TẠP CHÍ KHOA HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE

ISSN: 2734-9918

Tập 22, Số 7 (2025): 1189-1198

Vol. 22, No. 7 (2025): 1189-1198

Website: https://journal.hcmue.edu.vn

https://doi.org/10.54607/hcmue.js.22.7.4023(2025)

Bài báo nghiên cứu

BÀI TOÁN GIÁ TRỊ RIÊNG CHO TOÁN TỬ P-LAPLACE VỚI ĐIỀU KIỆN BIÊN ROBIN CÓ TRỌNG

Nguyễn Ngọc Huy Trường

Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

Tác giả liên hệ: Nguyễn Ngọc Huy Trường – Email: hitruongofficial@gmail.com

Ngày nhận bài: 22-11-2023; Ngày nhận bài sửa: 11-4-2024; Ngày nhận đăng: 24-01-2025

TÓM TẮT

Bài toán giá trị riêng là một phần quan trọng trong toán học, thường xuất hiện trong các phương trình vi phân và toán tử. Nó có ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực như khoa học máy tính, kĩ thuật, vật lí và nhiều lĩnh vực khác. Bài toán giá trị riêng đã được nhiều tác giả nghiên cứu từ rất lâu, cho đến nay bài toán vẫn nhận được sự quan tâm của nhiều nhà toán học. Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu về sự tồn tại dãy giá trị riêng không âm, không giảm cho toán tử p-Laplace và tính đóng của tập hợp các giá trị riêng đó. Hơn nữa, chúng tôi thiết lập tính bị chặn và tính liên tục Hölder của hàm riêng với điều kiện biên Robin. Bài toán được nghiên cứu với hàm β *xác định trên* $\partial\Omega$*, không liên tục thoả mãn* $\beta \in L^\infty(\Omega)$ *và* $\int_{\partial\Omega} \beta(x)\,\mathrm{d}\sigma > 0$.

Từ khóa: bài toán giá trị riêng; p-Laplace; điều kiện biên Robin có trọng

1. Giới thiệu

Trong bài báo này, ta nghiên cứu về giá trị riêng của bài toán biên Robin

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda m(x)|u|^{p-2}u, & x \in \Omega, \\ |\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \beta(x)|u|^{p-2}u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

trong đó ν là pháp tuyến đơn vị hướng ra ngoài, $1 < p < \infty$ và $\Delta_p u = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right)$ toán tử p-Laplace, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ (với $N \geq 2$) là miền bị chặn với biên trơn $\partial\Omega$, hàm trọng $m \in L^\infty(\Omega)$ có dấu tuỳ ý và thoả mãn $m^+ = \max\{m, 0\} \not\equiv 0$ trên Ω. Ngoài ra, $\beta : \partial\Omega \to [0; +\infty)$ thoả mãn $\beta \in L^\infty(\partial\Omega)$ và $\int_{\partial\Omega} \beta(x)\,\mathrm{d}\sigma > 0$.

Bài toán giá trị riêng cho toán tử p – Laplace

$$-\Delta_p u = \lambda m|u|^{p-2}u, \quad x \in \Omega,$$

với điều kiện biên Dirichlet, Neumann hay Steklov đã được nhiều tác giả nghiên cứu (Anane, 1987; Cuesta, 2001; Huang, 1990; Torne, 2005).

Cite this article as: Nguyen, N. H. T. (2025). Eigenvalue robin problem for the p-Laplacian with Weight. *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science, 22*(7), 1189-1198. https://doi.org/10.54607/hcmue.js.22.7.4023(2025)

Với điều kiện biên Robin, tác giả An Lê đã nghiên cứu trường hợp $m \equiv 1$ (Le, 2006). Trong những năm gần đây do các vấn đề phi tuyến nảy sinh trong việc nghiên cứu về di truyền học quần thể nên trường hợp $p = 2$ đã được các tác giả nghiên cứu (Allegretto & Huang, 1998).

