HÀM SỐ MŨ: MỘT NGHIÊN CỨU TRI THỨC LUẬN VÀ ĐỐI CHIẾU GIỮA VIỆT NAM VÀ PHÁP

TRẦN LƯƠNG CÔNG KHANH*, NGUYỄN HỮU LỢI**

TÓM TẮT

Phần đầu của bài báo so sánh tiến trình xây dựng khái niệm hàm số mũ ở trường trung học phổ thông Việt Nam và Pháp và đặt ra câu hỏi ban đầu. Câu hỏi này dẫn đến một khảo sát về sự hình thành và phát triển khái niệm hàm số mũ trong lịch sử toán học nhằm rút ra những đặc trưng tri thức luận của khái niệm. Những đặc trưng này giúp nhìn lại tiến trình xây dựng khái niệm hàm số mũ ở hai nước và rút ra kết kuận.

Từ khóa: lũy thừa, hàm số mũ, hàm số lôgarit, số e, mở rộng khái niệm lũy thừa.

ABSTRACT

Exponential function: an epistemology research and a contrastive analysis between Vietnam and France

The first part compares the construction process of the concept of exponential function in high school in Vietnam and France, and raises the initial question, which leads to a study of the emergence and development of the concept of exponential function in the history of mathematics in order to bring out the epistemological features of this concept. In turn, these features help to reconsider the construction process of the concept of exponential function in both countries and draw out an conclusion.

Keywords: power, exponential function, logarithmic function, e, expanded concept of power.

1. Tóm tắt tiến trình xây dựng khái niệm hàm số mũ ở trường trung học phổ thông Việt Nam và Pháp

1.1. Khái niệm hàm số mũ ở trường trung học phổ thông Việt Nam

Ở trường trung học phổ thông Việt Nam, hàm số mũ được giảng dạy ở lớp 12. Để ngắn gọn, chúng tôi tóm tắt các định nghĩa và tính chất dưới đây trong sách *Giải tích 12 nâng cao* [1] nhưng vẫn giữ nguyên ý tưởng, kí hiệu và thứ tự trình bày.

• Lũy thừa với số mũ nguyên dương được nhắc lại. Sau đó, sách định nghĩa lũy thừa với số mũ 0, số mũ nguyên âm và số mũ hữu tỉ.

• Hai mệnh đề sau được chấp nhận để chuẩn bị cho định nghĩa lũy thừa với số mũ vô tỉ:

- Với α vô tỉ, tồn tại dãy hữu tỉ (r_n) hội tụ về α;

* TS, Sở Giáo dục và Đào tạo Bình Thuận; *Email: tlckhanh@gmail.com*

** NCS, Sở Giáo dục và Đào tạo TPHCM

- Với $a > 0$, α vô tỉ và dãy hữu tỉ (r_n) hội tụ về α, dãy $\left(a^{r_n}\right)$ hội tụ và $\lim\limits_{n\to+\infty} a^{r_n}$ không phụ thuộc vào (r_n).

- $\lim\limits_{n\to+\infty} a^{r_n}$ trong mệnh đề trên được gọi là lũy thừa của a với số mũ α, kí hiệu a^{α}.
- Lôgarit cơ số a ($a > 0$, $a \neq 1$) của $b > 0$ được định nghĩa là số α thỏa $a^{\alpha} = b$.
- Số e được định nghĩa bằng giới hạn: $e = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}$ và lôgarit tự nhiên là lôgarit cơ số e.
- Hàm số mũ cơ số a ($a > 0$, $a \neq 1$) là hàm số xác định trên **R** và có dạng $y = a^x$.

