TẠP CHÍ KHOA HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE

ISSN: 2734-9918

Tập 20, Số 10 (2023): 1718-1731

Vol. 20, No. 10 (2023): 1718-1731

Website: https://journal.hcmue.edu.vn

https://doi.org/10.54607/hcmue.js.20.10.3908(2023)

Bài báo nghiên cứu

MỘT NGHIÊN CỨU TRI THỨC LUẬN LỊCH SỬ HỆ THỐNG BIỂU TƯỢNG ĐẠI SỐ

Nguyễn Ái Quốc
Trường Đại học Sài Gòn, Việt Nam
Tác giả liên hệ: Nguyễn Ái Quốc – Email: naquoc@sgu.edu.vn
Ngày nhận bài: 10-8-2023; ngày nhận bài sửa: 01-10-2023; ngày duyệt đăng: 05-10-2023

TÓM TẮT

Bài báo này trình bày một phân tích tri thức luận lịch sử, làm rõ quá trình hình thành và phát triển của hệ thống biểu tượng đại số; xác định các quan niệm ảnh hưởng lên quá trình phát triển và các đặc trưng tri thức luận của hệ thống biểu tượng đại số. Kết quả phân tích tri thức luận lịch sử cho thấy, hệ thống biểu tượng đại số phát triển trong ba giai đoạn đan xen với nhau là đại số tu từ hay văn xuôi, đại số rút gọn, và đại số biểu tượng. Ngoài ra, có ba quan niệm đã ảnh hưởng mạnh mẽ lên quá trình hình thành và phát triển của hệ thống biểu tượng đại số là quan niệm hình học, quan niệm số học, và quan niệm truyền bá toán học. Kết quả nghiên cứu góp phần cho phân tích tri thức luận lịch sử toán học và làm cơ sở cho các nghiên cứu về những trở ngại của học sinh khi tiếp cận hệ thống biểu tượng đại số.

Từ khóa: biểu tượng đại số; đặc trưng tri thức luận; đại số tu từ; đại số rút gọn; đại số biểu tượng

1. Giới thiệu

Theo Từ điển Cambrigde, biểu tượng là một kí hiệu, hình dạng, hoặc vật được sử dụng để đại diện cho một cái gì đó khác; là một cái gì đó được sử dụng để đại diện cho một chất lượng hoặc ý tưởng; là một số, chữ cái hoặc kí hiệu được sử dụng trong toán học, âm nhạc, khoa học.

Theo Từ điển Britanica, biểu tượng là một chữ cái, nhóm chữ cái, kí tự hoặc hình ảnh được sử dụng thay cho một từ hoặc nhóm từ.

Các biểu tượng toán học có thể được sử dụng để thể hiện các mối liên hệ giữa các đại lượng vì chúng là các biểu diễn linh hoạt của các lí thuyết, ý tưởng và các con số. Chúng hoạt động như một ngôn ngữ toán học phổ quát có thể áp dụng cho các đối tượng toán học khác nhau như phương trình, bất phương trình, biểu thức, hệ thức.

Các biểu tượng toán học là ngôn ngữ thể hiện các tình huống-vấn đề và các giải pháp (Godino et al., 2007). Các biểu tượng toán học có chức năng giao tiếp và vai trò công cụ

Cite this article as: Nguyen Ai Quoc (2023). A historical–epistemological analysis of the algebraic symbolic system. *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science, 20*(10), 1718-1731.

(Maracchia, 2013). Chúng đóng một vai trò quan trọng trong việc học toán của học sinh như biểu diễn các khái niệm, phép toán, biểu thức hoặc phương trình (Maharaj, 2008). Các biểu tượng toán học cho phép trao đổi và chia sẻ bản chất của tư duy toán học (Güçler, 2014). Tuy nhiên, cách biểu tượng được sử dụng để hỗ trợ sự phát triển của các khái niệm là một vấn đề. Việc xử lí các con số và đại số đặt ra cho học sinh những thách thức về mặt kí hiệu học vì các biểu tượng đóng vai trò đồng thời vừa là quá trình vừa là khái niệm (Tall, 2008).

Học sinh gặp khó khăn trong việc hiểu ý nghĩa của các biểu tượng nếu điều mà biểu tượng ám chỉ không thể hiện tốt ý nghĩa toán học hoặc nếu mối liên hệ giữa điều đó và biểu tượng bằng văn bản không phù hợp (Kiziltoprak & Köse, 2017). Học sinh gặp khó khăn trong việc xây dựng ý nghĩa cho chúng bởi vì họ rút ra ý nghĩa của các biểu tượng từ việc kết nối với các hình thức thể hiện khác như đồ vật, tranh ảnh hoặc ngôn ngữ nói (Yetkin, 2003). Khó khăn trong việc hiểu các biểu tượng xuất phát từ thực tế là các biểu tượng mang những ý nghĩa khác nhau trong các bối cảnh và ngữ cảnh khác nhau. Adams (2003) lưu ý rằng học sinh không nhận thức được ý nghĩa của các biểu tượng toán học trong các bối cảnh vấn đề khác nhau. Bardini và Pierce (2015) tuyên bố rằng học sinh không thông thạo với nhiều ý nghĩa của các biểu tượng toán học và ngữ cảnh trong đó chúng được sử dụng.

Hệ thống biểu tượng đại số trong chương trình toán phổ thông là các dạng kí hiệu ngắn gọn và chính xác được chấp nhận tại tất cả các quốc gia… Ngày nay, toán học ở trường phổ thông không có kí hiệu sẽ là điều không tưởng tượng được. Toán học phổ thông sử dụng rất nhiều dấu cộng, dấu trừ, dấu chia, chữ cái, dấu ngoặc, số mũ, dấu căn, dấu bằng, kí hiệu logarit và nhiều kí hiệu khác (Stols, 2011, p.255). Hệ thống biểu tượng rất quan trọng trong toán học, đặc biệt là trong đại số và lịch sử đại số. Đại số được định nghĩa là "nhánh toán học xử lí biểu tượng hóa các mối quan hệ số và cấu trúc toán tổng quát và thao tác trên các cấu trúc đó" (Kieran, 1992, p.391).