Ngoài ra, hai tác giả Arouzi và Khademloo (Arouzi & Khademloo, 2007) đã xét bài toán (1.1) và xây dựng điều kiện cần để có giá trị riêng đầu tiên trong mỗi trường hợp trên.

Với $\beta \equiv 0$ và $\beta = +\infty$, bài toán (1.1) lần lượt trở thành bài toán giá trị riêng với điều kiện biên Neumann và Dirichlet có trọng (Anane, 1987; Huang, 1990).

Hơn nữa, trong (Rahmani et al., 2012), Rahmani và cộng sự đã nghiên cứu bài toán (1.1) với trường hợp $\beta(x) \equiv \beta$ là hàm hằng trên $\partial\Omega$ và $0 < \beta < +\infty$.

Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu giá trị riêng bài toán (1.1) với trường hợp $\beta(x)$ không liên tục thoả mãn $\beta \in L^\infty(\partial\Omega)$ và $\int_{\partial\Omega} \beta(x)\,\mathrm{d}\sigma > 0$. Chúng tôi lưu ý rằng trường hợp trên chưa được tác giả nào nghiên cứu trước đây.

Cấu trúc của bài báo như sau: trong mục 2, chúng tôi giới thiệu một số kí hiệu dùng trong bài báo, kiến thức chuẩn bị cũng như định nghĩa nghiệm yếu của bài toán và cuối cùng là nguyên lí Ljusternik – Schinirelman. Trong mục cuối, chúng tôi chứng minh sự tồn tại của dãy giá trị riêng không âm, không giảm và tính đóng của tập hợp các giá trị riêng. Hơn nữa, chúng tôi còn chỉ ra rằng hàm riêng của bài toán (1.1) bị chặn và liên tục Hölder.

2. Nội dung nghiên cứu

Trong bài báo này, hàm $\beta : \partial\Omega \to [0,+\infty)$ thoả mãn $\beta \in L^\infty(\partial\Omega)$ và $\int_{\partial\Omega} \beta(x)\,\mathrm{d}\sigma > 0$.

Ta kí hiệu $C(\gamma, N, p, M, K, L, \Omega)$ là hằng số C phụ thuộc vào γ, N, p, M, K, L và Ω.

2.1. Nguyên lí The Ljusternik-Schinirelman

Để chứng minh sự tồn tại của dãy các giá trị riêng không âm chúng tôi sẽ áp dụng nguyên lí Ljusternik-Schinirelman. Do đó, chúng tôi sẽ giới thiệu lại nguyên lí như sau:

Cho X là không gian Banach thực có tính phản xạ và F, G là các hàm trên X. Ta xét bài toán giá trị riêng sau:

$$F'(u) = \mu G'(u),\ u \in S,\ \mu \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

với tập mức $S := \{u \in X : G(u) = 1\}$. Giả sử F, G thoả mãn các giả thiết sau:

(A1) $F, G : X \to \mathbb{R}$ là các hàm chẵn và $F, G \in C^1(X, \mathbb{R})$ với $F(0) = G(0) = 0$.

(A2) F' liên tục mạnh (nghĩa là, $u_n \rightharpoonup u$ trên X kéo theo $F'(u_n) \to F'(u)$) và $\langle F'(u), u\rangle = 0,\ u \in \overline{coS} \Rightarrow F(u) = 0$ trong đó $\overline{coS}$ là bao lồi đóng của S.

(A3) G' liên tục, bị chặn và thoả mãn điều kiện (S_0), tức là,

$$u_n \rightharpoonup u,\ G'(u_n) \to v,\ \langle G'(u_n), u_n\rangle \to \langle v, u\rangle \text{ kéo theo } u_n \to u \text{ khi } n \to \infty$$

(A4) Tập mức S bị chặn và $u \neq 0$ suy ra

$$\langle G'(u), u\rangle > 0,\ \lim_{t\to+\infty} G(tu) = +\infty,\ \inf_{u\in S} \langle G'(u), u\rangle > 0.$$

Theo (Zeidler, 1980), ta có (u,μ) là nghiệm của (2.1) khi và chỉ khi u là điểm tới hạn của F đối với S.