1.2. Khái niệm hàm số mũ ở trường trung học phổ thông Pháp

Học sinh trung học phổ thông ở Pháp được phân ban từ đầu lớp 11. Từ năm 1993, trường trung học phổ thông Pháp có ba ban: Ban L (ban văn chương), ban ES (ban kinh tế và xã hội) và ban S (ban khoa học). Số giờ toán trong tuần của lớp 12 được quy định như sau: [12]

Ban	Số giờ toán (bắt buộc) trong tuần	Số giờ toán (tự chọn) trong tuần
L	0 giờ	4 giờ
ES	4 giờ	1 giờ 30
S	6 giờ	2 giờ

Trong kì thi tú tài, môn tiếng Pháp của thí sinh ban S chỉ có hệ số 2 trong khi môn toán có hệ số 7 hoặc hệ số 9 (nếu có học thêm giờ tự chọn). Vì vậy, toán là môn học quan trọng nhất đối với học sinh ban S.

Chương trình lớp 12 ban S hiện hành quy định các sách giáo khoa phải định nghĩa hàm số mũ là hàm số f duy nhất có đạo hàm trên R thỏa $f' = f$ và $f(0) = 1$. Chương trình yêu cầu chấp nhận sự tồn tại của f nhưng chứng minh tính duy nhất. Hàm số f gọi là hàm số mũ và kí hiệu là exp.

Từ định nghĩa, người ta chứng minh được một số tính chất "đại số" và "giải tích" của hàm số mũ, trong đó có:

$\forall x \in \mathbf{R}$, $\exp(x) > 0$

$\forall x, y \in \mathbf{R}$, $\exp(x + y) = \exp(x).\exp(y)$

$\forall x \in \mathbf{R}$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $\exp(nx) = [\exp(x)]^n$, đặc biệt $\forall n \in \mathbf{N}$, $\exp(n) = e^n$ với $e = \exp(1)$

$\forall x \in \mathbf{R}, \exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$

$\forall x, y \in \mathbf{R}, \exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$

$\forall x \in \mathbf{R}, (e^x)' = e^x$, đặc biệt $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x} = (e^x)'\big|_{x=0} = 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x} = +\infty,\ \lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$

Năm tính chất đầu tiên cho thấy giá trị của hàm exp tại $x \in \mathbf{Q}$ cũng là lũy thừa của *e* với số mũ *x*. Do đó, chương trình quy ước viết exp(x) là e^x với $x \in \mathbf{R}$. Với quy ước này, lũy thừa của *e* với số mũ vô tỉ *x* được định nghĩa là giá trị của hàm exp tại *x*.

Cũng theo chương trình, hàm số lôgarit Nêpe có thể được định nghĩa bằng một trong ba cách sau:

- Dựa vào tính chất của hàm mũ: Với mỗi số thực $x > 0$, tồn tại duy nhất số thực *y* thỏa $e^y = x$. Số thực *y* này gọi là lôgarit Nêpe của *x*, kí hiệu ln*x*. Hàm số $y = \ln x$ gọi là hàm số lôgarit Nêpe.
- Dựa vào phương trình hàm: Tồn tại duy nhất hàm số *f* xác định trên (0; +∞) thỏa $f(xy) = f(x) + f(y)$ với mọi *x*, *y* dương và $f(e) = 1$. Hàm số *f* gọi là hàm số lôgarit Nêpe. Biểu thức $f(x)$ còn kí hiệu là ln*x*.
- Dựa vào nguyên hàm: Hàm số *f* xác định bởi $f(x) = 1/x$ liên tục trên (0; +∞) nên có nguyên hàm trên khoảng này. Hàm số lôgarit Nêpe *F* là nguyên hàm của *f* trên (0; +∞) thỏa điều kiện $F(1) = 0$. Nói cách khác, $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt$ với mọi $x > 0$.

Hàm số lôgarit cơ số *a* ($a > 0$, $a \neq 1$) được định nghĩa từ hàm số lôgarit Nêpe nhờ công thức đổi cơ số: $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$ với $x > 0$.

Hàm số mũ cơ số $a > 0$ được định nghĩa là hàm số xác định trên **R** bởi biểu thức $f(x) = a^x = e^{x\ln a}$. Hệ thức này cũng giúp định nghĩa lũy thừa của $x > 0$ với số mũ vô tỉ α: $x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha\ln x}$.