Tuy nhiên, học sinh thường gặp vấn đề với việc sử dụng hệ thống biểu tượng (Tall et al., 2001). Một số học sinh coi đại số là một lĩnh vực khá khó để thử sức (Cunningham, 1986). Nhưng mặt khác, Blackhouse cho rằng sức mạnh của toán học nằm ở việc sử dụng các biểu tượng. Ông cũng nói: "Với hệ thống biểu tượng nghèo nàn về số học, người Hi Lạp cổ đại đã đạt được rất ít tiến bộ về số học và đại số mặc dù việc nghiên cứu hình học của họ phát triển mạnh mẽ" (Blackhouse et al., 1992, p.114)

Theo Nataraj và Thomas (2012), học sinh biết rằng đại số là "liên quan đến các chữ cái", nhưng nghiên cứu đã chứng tỏ nhiều học sinh hiểu rất ít về ý nghĩa của các chữ cái và lí do chúng được sử dụng (Graham & Thomas, 2000; Kieran, 1992; Küchemann, 1981; MacGregor & Stacey, 1997). Đặc biệt, khái niệm về biến số vẫn chưa được hiểu rõ mặc dù nó là nền tảng trong quá trình chuyển đổi từ số học sang đại số và là trung tâm của toán học cao cấp (Schoenfeld & Arcavi, 1988). Từ dự án nghiên cứu *Concepts in Secondary Mathematics and Science*, Küchemann (1981) kết luận rằng nhiều học sinh xem các chữ cái như các phần giữ chỗ cho các con số, và phần lớn trong số 30-40% học sinh đó đã xem chữ cái là ẩn số cụ thể hơn là biến số hoặc là số được khái quát hóa. Nghiên cứu của MacGregor và Stacey (1997) đã chỉ ra một lỗi về đại số khác mà học sinh dễ mắc phải là việc sử dụng sai kí hiệu hàm mũ; chẳng hạn như viết $3x$ thay cho x^3.

Sfard (1995) khẳng định rằng nghiên cứu lịch sử cung cấp cho chúng ta cơ hội để hiểu những khó khăn của học sinh và cả những cách để vượt qua những khó khăn đó.

Trước nhiều khó khăn mà học sinh gặp phải khi học toán, trong những năm gần đây, một số nhà nghiên cứu đã cố gắng phân tích lịch sử toán học để cung cấp thông tin cho thực tiễn giảng dạy (Nataraj & Thomas, 2012). Các nhà giáo dục đã khẳng định rằng lịch sử toán học là một nguồn tài nguyên tuyệt vời cho việc giảng dạy và có thể mang lại lợi ích to lớn trong việc nâng cao hiểu biết về toán học (Fauvel & van Maanen, 2000).

2. Phương pháp nghiên cứu

Nghiên cứu tri thức luận

Theo Lê Thị Hoài Châu (2017), nghiên cứu tri thức luận là nghiên cứu lịch sử hình thành tri thức nhằm làm rõ:

- nghĩa của tri thức, những bài toán, những vấn đề mà tri thức đó cho phép giải quyết;
- những trở ngại cho sự hình thành tri thức;
- những điều kiện sản sinh ra tri thức, những bước nhảy cần thiết trong quan niệm để thúc đẩy quá trình hình thành và phát triển tri thức. (Le, 2017)

Một nghiên cứu tri thức luận lịch sử hệ thống biểu tượng đại số nhằm xác định nguyên nhân và các quan niệm ảnh hưởng lên quá trình hình thành và phát triển; các đặc trưng tri thức luận của hệ thống biểu tượng đại số, cho phép làm cơ sở cho phân tích các sai lầm của người học khi tiếp cận đại số theo quan điểm didactic toán. Đó cũng là mục đích của nghiên cứu trình bày trong bài viết này.

3. Kết quả và thảo luận

3.1. Tổng quan ba giai đoạn phát triển của hệ thống biểu tượng đại số

Theo Stallings (2000), hệ thống biểu tượng của đại số phát triển qua ba giai đoạn chính: tu từ/văn xuôi (rhetorical/prose), rút gọn (syncopated[2]), và biểu tượng (symbolic).

Giai đoạn đại số tu từ/ văn xuôi là giai đoạn mà tất cả các phát biểu và lập luận toán học đều được thể hiện bằng từ và câu. Trong giai đoạn đại số rút gọn, một số chữ viết tắt được sử dụng khi xử lí các biểu thức đại số. Cuối cùng, trong giai đoạn đại số biểu tượng, có sự diễn đạt tất cả bằng biểu tượng: tất cả các con số, phép toán, mối quan hệ được thể hiện thông qua một tập hợp các biểu tượng dễ nhận biết và các thao tác trên các biểu tượng diễn ra theo các quy tắc đã được hiểu rõ (Katz & Barton, 2007). Tuy nhiên, ba giai đoạn trên diễn ra theo cách chồng chéo lên nhau giữa các châu lục do sự truyền bá toán học không đầy đủ được thực hiện qua các hoạt động thương mại và truyền bá toán học.

Theo Katz và Barton (2007), Stallings (2000), đại số bắt đầu tại vùng Lưỡng Hà vào khoảng năm 2000 TCN và phát triển ở Babylon và Ai Cập vào khoảng năm 1700 TCN.

[2] Theo từ điển Merriam-Webster, syncopated nghĩa là rút gọn, viết tắt.

Các ví dụ về đại số tu từ của al-Khwārizmī được sử dụng để minh họa những khó khăn tiềm ẩn phát sinh khi giải các bài toán đại số bằng cách sử dụng các từ không có kí hiệu. Nhà toán học Hi Lạp Diophantus là một trong những người tiên phong của đại số rút gọn. Trong giai đoạn này, một số tốc kí đã được sử dụng cùng với văn xuôi. Các nhà toán học Ấn Độ đã phát triển một hệ thống biểu tượng đại số rút gọn độc lập với Diophantus. Khoảng năm 1500 TCN, đại số biểu tượng bắt đầu phát triển. Quá trình phát triển của một hệ thống biểu tượng chuẩn hóa, hiệu quả được minh họa bằng cách theo dõi quá trình phát triển của một số biểu tượng phổ biến, bao gồm các biểu tượng cho sự bằng nhau, cộng, trừ, nhân và chia (Stallings, 2000).