Với mỗi số nguyên dương $n,$ ta xét $\mathbb{A}_n$ là họ các tập con compact, đối xứng K của S thoả mãn $F(u)>0$ trên K và $\gamma(K)\ge n,$ trong đó $\gamma(K)$ là giống của $K,$ tức là,

$$\gamma(K):=\inf\{k\in\mathbb{N}:\exists h:K\to\mathbb{R}^k\setminus\{0\} \text{ sao cho } h \text{ lẻ và liên tục}\}.$$

Ta định nghĩa

$$a_n=\begin{cases}\sup\limits_{H\in\mathbb{A}_n}\inf\limits_{u\in H}F(u), & \text{khi } \mathbb{A}_n\neq\varnothing,\\ 0, & \text{khi } \mathbb{A}_n=\varnothing.\end{cases} \tag{2.2}$$

và

$$\chi=\begin{cases}\sup\{n\in\mathbb{N}:a_n>0\}, & \text{khi } a_1>0,\\ 0, & \text{khi } a_1=0.\end{cases} \tag{2.3}$$

Nguyên lí Ljusternik – Schinirelman được phát biểu như sau:

Định lí 2.1. Với các giả thiết (A1) – (A4), ta có các khẳng định sau:

1. Nếu $a_n>0$ thì (2.1) có một cặp hàm riêng $\pm u_n$ và giá trị riêng $\mu_n\neq 0$. Hơn nữa, $F(u_n)=a_n$.

2. Nếu $\chi=\infty$ thì (2.1) có vô số cặp hàm riêng $\pm u_n$ tương ứng với các giá trị riêng khác không.

3. $\infty>a_1\ge a_2\ge\ldots\ge 0$ và $a_n\to 0$ khi $n\to\infty$.

4. Nếu $\chi=\infty$ và $F(u)=0,\ u\in\overline{coS}\Rightarrow\langle F'(u),u\rangle=0$ thì tồn tại một dãy vô hạn các giá trị riêng phân biệt $\{\mu_n\}$ của (2.1) sao cho $\mu_n\to 0$ khi $n\to\infty$.

5. Nếu $F(u)=0, u\in\overline{coS}\Rightarrow u=0$ thì $\chi=\infty$ và tồn tại một dãy cặp riêng $\{(u_n,\mu_n)\}$ của (2.1) sao cho $u_n\to 0, \mu_n\to 0$ khi $n\to\infty$ và $\mu_n\neq 0$ với mọi $n\in\mathbb{N}$.

Chứng minh. Định lí được chứng minh trong (Browder, 1970; Zeider, 1980). □

Nhận xét 2.2. Bằng cách thay F bởi $-F$, ta được dãy các giá trị riêng âm.

Định nghĩa 2.3. (Giá trị riêng) Ta nói λ là giá trị riêng của bài toán (1.1) nếu tồn tại một hàm khác hàm hằng 0 (hàm riêng) $u\in W^{1,p}(\Omega)$ sao cho với mọi $v\in W^{1,p}(\Omega)$, ta có

$$\int_\Omega|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v\,\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}\beta|u|^{p-2}uv\,\mathrm{d}\sigma=\lambda\int_\Omega m|u|^{p-2}uv\,\mathrm{d}x \tag{2.4}$$

trong $W^{1,p}(\Omega)$ là không gian Sobolev với chuẩn

$$\|u\|:=\left(\int_\Omega|\nabla u|^p\,\mathrm{d}x+\int_\Omega|u|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}.$$

2.2. Thiết lập các hàm để chứng minh sự tồn tại dãy các giá trị riêng

Bây giờ, ta sẽ áp dụng nguyên lí Ljusternik-Schnirelman để thiết lập sự tồn tại dãy các giá trị riêng dương cho bài toán (1.1).