1.3. Đối chiếu tiến trình xây dựng khái niệm hàm số mũ ở Việt Nam và Pháp

Từ tiến trình xây dựng hàm số mũ ở trung học phổ thông Việt Nam và Pháp, ta rút ra những nhận xét sau:

- Ở Việt Nam, hàm số mũ cơ số *a* ($a > 0$, $a \neq 1$) được xây dựng dựa trên sự mở rộng khái niệm lũy thừa. Hàm số mũ cơ số *e* là một trường hợp đặc biệt của hàm số mũ khi $a = e > 1$. Ở Pháp, hàm số mũ cơ số *e* được xây dựng dựa trên phương trình vi phân. Hàm số mũ cơ số a ($a > 0$) được định nghĩa từ hàm số mũ cơ số e và lôgarit Nêpe. Hai tiến trình này có thể sơ đồ hóa như sau:

Việt Nam: mở rộng khái niệm lũy thừa → biểu thức mũ → hàm mũ (cơ số a, e)
Pháp: phương trình vi phân → hàm mũ (cơ số e) → hàm lôgarit (cơ số e, a) → hàm mũ (cơ số a) + lũy thừa với số mũ vô tỉ

- Ở Việt Nam, số e được định nghĩa trước hàm số mũ cơ số a ($a > 0$, $a \neq 1$). Ở Pháp, số e được định nghĩa trong quá trình xây dựng hàm số mũ cơ số e. Sự mở rộng khái niệm lũy thừa được thực hiện một cách gián tiếp qua trung gian hàm số mũ.
- Ở Việt Nam, biểu thức mũ giúp định nghĩa biểu thức lôgarit cơ số a và hàm số lôgarit cơ số a. Ở Pháp, ngoài cách này, chương trình còn đề nghị thêm hai cách khác, dựa vào phương trình hàm hoặc nguyên hàm. Ta có thể sơ đồ hóa các tiến trình này như sau:

Việt Nam: biểu thức mũ → biểu thức lôgarit (cơ số a) → hàm số lôgarit (cơ số a, e)
Pháp: biểu thức mũ hoặc phương trình hàm hoặc nguyên hàm → hàm số lôgarit (cơ số e) → hàm số lôgarit (cơ số a)

Sự khác nhau về tiến trình xây dựng hàm số mũ giữa Việt Nam và Pháp đặt ra câu hỏi: Trong lịch sử toán học, khái niệm hàm số mũ được hình thành và phát triển như thế nào? Phần tiếp theo sẽ trả lời câu hỏi này, có chú ý đến mối liên hệ với hàm số lôgarit và số e.

2. Sự ra đời và phát triển của khái niệm hàm số mũ

Sự ra đời và phát triển của khái niệm hàm số mũ có liên quan đến khái niệm lôgarit tự nhiên, sự mở rộng khái niệm lũy thừa và số e. Để dễ theo dõi, chúng tôi trình bày chúng thành ba phần riêng như sau:

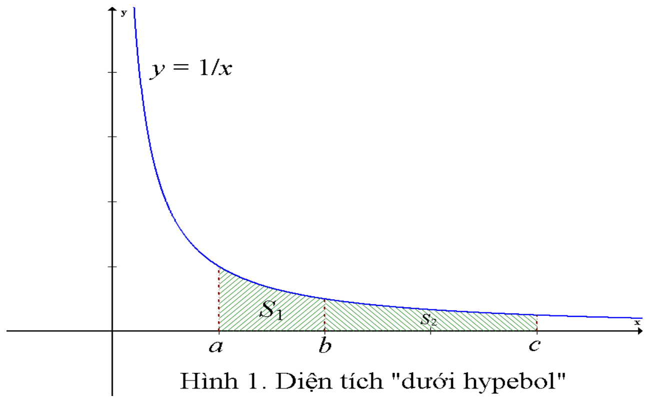
2.1. **"Diện tích dưới hypebol"** ***hay lôgarit tự nhiên***

Năm 1614, John Napier (1550-1617) công bố các bảng lôgarit giúp đơn giản hóa các phép tính lượng giác trong thiên văn học.