Nhưng theo Katz & Barton (2007), bên cạnh ba giai đoạn biểu đạt các ý tưởng đại số này, còn có bốn giai đoạn quan niệm khác đã xảy ra cùng với những thay đổi trong các biểu đạt đại số đó. Các giai đoạn này là giai đoạn hình học, trong đó hầu hết các khái niệm đại số là khái niệm hình học; giai đoạn giải phương trình tĩnh, trong đó mục tiêu là tìm các số thỏa mãn các hệ thức nào đó; giai đoạn chức năng động lực, trong đó chuyển động dường như là một ý tưởng cơ bản, và cuối cùng, giai đoạn trừu tượng, trong đó cấu trúc toán học đóng vai trò trung tâm. Đương nhiên, cả bốn giai đoạn này và ba giai đoạn trước đều không tách biệt với nhau; luôn luôn có một số chồng chéo và đan xen.

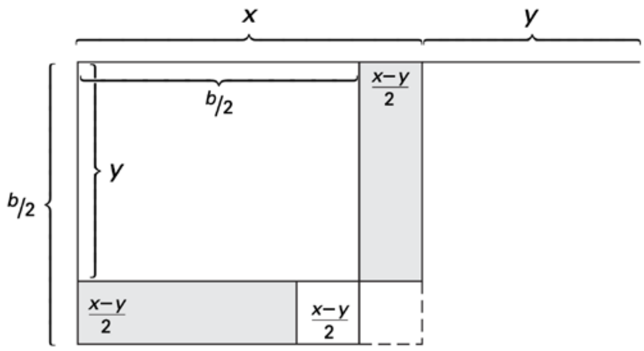
3.2. Đại số tu từ hay văn xuôi (2000 TCN – 250 SCN)

Đại số tu từ là giai đoạn mà các ý tưởng, lập luận đại số được thể hiện bằng lời văn và không sử dụng biểu tượng toán học. Chẳng hạn đại số Babylon và đại số Ai Cập thời kì đầu đều là đại số tu từ (Baumgart, 1969). Theo Katz & Barton (2007), bài toán trên phiến đá YBC 4663 (1800 TCN) yêu cầu tìm chiều dài và chiều rộng của một mảnh đất hình chữ nhật, biết rằng tổng chiều dài và chiều rộng là 6 ½, và diện tích của hình chữ nhật là 7 ½ (Neugebauer and Sachs, 1945, p.70). Scribe[3] mô tả chi tiết các bước giải bài toán. Trước tiên, chia đôi 6 ½ được 3 ¼ , bình phương 3 ¼ được $10\,\frac{9}{16}$ và trừ đi diện tích 7 ½ được $3\,\frac{1}{16}$. Rút căn bậc hai của số này được 1 ¾. Sau cùng, scribe ghi chú rằng chiều dài là 3 ¼ + 1 ¾ = 5, và chiều rộng là 3 ¼ - 1 ¾ = 1 ½ .

Theo Katz & Barton (2007), scribe đang xử lí một quy trình hình học. Trên thực tế, việc đọc kĩ từ ngữ khắc trên phiến đá cho thấy rằng scribe đã nghĩ đến hình chữ nhật, trong đó do tính tổng quát (vì có nhiều bài toán tương tự được giải theo cùng một cách), các cạnh đã được dán nhãn phù hợp với hệ phương trình tổng quát mà ngày nay chúng ta viết là $x + y = b$, $xy = c$. Scribe bắt đầu bằng việc chia đôi tổng b và sau đó dựng một hình vuông cạnh $b/2$ (hình 1). Vì $b/2 = x – (x – y)/2 = y + (x – y)/2$, hình vuông cạnh $b/2$ bằng hình chữ nhật ban đầu có diện tích c cộng thêm hình vuông cạnh $(x – y)/2$; tức là $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = xy + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$. Hình vẽ cho thấy rằng nếu thêm cạnh $\sqrt{(b/2)^2 - c}$ của hình vuông nhỏ vào $b/2$ thì được chiều dài x, trong khi trừ $b/2$ cho cạnh này thì được chiều rộng y. Do

[3] Scribe là người tạo ra các văn bản sao của các tài liệu trước khi máy in được phát minh ra.

đó, thuật toán có thể biểu đạt dưới dạng $x = b/2 + \sqrt{(b/2)^2 - c}$; $y = b/2 - \sqrt{(b/2)^2 - c}$. (Katz, 2009, p.23)



Hình 1. *Quy trình hình học của người Babylon* (Katz, 2009)

Katz và Barton (2007) nhấn mạnh rằng các công thức trên là công thức hiện đại, và người Babylon không khắc bất cứ điều gì tương tự trên phiến đá của họ. Những gì người Babylon mô tả hoàn toàn bằng lời là một quy trình, một thuật toán, và người Babylon chắc chắn đang ở giai đoạn đại số tu từ.

Cuốn sách đại số đầu tiên của al-Khwārizmī vào năm 825 có trình bày một số bài toán liên quan đến phép nhân các nhị thức được viết bằng đại số tu từ, chẳng hạn như bài toán: "Mười và cái được nhân với cái giảm đi mười."

Ngày nay, học sinh sẽ viết lại bài toán bằng biểu tượng toán học như sau:

$(x + 10)(x - 10) = x^2 - 100$.

Bài giải của bài toán trên được dịch như sau:

"Mười và cái được nhân với cái giảm đi mười" có nghĩa là cái và mười nhân với cái trừ đi mười. Do đó, cái nhân với cái là một số dương bình phương; và mười nhân với cái là mười cái dương; và trừ mười nhân với cái là mười cái âm. Bây giờ loại bỏ mười cái dương và mười cái âm, thì chỉ còn một bình phương. Trừ mười nhân với mười là một trăm, được trừ đi từ bình phương. Do đó, nhìn chung, đây là một bình phương giảm một trăm... (Nelson, 1993, p.33).

Một số khó khăn gặp phải khi đọc bài toán đó trong thời kì đại số tu từ cho thấy tại sao các nhà toán học tiếp tục viết tắt và hoàn thiện kí hiệu của họ (Stallings, 2000, p.231).

