi còn có

$$\begin{aligned} e^{-\lambda t}\|\mathbf{I}(f)(t)\| &\le e^{-\lambda t}\left\|\int_0^t f(\theta,u(\theta))\,d\theta\right\| \le e^{-\lambda t}\int_0^t L_1\left(1+\|u(\theta)\|\right)d\theta \\ &= e^{-\lambda t}L_1t + L_1\int_0^t e^{-\lambda(t-\theta)}e^{-\lambda\theta}\|u(\theta)\|\,d\theta \\ &\le L_1T + L_1\|u\|_{1-\alpha;\lambda;[0,T]}\,\lambda^{-1}\int_0^{\infty}e^{-z}dz \\ &\le L_1T + \frac{L_1}{\lambda}\|u\|_{1-\alpha;\lambda;[0,T]}. \end{aligned}$$

Chúng tôi đạt được yêu cầu bằng cách kết hợp các đánh giá ở trên. ■

Mệnh đề 3.4. *Giả sử (N) được thỏa mãn. Cho $\gamma \in (0,1]$ và $u \in PC^{\gamma}([0,T],\mathbb{R}^n)$. Đặt*

$$\mathbf{K}(u)(t) := \sum_{0<t_k<t} I_k\left[u(t_k)\right]$$

với $t \in [0,T]$. Khi đó $\mathbf{K}(u) \in PC^{\gamma}([0,T],\mathbb{R}^n)$. Hơn nữa, ta có

$$\|\mathbf{K}(u)\|_{\gamma;\lambda;[0,T]} \le \|u\|_{\gamma;\lambda;[0,T]}\sum_{j=1}^{k}\sigma_j$$

với mỗi $\gamma \in (0,1]$ và $\lambda \ge 0$.

Chứng minh. Lấy $\lambda \ge 0$, $k \in \{0,...,m\}$ và $s,t \in J_k$ sao cho $s<t$. Khi đó

$$\|\mathbf{K}(u)(t) - \mathbf{K}(u)(s)\| = 0.$$

Bây giờ ta đánh giá $\mathbf{K}(u)$. Ta xét hai trường hợp. Nếu $k=0$ thì $\mathbf{K}(u)(t)=0$. Nếu $k>0$ thì ta sử dụng (N) để thấy

$$e^{-\lambda t}\|\mathbf{K}(u)(t)\| \le e^{-\lambda t}\sum_{0<t_j<t}\left\|I_j\left[u(t_j)\right]\right\| \le \sum_{j=1}^{k}\sigma_j e^{-\lambda t_j}\|u(t_j)\| \le \|u\|_{\gamma;\lambda;[0,T]}\sum_{j=1}^{k}\sigma_j.$$

Ta hoàn thành chứng minh. ■

Chứng minh của Định lí 2.6 là trọng tâm của tiểu mục tiếp theo.

3.2. Điều kiện đủ của tính viable

Đầu tiên, chúng tôi chứng minh tính bị chặn đều cho nghiệm mild của bài toán (1.1).

Mệnh đề 3.5. *Giả sử* $(\mathrm{H1}),(\mathrm{H2})$ *và* (N) *được thỏa mãn. Cho* $u\in PC^{1-\alpha}\left([0,T];\mathbb{R}^n\right)$ *là một nghiệm mild của bài toán (1.1). Khi đó tồn tại* $C=C\left(T,\alpha,\beta,L_0,L_1,u_0\right)>0$ *sao cho*

$$\|u\|_{1-\alpha;[0,T]}\le C\left(1+\|u_0\|\right).$$

Chứng minh. Nhắc lại các hằng số M_0,M_1 and M_2 từ các Mệnh đề **3.2**, **3.3**. Lấy $\lambda\ge 0$ thỏa mãn

$$M_2+\sum_{j=1}^{k}\sigma_j<1.$$

Tiếp theo, từ công thức nghiệm mild, ta

$$\begin{aligned}\|u\|_{1-\alpha;\lambda;[0,T]}&\le\|u_0\|+\|\mathbf{J}(g)\|_{1-\alpha;\lambda;[0,T]}+\|\mathbf{I}(u)\|_{1-\alpha;\lambda;[0,T]}+\|\mathbf{K}(u)\|_{1-\alpha;\lambda;[0,T]}\\&\le\|u_0\|+M_0+M_1+\left(M_2+\sum_{j=1}^{k}\sigma_j\right)\|u\|_{1-\alpha;\lambda;[0,T]},\end{aligned}$$

trong đó ta đã sử dụng các Mệnh đề 3.2, 3.3 và 3.4 trong bước thứ hai.

Từ đó, ta có $\|u\|_{1-\alpha;[0,T]}\le e^{\lambda T}\left(1-M_2-\sum_{j=1}^{k}\sigma_j\right)^{-1}\left(\|u_0\|+M_0+M_1\right).$

Ta kết thúc chứng minh. ■

Cuối cùng, ta chứng minh Định lí 2.6.