Trong tác phẩm *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni* (1647), Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667) nghiên cứu bài toán cầu phương hypebol [10]. Kết quả nghiên cứu của ông có thể diễn đạt bằng thuật ngữ hiện đại như sau:

Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích các miền phẳng xác định bởi $\{M(x, y) \mid 0 < a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq 1/x\}$, $\{M(x, y) \mid 0 < a < b \leq x \leq c, 0 \leq y \leq 1/x\}$. Ta có $S_1 = S_2$ khi và chỉ khi a, b, c tạo thành một cấp số nhân.

Từ kết quả trên, De Saint-Vincent chứng minh được các "diện tích dưới hypebol" có tính chất giống như các lôgarit (biến đổi tích thành tổng) nhưng chưa nhận ra mối liên hệ giữa diện tích này (lôgarit tự nhiên) với các lôgarit do Napier tạo ra.



Hình 1. Diện tích "dưới hypebol"

Năm 1649, Alphonse Antoine de Sarasa (1617-1667) - một môn đệ của de Saint-Vincent - phát biểu mối liên hệ giữa các lôgarit và "diện tích dưới hypebol". Vì vậy, "diện tích dưới hypebol" còn được gọi là lôgarit hypebolic. Năm 1668, Nicolaus Mercator (1620-1687) dùng thuật ngữ lôgarit tự nhiên để chỉ "diện tích dưới hypebol". Thuật ngữ này được dùng đến ngày nay. [10]

2.2. Số e

Khái niệm *cơ số của lôgarit* không được đề cập tường minh trong các bảng lôgarit đầu thế kỉ XVII của Napier. Sự xuất hiện của lôgarit tự nhiên từ giữa thế kỉ XVII cũng không làm thay đổi tình trạng này, ngay cả khi lôgarit (thập phân) của số *e* can thiệp ngầm vào bảng lôgarit (thập phân) của Vlacq - thông qua công thức $\ln N = \lg N / \lg e$. [7]

Năm 1685, Jacques Bernoulli (1654-1705) nghiên cứu bài toán lãi suất kép nhưng dưới góc độ khác với người Babylon (sẽ được đề cập ở phần 2.3). Để dễ hiểu, ta trình bày một ví dụ cụ thể (bằng kí hiệu hiện đại) trước khi nêu kết quả tổng quát của Jacques Bernoulli. [4]

Giả sử ta đem 1 đồng cho vay với lãi suất kép 100 % một năm. Sau một năm, ta có 2 đồng (vốn và lãi).

Nếu lãi suất được quyết toán theo mỗi sáu tháng thì số tiền thu được (vốn và lãi) sau một năm là 1 đồng x $(1 + ½)^2 = 2{,}25$ đồng.

Nếu lãi suất được quyết toán theo mỗi ba tháng thì số tiền thu được (vốn và lãi) sau một năm là 1 đồng x $(1 + ¼)^4 = 2{,}441406$ đồng.

Nếu lãi suất được quyết toán theo mỗi tháng thì số tiền thu được (vốn và lãi) sau một năm là 1 đồng x $(1 + 1/12)^{12} \approx 2{,}613035$ đồng.

Nếu lãi suất được quyết toán theo mỗi tuần thì số tiền thu được (vốn và lãi) sau một năm là 1 đồng x $(1 + 1/52)^{52} \approx 2{,}692597$ đồng.

Nếu lãi suất được quyết toán theo mỗi ngày thì số tiền thu được (vốn và lãi) sau một năm là 1 đồng x $(1 + 1/365)^{365} \approx 2{,}714567$ đồng.