Ở Hi Lạp, từ ngữ là hình học. Ví dụ, *xyz* sẽ được gọi là "hình khối có các cạnh là các đại lượng chưa biết thứ nhất, thứ hai và thứ ba" (Nelson, 1993, p.33). Một lí do khả dĩ cho việc họ sử dụng các diễn giải hình học là do những khó khăn về khái niệm của người Hi Lạp với phân số và số vô tỉ, chẳng hạn như cú sốc của các học giả Pythagore khi khám phá ra các số vô tỉ mà đối với họ là phản trực giác. Mặc dù người Hi Lạp thấy khó chấp nhận $\sqrt{2}$, nhưng họ có thể chấp nhận rằng $\sqrt{2}$ có thể là độ dài đường chéo của một hình vuông có cạnh bằng 1 (Baumgart, 1969). Một diễn giải khả dĩ khác do Gullberg (1997) đề xuất là "hệ thống kí hiệu số của Hi Lạp, sử dụng các chữ cái trong bảng chữ cái của họ đôi khi được viết theo vài tầng, và rải rác các dấu trọng âm, dấu nháy đơn và các dấu phụ khác" (p.298).

Như vậy, hệ thống biểu tượng đại số trong giai đoạn tu từ chưa được hình thành và manh nha việc sử dụng tốc kí để diễn đạt các lập luận toán học dựa trên cơ sở hình học. Chính vì thế, đặc trưng tri thức luận của hệ thống biểu tượng đại số ở dạng sơ khai trong giai đoạn tu từ là đặc trưng tu từ, quy trình hình học.

3.3. Đại số rút gọn (250-1500)

Đại số tu từ kéo dài trong vài thế kỉ cho đến khi Diophantus của Alexander (khoảng năm 250) đi tiên phong trong đại số rút gọn (Nelson, 1993). Sự phát triển của đại số trong giai đoạn tiếp theo này sử dụng một số cách viết tốc kí, rút gọn hoặc viết tắt, rất hữu ích với các lũy thừa lên đến bậc sáu và nghịch đảo của chúng. Ở hầu hết các nơi trên thế giới, ngoại trừ Hi Lạp và Ấn Độ, đại số tu từ đã tồn tại trong một thời gian dài hơn; chẳng hạn, Tây Âu đã sử dụng nó cho đến thế kỉ XV (Eves, 1983).

Biểu tượng cho ẩn số, số hạng, lũy thừa của Diophantus

Đại số rút gọn được sử dụng lần đầu tiên trong công trình *Arithmetica* (Số học) của Diophantus, là cuốn sách có ảnh hưởng to lớn đến đại số và lí thuyết số (Struik, 1967). Từ *arithmetica* có nguồn gốc từ tiếng Hi Lạp *arithmetike*, được thạo thành từ các từ Hi Lạp: *arithmos* có nghĩa là số, và *techne* có nghĩa là khoa học. Tác phẩm *Arithmetica* chứa đựng các lời giải, lập luận đại số… được viết bằng những từ ngữ viết tắt giúp chuyển cách kí hiệu đại số mang tính tu từ sang rút gọn, điều này gây ảnh hưởng lên sự phát triển của một số biểu tượng đại số mang tính cá nhân (Eves, 1983). Đây là thời điểm bắt đầu của giai đoạn đại số rút gọn, là giai đoạn mà các biểu tượng toán học được diễn tả bằng từ ngữ viết tắt, do đó gọi tắt đại số trong giai đoạn này là đại số rút gọn hoặc đại số mang tính rút gọn, kéo dài từ lúc tác phẩm *Arithmetica* của Diophantus ra đời tới đại số châu Âu cho đến giữa thế kỉ XVII, và như vậy đại số rút gọn đã được sử dụng trong thời kì của các nhà toán học: Viète, Descartes và van Schooten. Bảng 1 cho thấy một số ví dụ về đại số rút gọn của Diophantus sử dụng hệ mật mã Hi Lạp cho các chữ số.

Bảng 1. *Một số ví dụ về đại số rút gọn của Diophantuc trong Arithmetica (Nelson, 1993)*

Biểu tượng (giai đoạn đại số rút gọn)	ς	Δ^{Υ}	K^{Υ}	$\wedge$	$\overset{\mathrm{o}}{\mathrm{M}}$	$\mathrm{K}^{\Upsilon}\alpha\Delta^{\Upsilon}\delta\varsigma\beta$	$\Delta^{\Upsilon}\varepsilon\wedge\varsigma\Upsilon M\iota$
Biểu tượng hiện đại	x	x^2	x^3	$-$	Số hạng không đổi	x^3+4x^2+2x	$5x^2-(3x+10)$

Theo (Eves, 1983; Nelson, 1993), các nhà sử học đã tìm ra lời giải thích cho nhiều lựa chọn biểu tượng của Diophantus:

- Biểu tượng ẩn số của Diophantus có thể là sự kết hợp của hai chữ cái Hi Lạp đầu tiên α và β, mặc dù theo thời gian nó giống với chữ ς của Hi Lạp.
- Biểu tượng Δ^{Υ} cho một ẩn số được bình phương có nguồn gốc từ hai chữ cái đầu tiên của từ Hi Lạp "lũy thừa" (*dunamis* hoặc $\Delta\Upsilon NAMI\Sigma$).
- Biểu tượng K^{Υ} cho một ẩn số được lập phương có nguồn gốc từ các chữ cái của "lập phương" (*kubos* hoặc $\mathrm{K}\Upsilon\mathrm{BO}\Sigma$). Các biểu thức như $\Delta^{\Upsilon}\Delta$ (bình phương bình phương), $\Delta\mathrm{K}^{\Upsilon}$

(bình phương lập phương) và $K^{Y}K$ (lập phương lập phương) được rút ra từ các biểu tượng trên.

- Dấu được sử dụng cho dấu trừ là sự kết hợp của hai chữ cái đầu tiên của từ "thiếu" (*leipis* hoặc ΛΕΙΨΙΣ).
- Kí hiệu cho hằng số là chữ viết tắt của từ Hi Lạp cho "các đơn vị" (*monades* hoặc ΜΟΝΑΔΕΣ).

Theo (Nelson, 1993), ngoài ra còn có một số quy ước cơ bản khác mà Diophantus đã sử dụng như sau:

- Các số hạng âm được nhóm lại sau dấu trừ.
- Các số hạng đứng kề nhau phải được cộng lại với nhau.
- Khi một số bằng chữ Hi Lạp theo sau biểu tượng lũy thừa, thì chính là ẩn số được nâng lên theo lũy thừa đó.