Chứng minh của Định lí 2.6. Lấy $X\in PC^{1-\alpha}\left([0,T],\mathbb{R}^n\right)$ là một nghiệm mild của bài toán (1.1) sao cho $X(t)\in K$ với mọi $t\in[0,T]$. Do Mệnh đề **3.5**, tồn tại hằng số $C=\ C\left(T,\alpha,\beta,L_0,L_1,u_0\right)>0$ sao cho

$$\|X\|_{1-\alpha;[0,T]}\le C\left(1+\|u_0\|\right).$$

Lấy $h>0$ là một hằng số đủ nhỏ sao cho

$$\sum_{0<t_k<t}I_k\left[X\left(t_k\right)\right]=0$$

với mọi $t\in[0,h]$. Khi đó

$$X(t)=u_0+\int_0^t f\left(s,X(s)\right)ds+\int_0^t g(s)\,dB^H(s)$$

Vậy ta có

$$X(t)=u_0+\int_0^t\left[f\left(0,u_0\right)+U(s)\right]ds+\int_0^t\left[g(0)+V(s)\right]dB^H(s)$$

với mọi $t \in [0,h]$, trong đó

$$U(s) := f(s, X(s)) - f(0, u_0) \quad \text{and} \quad V(s) := g(s) - g(0).$$

Hơn nữa, các toán tử U and V đáp ứng các tiêu chuẩn được liệt kê trong **Định nghĩa 2.4.**

Chứng minh được hoàn thành. ■

❖ ***Tuyên bố về quyền lợi:*** *Các tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.*

❖ ***Lời cảm ơn:*** *Nghiên cứu này được tài trợ bởi Nguồn ngân sách khoa học và công nghệ Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh trong đề tài mã số CS.2021.19.04TĐ.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Aubin, J. P., & Da Prato, G. (1990). Stochastic viability and invariance. *Ann. Sc. norm. super*. Pisa *27*, 595-694.

Ahmed, N. U. (2011). Existence of solutions of nonlinear stochastic differential inclusions on Banach space. In World Congress of Nonlinear Analysts ’92: *Proceedings of the First World Congress of Nonlinear Analysts*, Tampa, Florida, August 19-26, 1992. De Gruyter, 1699-1712.

Boufoussi, B., & Hajji, S. (2011). Functional differential equations driven by a fractional Brownian motion. *Comput. Math. Appl., 62*, 746-754.

Boufoussi, B., Hajji, S., & Lakhel, E. H. (2012). Functional differential equations in Hilbert spaces driven by a fractional Brownian motion. *Afr. Mat*., 23, 173-194.

Buckdahn, R., Quincampoix, M., Rainer, C., & Rascanu, A. (2002). Viability of moving sets for stochastic differential equation. *Adv. Differ. Equ., 7*(9), 1045-1072.

Ciotir, I., & Rascanu, A. (2009). Viability for differential equations driven by fractional Brownian motion. *J. Differential Equations, 247*, 1505-1528.

Gautier, S., & Thibault, L. (1993). Viability for constrained stochastic differential equations. *Differ. Integral Equ*., *6*(6), 1395-1414.

Maslowski, B., & Nualart, D. (2003). Evolution equations driven by a fractional Brownian motion. *J. Funct. Anal*., *202*(1), 277-305.

Nualart, D., & Rascanu, A. (2002). Differential equations driven by fractional Brownian motion. *Collect. Math.*, *53*(1), 55-81.

Xu, L., & Luo, J. (2019). Viability for stochastic functional differential equations in Hilbert spaces driven by fractional Brownian motion. *Appl. Math. Comput.*, *341*, 93-110.

Xu, L. (2019). Viability for stochastic functional differential equations with infinite memory driven by a fractional Brownian motion. *Physica A*, 527, 121076.

A NECESSARY CONDITION OF VIABILITY FOR IMPULSIVE STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS DRIVEN BY FRACTIONAL BROWNIAN MOTION

Huynh Cao Truong[1*], Nguyen Binh Thanh[2], Nguyen Thanh Long[1], Nguyen Quoc Cuong[3]

[1]*University of Science, VNU Ho Chi Minh City, Vietnam*

[2]*Institute of Applied Mathematics, University of Economics Ho Chi Minh City, Vietnam*

[3]*Hong Ha Secondary and High School, Ho Chi Minh City, Vietnam*

[*]*Corresponding author: Huynh Cao Truong – Email: huynhcaotruong1011@gmail.com*

Received: October 01, 2022; Revised: November 15, 2022; Accepted: February 21, 2023

ABSTRACT

Viability theory is a mathematical theory that offers mathematical metaphors of the evolution of macrosystems arising in biology, economics, cognitive sciences, games, and similar areas, as well as in nonlinear systems of control theory. The viability problem has been studied by using various frameworks and techniques and is still one of the active directions of differential equations. The viability property in a stochastic framework was explored first by Aubin and Da Prato (1990). In this paper, we give a necessary condition for viability results of an impulsive stochastic functional differential equation driven by a fractional Brownian motion with Hurst parameter $\frac{1}{2} < H < 1$

Keywords: Fractional Brownian motion; Stochastic differential equations; Viability