Bernoulli nhận xét rằng khi khoảng thời gian tính lãi suất kép ngày càng nhỏ, dãy số trên tiến đến một giới hạn. Tuy nhiên, ông chưa nhận ra mối liên hệ giữa giới hạn này và lôgarit tự nhiên. Nếu dùng kí hiệu hiện đại, nhận xét của Bernoulli chính là hệ thức $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

Sự ra đời của của lôgarit tự nhiên với tư cách là "diện tích dưới hypebol" và nhu cầu biểu diễn x theo y từ đẳng thức $y = \ln x$ dẫn đến việc phải xác định số b sao cho $\ln b = 1$ (Leibniz 1690). Năm 1728, Euler dùng e để chỉ cơ số của lôgarit tự nhiên và tính được $e \approx 2{,}7182817$.

Năm 1737, Euler khai triển e, $\sqrt{e}$, e^2 thành liên phân số và suy ra tính vô tỉ của ba số này.

Năm 1748, Euler biểu diễn e^x dưới dạng chuỗi lũy thừa và giới hạn (mặc dù định nghĩa chính xác về giới hạn chỉ được Karl Weierstrass công bố năm 1861):

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots$$

$$e^x = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

Năm 1874, Charles Hermite (1822-1901) chứng minh e là số siêu việt. Năm 1895, Felix Klein (1849-1925) cung cấp một chứng minh khác đơn giản hơn.

2.3. Mở rộng khái niệm lũy thừa

Người Babylon đã đặt ra bài toán tính số năm cần thiết để tăng gấp đôi số vốn ban đầu nếu cho vay với lãi suất kép 20 % một năm và tìm được đáp số là $3\frac{47}{60}$. [3]

Nếu dùng kí hiệu hiện đại, bài toán của người Babylon tương đương với việc giải phương trình $(1{,}2)^x = 2$. Vì $(1{,}2)^{3\frac{47}{60}} \approx 1{,}9933 \approx 2$ nên $3\frac{47}{60}$ là một nghiệm gần đúng có độ tin cậy cao.

Mặc dù các hiện vật khảo cổ chưa làm rõ cách giải hoặc kí hiệu mà người Babylon đã sử dụng, bài toán trên chứng tỏ họ đã nghĩ đến lũy thừa với số mũ hữu tỉ và biết cách tính khá chính xác một số giá trị lũy thừa này.

Trong tác phẩm *De proportionum* (1360), Nicole Oresme (1320-1382) tìm cách xây dựng thang âm điều hòa bằng cách chia một quãng tám giữa hai nốt cùng tên thành 12 nửa cung bằng nhau. Vì tần số nốt cao gấp đôi tần số nốt thấp trong một quãng tám, vấn đề của Oresme tương đương với việc xác định công bội q của một cấp số nhân có $u_{13} = 2u_1$ tức $q^{12} = 2$. Để tìm q, Oresme đã ngầm sử dụng khái niệm lũy thừa với số mũ hữu tỉ dương dù chưa đưa ra định nghĩa hay kí hiệu. Nếu diễn đạt bằng kí hiệu hiện đại, ý tưởng của Oresme dựa trên hệ thức $2^{1/12}$. $2^{1/12}$… $2^{1/12} = 2$. Oresme cũng cố gắng định nghĩa lũy thừa với số mũ vô tỉ nhưng không thành công.

Trong tác phẩm *Triparty en la science des nombres* (1484), Nicolas Chuquet (1445-1488) dùng kí hiệu $\overline{m}$ để chỉ phép trừ, 1^n để chỉ x^n và 1^{nm} để chỉ x^{-n} (với n nguyên dương). Chẳng hạn, biểu thức $7x^3 - 1/x^2$ được Chuquet viết là $7^3\ \overline{m}\ 1^{2m}$. Chuquet chỉ sử dụng các kí hiệu này như một cách viết tắt nhưng chưa phát biểu mối liên hệ giữa x^n và x^{-n}. Ông cũng sử dụng căn bậc hai và căn bậc ba để xác định các số hạng đứng giữa của một cấp số nhân. Tuy nhiên, tác phẩm *Triparty en la science des nombres* không được xuất bản nên kết quả của Chuquet ít được phổ biến. Có tài liệu nói rằng Chuquet cũng định nghĩa lũy thừa với số mũ 0 và nguyên âm.