Biểu tượng cho ẩn số, số hạng, lũy thừa của của Aryabhata và Baarahmagupta

Aryabhata và Brahmagupta được xem là những nhà toán học có cống hiến quan trọng cho toán học Ấn Độ. Ở Ấn Độ, Aryabhata (khoảng năm 475-550) và Brahmagupta (khoảng năm 598-665) cũng đã phát triển một đại số rút gọn. Mặc dù, rất ít tài liệu đề cập đến toán học Ấn Độ và Ả Rập vào trước thế kỉ IV hoặc thế kỉ V nhưng đã xuất hiện một vài biểu tượng cho các ẩn số thay thế cho một số lượng lớn biểu tượng có trong bản giấy cói Rhind (Boyer, 1991).

Những khám phá khác của các nhà toán học Ấn Độ và Ả Rập bao gồm giải phương trình bậc hai bằng cách cắt – dán và hoàn thành một hình vuông, đã nhận ra sự tồn tại nghiệm âm và nghiệm vô tỉ, và phát hiện ra rằng phương trình bậc hai có hai nghiệm (Boyer, 1991).

Theo (Cajori, 1993, p.75), trong các công trình của Aryabhata và Baarahmagupta, *ru* (có nguồn gốc từ *rupa*) biểu thị số tuyệt đối, *ya* (có nguồn gốc từ *yavat tavat*) biểu thị cho ẩn số chính, và tên của các màu sắc được sử dụng cho các ẩn số khác, chẳng hạn *ka* (có nguồn gốc từ *kalaka*) có nghĩa là màu đen, biểu thị ẩn số thứ hai; *ni* (có nguồn gốc từ *nilaka*) có nghĩa là màu xanh dương, biểu thị ẩn số thứ ba, *pi* (có nguồn gốc từ *pitaka*) có nghĩa là màu vàng, biểu thị cho ẩn thứ tư (Bảng 2).

Bảng 2. *Một số ví dụ về đại số rút gọn của Aryabhata và Brahmagupta (Nelson, 1003)*

Biểu tượng	*bha*	$y\bar{a}$	$k\bar{a}$	ka	$\dot{n}$	$r\bar{u}$	$y\bar{a}\ k\bar{a}\ 6\ bha$	$ka\ 5\ r\bar{u}\ 2$
Diễn dịch hiện đại	tích	x	y	□	$-n$	số nguyên	6*xy*	$\sqrt{5}$ - 2

Trở ngại đối với các nhà toán học Hồi giáo trong nghiên cứu hàm số

Trong vài thế kỉ tiếp theo, các nhà toán học Hồi giáo đã đưa ra nhiều ý tưởng khác nhau về đại số. Họ đã phát triển tất cả các quy trình của đại số đa thức, bao gồm các quy tắc về số mũ, cả dương và âm, và các quy trình chia cũng như nhân các đa thức.

Sharaf al-Din al-Tusi, một nhà toán học người Ba Tư, nghiên cứu cách giải phương trình bậc ba $x^3 + d = bx^2$. Ông đưa phương trình về dạng $x^2(b - x) = d$, và đặt vấn đề liệu rằng phương trình có nghiệm hay không phụ thuộc vào việc "hàm số" ở vế trái có đạt đến giá trị d hay không. Mặc dù, ông không cho biết đã làm như thế nào, nhưng tuyên bố và chứng minh rằng giá trị lớn nhất của hàm số bằng $4b^3/27$, xảy ra khi $x = 2b/3$. Do đó, Sharaf tuyên bố rằng nếu giá trị này nhỏ hơn d, thì phương trình không có nghiệm (dương); nếu nó bằng d thì có một nghiệm tại $x = 2b/3$ và nếu nó lớn hơn d thì có hai nghiệm, một nghiệm nằm giữa 0 và $2b/3$ và nghiệm còn lại nằm giữa $2b/3$ và b.

Tuy nhiên, Sharaf vẫn không thể tìm ra một thuật toán để xác định các nghiệm này, nhưng ít nhất ông cũng biết các điều kiện cơ bản về việc liệu các nghiệm đó có tồn tại hay không. Thật không may, nghiên cứu của ông đã không được tiếp tục ở cả các nước Hồi giáo và châu Âu. Vì vậy, nỗ lực chuyển sang "hàm số" cuối cùng không đi đến đâu. Có lẽ một trong những lí do là Sharaf không sử dụng kí hiệu nào và việc xử lí các hàm số không có kí hiệu là rất khó khăn (Katz, 2007, p.192).

Như vậy, sự cần thiết đơn giản hóa các văn bản toán học, kí hiệu toán học không chứa số hoặc hệ mật mã của Hi Lạp, Ấn Độ, và Ả Rập từ giấy cói sang giấy thông thường để truyền đạt toán học sang châu Âu là nguyên nhân thúc đẩy sự ra đời của đại số rút gọn. Đặc trưng tri thức luận của hệ thống biểu tượng trong thời kì này là tốc kí, mật mã Hi Lạp, và màu sắc.

3.4. *Đại số biểu tượng (1500 – hiện nay)*

Đại số biểu tượng là giai đoạn phát triển tiếp theo của hệ thống biểu tượng đại số sau giai đoạn đại số rút gọn và được duy trì tới hiện nay. Đây được xem là giai đoạn phát triển mạnh nhất của hệ thống biểu tượng đại số, bắt nguồn từ việc đại số châu Âu đã không hưởng lợi từ đại số rút gọn của các nhà toán học Hi Lạp và Ấn Độ vì đại số được truyền đến châu Âu là một phiên bản không đầy đủ (Baumgart, 1969).

Biểu tượng đại số được du nhập vào châu Âu bằng mọi phương tiện, có thể đến từ nhiều nguồn như công trình nghiên cứu đầu tiên của châu Âu về toán học Ấn Độ và Ả Rập, *Liber abaci*, được viết bởi nhà toán học và thương gia người Ý, Fibonacci (1175-1250) (Struik, 1967). Một yếu tố hoàn cảnh khác dẫn đến sự phát triển của đại số châu Âu là do sự trỗi dậy của đạo Mô-ha-mét giáo, những cuộc chinh phục của người Ả Rập đến các vùng đất khác đã diễn ra bao gồm luôn ở Ấn Độ, Lưỡng Hà và Bắc Phi nên người Ả Rập đã duy trì toán học Hi Lạp và Ấn Độ giáo trong suốt thời kì Trung cổ của châu Âu. Chính vì lí do đó mà đại số châu Âu dần hoàn thiện phiên bản biểu tượng không đầy đủ của mình. Thuận lợi hơn là khi các thương nhân và học giả Ả Rập truyền những ý tưởng đó ra thế giới và họ mang theo hệ thống chữ số Hindu-Ả Rập thanh lịch và nhỏ gọn mà chúng ta vẫn còn sử dụng cho đến ngày nay. Tuy nhiên, biểu tượng đại số được xem là phát triển mạnh mẽ nhất vào giai đoạn máy in ra đời và kinh tế đang phát triển. Cùng với sự phát triển mạnh mẽ đó, hệ thống chữ số Hindu-Ả Rập đã tạo tiền đề cho sự phát triển nhanh chóng của đại số biểu tượng trong khoảng thời gian từ năm 1200 đến 1300 (Baumgart, 1969).