Trong tác phẩm *Arithmetica integra* (1544), Michael Stifel (1486-1567) đưa ra các quy tắc nhân và chia hai lũy thừa của cùng một số với số mũ tự nhiên, nguyên âm và hữu tỉ. Ông cũng là người đề xướng thuật ngữ *số mũ*.

Trong *Géométrie* (1637), René Descartes (1596-1650) dùng x, y, z… để chỉ ẩn số, a, b, c để chỉ số đã biết và x^3, x^4 …, x^5 để chỉ *xxx, xxxx,* …, *xxxxx*. Kí hiệu sau cùng nhanh chóng được nhiều nhà toán học sử dụng, trong đó có Mersenne (1588-1648) và Huygens (1629-1695).

Descartes chỉ sử dụng số nguyên dương nhưng không sử dụng chữ cái trong số mũ lũy thừa. Năm 1657, John Wallis (1616-1703) là người đầu tiên dùng chữ để kí hiệu các số mũ nguyên dương. Kí hiệu của Wallis giúp diễn đạt các quy tắc của Stifel về nhân và chia hai lũy thừa của cùng một số (với số mũ 0, nguyên âm, hữu tỉ) thành các công thức ngắn gọn.

Từ nửa sau thế kỉ XVII, kí hiệu $a^{p/q}$ được sử dụng phổ biến và số mũ p/q bắt đầu được xem như một lôgarit. Diễn đạt bằng kí hiệu hiện đại, điều này có nghĩa là $p/q = \log_a(a^{p/q})$.

Năm 1676, Newton (1643-1727) gửi cho Leibniz (1646-1716) hai bức thư (*Epistola prior* và *Epistola posterior*) qua trung gian của Henry Oldenburg (1618-1677). Trong bức thư đầu, Newton khai triển một nhị thức với số mũ là một phân thức hữu tỉ chứa chữ, cụ thể là biểu thức $(P + PQ)^{m/n}$. Trong bức thư thứ hai, Newton đề cập đến các lũy thừa với số mũ vô tỉ, cụ thể là $x^{\sqrt{2}} + x^{\sqrt{7}}$. Tuy nhiên, ông không nói đến định nghĩa hay cách tính (dù chỉ là gần đúng) hai lũy thừa với số mũ vô tỉ này.

Năm 1678, Leibniz lần đầu tiên sử dụng kí hiệu x^y nhưng không giải thích ý nghĩa. Năm 1679, ông thổ lộ với Huygens về những khó khăn khi giải phương trình $x^x - x = 24$. Trong những bức thư trao đổi với Huygens từ 1690 đến 1691, Leibniz cho rằng các biểu thức mũ không có gì tối nghĩa. Ông liên kết chúng một cách tường minh với lôgarit tự nhiên bằng biểu thức $\ln\left(\frac{1+v}{1-v}\right) = t \Leftrightarrow \frac{1+v}{1-v} = b^t$ với b là “một đại lượng không đổi có lôgarit tự nhiên bằng 1”. Đây cũng là lần xuất hiện tường minh đầu tiên của cơ số của lôgarit tự nhiên mà sau này (1728) Euler (1707-1783) kí hiệu là *e*.

Năm 1694, Jean Bernoulli (1667-1748) và Leibniz khảo sát hàm số $y = x^x$ và xác định các tiếp tuyến của đồ thị hàm số. Năm 1697, Jean Bernoulli khảo sát các hàm số $y = a^x$ trong tác phẩm *Principia calculi exponentialium seu percurrentium*.

Trong *Introductio in Analysin infinitorum* (Nhập môn giải tích vô hạn) xuất bản năm 1748, Euler định nghĩa hàm mũ với số mũ phức bằng công thức $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ với *x* là số thực tùy ý. Công thức này mở rộng được cho *x* là số phức bất kì.

Năm 1867, Edmond Laguerre (1834-1886) đưa ra định nghĩa biểu thức mũ với số mũ là một ma trận: $e^A = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} A^k$ với *A* là ma trận vuông các số phức.

2.4. Những đặc trưng tri thức luận của khái niệm hàm số mũ

Các bảng lôgarit ra đời vào đầu thế kỉ XVII do nhu cầu đơn giản hóa các phép tính lượng giác.

Khái niệm lôgarit tự nhiên ra đời vào giữa thế kỉ XVII từ việc tính “diện tích dưới hypebol”.

Cuối thế kỉ XVII, nhu cầu biểu diễn mối liên hệ giữa lôgarit tự nhiên và biểu thức mũ dẫn đến việc định nghĩa *e* là hằng số có lôgarit tự nhiên bằng 1. Đến thế kỉ XVIII và XIX, bản chất vô tỉ và siêu việt của *e* mới được phát hiện. Điều này có nhiều nguyên nhân mà một trong số đó là những vấn đề tinh tế về giới hạn và xây dựng tập số thực. Thật vậy, định nghĩa hình thức về giới hạn chỉ được Karl Weierstrass (1815-1897) phát biểu vào năm 1850. Tập **R** được Cantor (1845-1918) xây dựng vào năm 1872 nhờ lớp tương đương các dãy Cauchy trong **Q**. Cũng trong năm này, Dedekind (1831-1916) công bố cách xây dựng tập **R** bằng các nhát cắt.

Việc mở rộng khái niệm lũy thừa là một quá trình dài bắt đầu từ thời Babylon cổ đại và chỉ hoàn thành vào cuối thế kỉ XIX. Nó không tiến triển một cách đơn giản theo thời gian mà có những thời điểm lặp đi, lặp lại. Trước cả lũy thừa với số mũ 0 và nguyên âm, lũy thừa với số mũ hữu tỉ dương xuất hiện sớm từ những bài toán thực tế. Lũy thừa với số mũ vô tỉ xuất hiện trễ hơn và được sử dụng trước khi có định nghĩa tường minh.

Vì vậy, Leibniz phải giải thích ý nghĩa của biểu thức mũ thông qua lôgarit tự nhiên xuất hiện trước đó. Các hàm số mũ của Jean Bernoulli gắn liền với bài toán tiếp tuyến (tức đạo hàm) trước khi định nghĩa lũy thừa với số mũ vô tỉ bằng giới hạn ra đời vào thế kỉ XIX:

Lũy thừa a^α (với $a > 0$ và α vô tỉ) là giới hạn chung của tất cả các dãy $\left(a^{r_n}\right)$ và $\left(a^{s_n}\right)$ với (r_n) và (s_n) là hai dãy hữu tỉ hội tụ tăng và hội tụ giảm đến α. Các cơ sở toán học của định nghĩa này là khái niệm giới hạn và nguyên lí Cantor về dãy các đoạn lồng vào nhau và thắt lại:

Nếu $[a_n, b_n]$ là dãy các đoạn thỏa $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ với mọi n và $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n)$ = 0 thì tồn tại duy nhất một số thực α thỏa $\alpha \in \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty}[a_n, b_n]$.

Bài toán lãi suất kép của người Babylon là một mô hình mang lại ý nghĩa thực tiễn cho khái niệm lũy thừa với số mũ hữu tỉ dương. Tương tự, bài toán lãi suất kép của Jacques Bernoulli mang lại ý nghĩa thực tiễn cho số *e*.