Đại số biểu tượng là giai đoạn mà các kí hiệu đại số được biểu thị hoàn toàn bằng những biểu tượng đại số và duy trì đến ngày nay, và gọi tắt là đại số biểu tượng hay đại số mang tính biểu tượng khi xét về các giai đoạn phát triển của hệ thống biểu tượng đại số. Đại số biểu tượng bắt đầu phát triển vào khoảng năm 1500, nhưng không thay thế hoàn toàn đại số tu từ và đại số rút gọn cho đến thế kỉ XVII (Eves, 1983). Đại số biểu tượng ban đầu sử dụng vài biểu tượng; theo thời gian, các biểu tượng trở nên dễ sử dụng hơn và được chuẩn hóa hơn. Bảng 3 cho thấy một cái nhìn sơ lược về sự phát triển đó.

Bảng 3. *Một số ví dụ về các phát biểu mang tính biểu tượng cũ hơn cùng với các phiên bản hiện đại của chúng (Baumgart, 1969)*

Những nhà toán học	Biểu tượng cũ hơn	Đại số hiện đại
Cardano (1545)	Cubus p 6 rebus aequalis 20	$x^3 + 6x = 20$
Bombelli (1572)	$\overset{6}{\text{I}}$.p.$\overset{8}{8}$.Eguale à 20	$x^6 + 8x^3 = 20$
Viete (1591)	I QC - 15 QQ + 85 C - 225 Q + 274 N aequatur 120	$x^6 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x = 120$
Harriot (1631)	aaa – 3bba===+2.ccc	$x^3 - 3b^2x = 2c^3$
Descartes (1637)	$x^3 - 6xx + 13x - 10 \propto 0$	$x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$
Wallis (1693)	$x^4 + bx^3 + cxx + dx + e = 0$	$x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$

Dấu bằng của Robert Recorde (1510-1558)

Trong đại số tu từ, một số từ được sử dụng cho sự bằng nhau bao gồm *aequales*, *aequantur* (đôi khi được viết tắt là *aeq*), *esgale*, *faciunt*, *ghelijck* và *gleich* (Cajori, 1993). Dấu bằng lần đầu tiên được nhà toán học người Anh, Robert Recorde (1510-1558), sử dụng trong cuốn sách đại số The Whetstone of Witte của mình vào năm 1557, và được kí hiệu là "= =" (Baumgart, 1969). Dấu "="được chấp nhận rộng rãi khi Leibniz (1646-1716) sử dụng nó trong kí hiệu vi tích phân của mình vào cuối thế kỉ XVII (Cajori, 1993).

Dấu cộng và dấu trừ

Giấy cói Rhind (1650 TCN) chứa một trong những biểu tượng sớm nhất cho phép cộng và phép trừ; một đôi chân đi về phía trước biểu thị phép cộng và một đôi chân bước đi xa cho phép trừ (Eves, 1983). Các bản thảo bằng tiếng Đức vào cuối những năm 1400 cho thấy lần đầu tiên sử dụng các kí hiệu hiện đại cho phép cộng và trừ. Dấu "+" được cho là bắt nguồn từ *et*, trong tiếng La tin có nghĩa *và*. Không có lời giải thích về sự lựa chọn dấu "−" cho phép trừ. Johann Widman (1460-1498) lần đầu tiên sử dụng dấu "+" và "−" in năm 1489 (Eves, 1983) trong các bài toán đố về việc mua quả sung, hạt tiêu và xà phòng (Cajori, 1993).

Dấu nhân và dấu chia

William Oughtred (1574-1660) là người đầu tiên sử dụng chữ thập "×" của Thánh Andrew để chỉ phép nhân trong tác phẩm *Clavis mathematicae* năm 1631 của ông (Boyer, 1991), mặc dù chữ × trước đó đã được sử dụng cho các ý nghĩa khác nhau, bao gồm cả phép cộng, tỉ lệ và phép chia phân số (Cajori, 1993). Leibniz đã đề xuất dấu "·" cho phép nhân thay cho × (Eves, 1983).

Trong thời kì đó, kí hiệu cho phép chia "÷" lần đầu tiên được Johann Heinrich Rahn (1622-1676) sử dụng trên bản in. Việc sử dụng kí hiệu đó lan rộng sau khi tác phẩm của ông được dịch sang tiếng Anh vài năm sau đó. Các kí hiệu trước đây cho phép chia bao gồm chữ D và dấu hai chấm, cũng như viết số chia bên dưới số bị chia (giống như phân số) có hoặc không có thanh ngang ngăn cách chúng (Cajori, 1993).

Biến số và lũy thừa

Trong tác phẩm *In artem* nổi tiếng nhất của mình, Viète đã sử dụng các nguyên âm cho các ẩn số và phụ âm cho các đại lượng đã biết (Eves, 1983). Ông kí hiệu các lũy thừa a, a^2, a^3 là *A, A quadratum,* A *cubum*. Thomas Harriot (1560-1621) sau đó đã đơn giản hóa các kí hiệu lũy thừa này là *a, aa, aaa* (Cajori, 1993). Descartes được công nhận là người đầu tiên sử dụng các chữ cái đầu tiên của bảng chữ cái cho các đại lượng đã biết và các chữ cái cuối cùng cho các đại lượng chưa biết (Gullberg, 1997). Trong cuốn sách La Géométrie năm 1637 của mình, Descartes đã giới thiệu cách sử dụng số mũ hiện tại của chúng ta (a^3, a^4,...) (Eves, 1983).

Dấu căn

Dấu căn $\sqrt{}$ được nhà toán học người Đức, Christoff Rudlff (1500-1545), giới thiệu trong cuốn đại số *Die Coss* của ông vào năm 1525. Có giả thuyết cho rằng kí hiệu $\sqrt{}$ được lấy từ chữ *r* trong từ *radix*, có nghĩa là *gốc* (Eves, 1983). Tuy nhiên, một số nhà sử học cho rằng dấu căn có nguồn gốc từ việc sử dụng các dấu chấm trong các bản viết tay từ cuối những năm 1400: Một dấu chấm có nghĩa là căn bậc hai và hai dấu chấm có nghĩa là căn bậc hai của căn bậc hai (Cajori, 1993).

Các kí hiệu khác

Leibniz lần đầu tiên sử dụng kí hiệu ∫ cho tích phân trong tác phẩm *Analyseos tetragonisticae pars secunda xuất bản năm 1675*. ∫ là kéo dài của chữ cái đầu tiên của từ Latinh *summa* (tổng) (Eves, 1983). Leibniz cũng giới thiệu kí hiệu "∼" cho phép tương tự và "≃" cho đồng dư (Cajori, 1993).

Năm 1657, John Wallis (1616-1703) giới thiệu biểu tượng "∞" cho vô cực trong cuốn *Mathesis Universalis* về đại số, số học và hình học (Britanica). Có giả thuyết cho rằng kí hiệu này xuất phát từ một biểu tượng La Mã cho 1000 (Cajori, 1993).

Leonhard Euler (1707-1783), được biết đến là đã giới thiệu nhiều kí hiệu toán học được sử dụng ngày nay hơn bất kì nhà toán học nào khác. Euler lần đầu tiên sử dụng kí hiệu $f(x)$ cho hàm số vào năm 1734 trong cuốn *Commentarii Academiae Scientiarum Petropolitanae*. Ông giới thiệu chữ *e* làm cơ số cho logarit tự nhiên trong một bức thư gửi cho Christian Goldbach vào ngày 25 Tháng 11 năm 1731. Kí hiệu *e* được chọn từ *exponentialis* (số mũ). Phần lớn nghiên cứu của ông sử dụng *e* xuất hiện trong cuốn sách đầu tiên của chuyên luận hai tập rất có ảnh hưởng của ông *Introductio in Analysin Infinitorum*

(Giới thiệu về Giải tích Vô hạn) được viết vào năm 1745 và xuất bản năm 1748. Vào năm 1755, Euler đã giới thiệu từ "sigma" viết hoa trong tiếng Hi Lạp, Σ, để biểu thị một tổng. Kí hiệu *i* cho đơn vị ảo được Euler đưa ra vào năm 1777 (Eves, 1983).

Như vậy, việc phát minh ra máy in, sự truyền bá đạo Hồi, sự giao thương mạnh mẽ giữa các châu lục Á - Bắc Phi - châu Âu, đại số hóa hình học, sự phổ biến các kết quả nghiên cứu thiên văn học và giải phương trình bậc cao, sự phát triển kinh tế mạnh mẽ cho phép các học giả du hành truyền bá toán học là nguyên nhân thúc đẩy sự hình thành và phát triển của hệ thống biểu tượng đại số hiện đại. Vì thế, đặc trưng tri thức luận của hệ thống biểu tượng trong giai đoạn này là sự tinh gọn và thanh lịch của hệ thống Hindu-Ả Rập, bảng chữ cái Latinh, truyền bá tôn giáo, hệ thống biểu tượng La Mã, hệ thống biểu tượng Hi Lạp.

3.5. *Các quan niệm ảnh hưởng lên quá trình hình thành và phát triển hệ thống biểu tượng đại số*

Từ kết quả phân tích cho thấy một số quan niệm đã ảnh hưởng lên quá trình hình thành và phát triển hệ thống biểu tượng đại số như sau:

Quan niệm hình học: là quan niệm ảnh hưởng mạnh mẽ qua các giai đoạn vì hình học được chọn làm cơ sở giải thích cho các mệnh đề toán học trong suốt quá trình hình thành và phát triển của đại số từ thời cổ đại đến thế kỉ XVII.

Quan niệm số học: là một trong những quan niệm ảnh hưởng lớn đến quá trình hình thành hệ thống biểu tượng đại số, thông qua sự không chấp nhận nghiệm âm của phương trình của các nhà đại số Babylon và Ai Cập, và ảnh hưởng của tác phẩm *Arithmetica* của Diophantus.

Quan niệm truyền bá toán học: sự truyền bá toán học giữa các vùng miền, châu lục đòi hỏi sự tinh gọn trong cách trình bày các văn bản toán học đã góp phần thúc đẩy sự phát triển của hệ thống biểu tượng đại số.

4. Kết luận

Bài viết tóm tắt ngắn gọn về lịch sử hình thành và phát triển của hệ thống biểu tượng đại số được sử dụng phổ biến nhất cho thấy rằng các nhà toán học của nhân loại đã mất 3000 năm để phát triển hệ thống biểu tượng đại số nhỏ gọn và hiệu quả.

Sự phát triển của hệ thống biểu tượng đại số tạo điều kiện thúc đẩy sự hình thành và phát triển các khái niệm mới của đại số nói riêng và toán học nói chung. Hệ thống biểu tượng tinh gọn giúp con người tri giác một cách nhanh chóng và chính xác nội hàm, đôi khi phức tạp và phong phú, của các khái niệm đại số. Đặc biệt, hệ thống biểu tượng tinh gọn cho phép trừu tượng hóa một số khái niệm toán học ở cấp độ cao hơn.

Nguồn gốc của một số biểu tượng phổ quát cung cấp những cái nhìn thú vị về toán học vốn là một nỗ lực đang phát triển của con người, chứ không phải là cách trình bày cô đọng và trừu tượng cao trong hầu hết các sách giáo khoa (Stallings, 2000).

❖ ***Tuyên bố về quyền lợi:*** *Tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Adams, T. L. (2003). Reading mathematics: More than words can say. *The Reading Teacher*, Newark, *56*(8), 786-795.

Bardini, C., & Pierce, R. (2015). Assumed mathematics knowledge: The challenge of symbols. *International Journal of Innovation in Science and Mathematics Education, 23*(1), 1-9.

Baumgart, J. K. (1969). The history of algebra: An overview. *In Historical topics for the mathematics classroom*. 31st National Council of Teachers of Mathematics Yearbook. Washington, DC: NCTM.