3. Kết luận

Hai tiến trình khác nhau về xây dựng khái niệm hàm mũ ở Việt Nam và Pháp là hai minh họa cho khái niệm *chuyển hóa didactic* được Chevallard phát triển năm 1989: Một tri thức toán học để có thể dạy được trong một thể chế dạy học nào đó phải chịu những biến đổi nhất định từ những người soạn chương trình và sách giáo khoa.

Ở Việt Nam, hàm số mũ được định nghĩa dựa vào sự mở rộng khái niệm lũy thừa. Để tránh những trở ngại về lũy thừa với số mũ vô tỉ, sách *Giải tích 12 nâng cao* đã phát biểu và chấp nhận một kết quả tương đương với nguyên lí Cantor về dãy các đoạn lồng vào nhau và thắt lại nhưng phù hợp hơn với cấu trúc chương trình. Đây chính là cách tiếp cận của toán học thế kỉ XIX.

Ở Pháp, những người soạn chương trình và sách giáo khoa đã định nghĩa hàm số mũ bằng phương trình vi phân. Sau đó, sách giáo khoa phát biểu và chứng minh một số tính chất đại số và giải tích của hàm mũ. Các tính chất này giúp học sinh Pháp có thể nhận ra mối liên hệ giữa giá trị của hàm mũ và giá trị của lũy thừa mở rộng. Cách tiếp cận này chịu ảnh hưởng của toán học thế kỉ XVII.

Bài báo này cũng đặt ra những câu hỏi mới về tác động của *chuyển hóa didactic* khái niệm hàm số mũ lên giáo viên và học sinh ở Việt Nam và Pháp mà chúng tôi hi vọng sẽ có dịp đề cập trong một bài viết khác./.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Bộ Giáo dục và Đào tạo (2008), *Giải tích 12 nâng cao*, Nxb Giáo dục.
2. Nguyễn Hữu Lợi (2008), *Khái niệm hàm số mũ ở trường trung học phổ thông*, Luận văn Thạc sĩ chuyên ngành Phương pháp giảng dạy Toán, Trường Đại học Sư phạm TP Hồ Chí Minh.
3. A. Dahan-Dalmedico, Peiffer J. (1986), *Une histoire des mathématiques – Routes et dédales*, Édition du Seuil.
4. Bernoulli J., *Basileensis opera,* tome 1, p. 429 dẫn theo A. Dahan-Dalmedico, Peiffer J. (1986), *Une histoire des mathématiques – Routes et dédales*, Édition du Seuil.
5. Cajori F. (1913), "History of exponential and logarithmic concepts", *The American Mathematical Monthly,* vol. 20, no. 1, jan. 1913, pp. 5-14, Mathematical Association of America.

6. Cajori F. (1928), *A History of mathematical notations*, pp. 350, pp. 355, The Open Court Company, London.
7. Coolidge J. L. (1950), The Number e, *Amer. Math. Monthly*, vol. 57, no 9, november 1950, pp. 591-602.
8. Kouteynikoff O. (2006), "Inventions de nombres : calculs ou résolution ?", *Histoires de logarithmes*, pp. 23, pp. 29-33, Ellipses, Paris.
9. Lardic J-M. (1999), *L'infini entre science et religion au XVIIe siècle*, pp. 123-126, Librairie philosophique J. Vrin, Paris.
10. Legoff J-P. (1989), De la méthode dite d'exhaustion: Grégoire de Saint-Vincent (1584 - 1667), *La Démonstration mathématique dans l'histoire*, IREM de Lyon, 1989, pp. 215.
11. Merzbach U. C, Boyer C. B. (2011), *A History of mathematics*, pp. 27, pp. 238, Wiley, New Jersey.
12. Ministère de l'éducation nationale (2015), *Programmes du cycle terminal de la voie générale*, Paris.

(Ngày Tòa soạn nhận được bài: 11-11-2015; ngày phản biện đánh giá: 13-01-2016; ngày chấp nhận đăng: 24-4-2016)