Blackhouse, J., Haggarty, L., Pirie, S., & Stratton, S. (1992). *Improving the learning of mathematics*. London: Cassell.

Boyer, C. B. (1991). *A history of mathematics* (2nd ed.). New York: John Wiley & Sons.

Britannica (2023). *John Wallis*. Encyclopedia Britannica. https://www.britannica.com/biography/John-Wallis

Britannica (2023). *Mathesis Universalis*. Encyclopedia Britannica. https://www.britannica.com/topic/Mathesis-Universalis

Cajori, F. (1993). *A history of mathematical notations*. Dover Publication, Inc. NewYork.

Cunningham, E. G. (1986). The language and development of algebra. In N. F. Ellerton (Ed.), *Mathematics: Who needs what?* (pp. 224-226).

Eves, H. (1983). *An introduction to the history of mathematics*. 5th ed. Philadelphia, Saunders College Pub.

Fauvel, J., & van Maanen, J. (Eds.). (2000). *History in mathematics education: The ICMI Study*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *International Journal on Mathematics Education (ZDM)*, *39*(1-2), 127-135.

Graham, A., & Thomas, M. O. J. (2000). Building a versatile understanding of algebraic variables with a graphic calculator. *Educational Studies in Mathematics, 41*, 265-282.

Güçler, B. (2014). The role of symbols in mathematical communication: the case of the limit notation. *Research in Mathematics Education, 16*(3), 251-268.

Gullberg, J. (1997). *Mathematics from the birth of numbbers*. New York: W.W. Norton.

Katz, V. J. (2009). *A History of Mathematics: An Introduction*, 3rd Edition. Pearson.

Katz, V. J., & Barton, B. (2007). Stages in the history of algebra with implications for teaching. *Educational Studies in Mathematics*, *66*(2), 185-201.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419).

Kızıltoprak, A., & Yavuzsoy Köse, N. (2017). Relational thinking: The bridge between arithmetic and algebra. *International Electronic Journal of Elementary Education*, *10*(1), 131-145.

Küchemann, D. (1981). Algebra. In K. Hart (Ed.), *Children's Understanding of Mathematics: 11-16* (pp. 102-119). Murray, London.

Le, T. H. C. (2017). Sự cần thiết của phân tích tri thức luận đối với các nghiên cứu về hoạt động dạy học và đào tạo giáo viên [The necessity of epistemological analysis for research on teaching activities and teacher training]. In *Proceedings of the sixth international conference on mathematics teaching* (pp. 17-39). Ho Chi Minh City University of Education.

MacGregor, M., & Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation: 11-15. *Educational Studies in Mathematics, 33*(1), 1-19.

Maharaj, A. (2008). Some insights from research literature for teaching and learning mathematics. *South African Journal of Education, 28*(3), 401-414.

Maracchia, S. (2013). The importance of symbolism in the development of algebra. *Lettera Matematica, 1*(3), 137-144.

Nataraj, M. S., & Thomas, M. O. J. (2012). The Concept of Generalised Number: Valuable Lessons from the History of Algebra. *Mathematics Education: Expanding Horizons, Proceedings of the 35th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*, 562-569.

Nelson, D. (1993). Teaching mathematics from a multicultural standpoint. In D. Nelson, G. G. Joseph, & J. Williams, (Eds.). *Multicultural mathematics*. Oxford: Oxford University Press.

Neugebauer, O., & Sachs, A. (1945). *Mathematical Cuneiform Texts*, American Oriental Society, New Haven.

Schoenfeld, A. H., & Arcavi, A. (1988). On the Meaning of Variable. *The Mathematics Teacher, 81*(6), 420-427. http://www.jstor.org/stable/27965869

Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *Journal of Mathematical Behaviour, 14,* 15-19.

Smartick. (n.d.). *Mathematical Symbols to Represent Operations and Relations*. https://www.smartick.com/blog/mathematics/algebra/mathematical-symbols/

Stallings, L. (2000). A Brief History of Algebraic Notation. *School Science and Mathematics, 100*(5), 230-235.

Stols, G. (2011). The importance of using and not using symbols in school mathematics. *Proceedings: Towards Effective Teaching and Meaningful Learning in Mathematics, Science and Technology. ISTE International Conference on Mathematics, Science and Technology Education*. 17-20 October 2011. Mopani Camp in Kruger National Park, Limpopo, South Africa, 255-264.

Struik, D. J. (1967). *A concise history of mathematics*. (3rd ed.). New York: Dover.

Sutori. (n.d.). *The Evolution of Math and Algebraic Symbols*. https://www.sutori.com/en/story/the-evolution-of-math-and-algebraic-symbols–3PuqpMcsdD1xnMBv5JWVNa2Q

Tall, D. (2008). The transition to formal thinking in mathematics. *Mathematics Education Research Journal, 20*(2), 5-24.

Tall, D., Gray, E., Bin Ali, M., Crowley, L., DeMarois, P., McGowen, M., Pitta, D., Pinto, M., Thomas, M., & Yusof, Y. (2001). Symbols and the bifurcation between procedural and conceptual thinking. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 1*(1), 81-104. https://doi.org/10.1080/14926150109556452

Yetkin, E. (2003). *Student Difficulties in Learning Elementary Mathematics*. Bloomington, IN: ERIC Digest.

A HISTORICAL–EPISTEMOLOGICAL ANALYSIS OF THE ALGEBRAIC SYMBOLIC SYSTEM

Nguyen Ai Quoc
Saigon University, Vietnam
Corresponding author: Nguyen Ai Quoc – Email: naquoc@sgu.edu.vn
Received: August 10, 2023; Revised: October 01, 2023; Accepted: October 05, 2023

ABSTRACT

This article presents a historical-epistemological analysis to clarify the formation and development of the algebraic symbolic system and identify viewpoints affecting the development and epistemological characteristics of the algebraic symbolic system. The analysis results show that the system developed in three intertwined stages: rhetorical or prose algebra, syncopated algebra, and symbolic algebra. In addition, three viewpoints greatly influenced the formation and development of the algebraic symbol system: geometry, arithmetic, and spreading mathematics. The results contribute to an epistemological analysis of the history of mathematics and serve as a basis for research on students' obstacles when accessing the algebraic symbol system.

Keywords: algebraic symbols; epistemological characteristics rhetorical algebra; syncopated algebra; symbolic algebra