Trên không gian Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, ta xét các hàm

$$F(u)=\int_{\Omega} m(x)\left|u(x)\right|^{p}\,\mathrm{d}x \tag{2.5}$$

$$G(u)=\int_{\Omega}\left|\nabla u(x)\right|^{p}\,\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}\beta(x)\left|u(x)\right|^{p}\,\mathrm{d}\sigma \tag{2.6}$$

Rõ ràng, $F,G\in C^{1}(\Omega)$. Ta xét $A=\dfrac{1}{p}F'$ và $B=\dfrac{1}{p}G'$ trong đó

$$\left\langle Au,v\right\rangle=\int_{\Omega} m\left|u\right|^{p-2}uv\,\mathrm{d}x \tag{2.7}$$

$$\left\langle Bu,v\right\rangle=\int_{\Omega}\left|\nabla u\right|^{p-2}\nabla u\nabla v\,\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}\beta\left|u\right|^{p-2}uv\,\mathrm{d}\sigma,\ \ u,v\in W^{1,p}(\Omega) \tag{2.8}$$

Khi đó, (2.1) trở thành $Au=\mu Bu$ với $G(u)=1$. Do đó, với mọi $v\in W^{1,p}(\Omega)$, ta có

$$\int_{\Omega} m\left|u\right|^{p-2}uv\,\mathrm{d}x=\mu\left(\int_{\Omega}\left|\nabla u\right|^{p-2}\nabla u\nabla v\,\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}\beta\left|u\right|^{p-2}uv\,\mathrm{d}\sigma\right) \tag{2.9}$$

Ta sẽ chứng minh F,G thoả mãn (A1) – (A4). Từ (2.5), (2.6), (2.7) và (2.8), rõ ràng F,G thoả mãn giả thiết (A1) và (A4).

Mệnh đề 2.4. Cho F được xác định trong (2.5). Khi đó, F' thoả mãn (A2).

Chứng minh. Ta chứng minh A liên tục mạnh trên $W^{1,p}(\Omega)$.

Lấy $(u_n)\subset W^{1,p}(\Omega)$ sao cho $u_n\rightharpoonup u$ trên $W^{1,p}(\Omega)$.

Ta sẽ chứng minh $Au_n\to Au$ trên $W^{1,p}(\Omega)^{*}$.

Với mọi $v\in W^{1,p}(\Omega)$, áp dụng bất đẳng thức Hölder và phép nhúng Sobolev, ta được

$$\begin{aligned}\left|\left\langle Au_n-Au,v\right\rangle\right| &\le\left|\int_{\Omega} m\left(\left|u_n\right|^{p-2}u_n-\left|u\right|^{p-2}u\right)v\,dx\right|\\ &\le\left\|m\right\|_{\infty}\left\|\left|u_n\right|^{p-2}u_n-\left|u\right|^{p-2}u\right\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)}\left\|v\right\|_{L^{p}(\Omega)}\\ &\le C_1\left\|m\right\|_{\infty}\left\|\left|u_n\right|^{p-2}u_n-\left|u\right|^{p-2}u\right\|_{L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)}\left\|v\right\|_{W^{1,p}(\Omega)}.\end{aligned}$$

Đặt $w_n=\left|u_n\right|^{p-2}u_n$ và $w=\left|u\right|^{p-2}u$. Do $u_n\rightharpoonup u$ trên $W^{1,p}(\Omega)$, $u_n\to u$ trên $L^{p}(\Omega)$ nên ta có

$$w_n(x)\to w(x)\ \text{ hkn trên }\Omega\ \text{ và }\int_{\Omega}\left|w_n\right|^{\frac{p}{p-1}}\mathrm{d}x\to\int_{\Omega}\left|w\right|^{\frac{p}{p-1}}\mathrm{d}x.$$

Suy ra $w_n\to w$ in $L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$ (Le, 2006). Do đó, $Au_n\to Au$ trên $W^{1,p}(\Omega)^{*}$. □

Ta cần một bổ đề được chứng minh trong (Le & Schmitt, 1997) để chứng minh giả thiết (A3). Hơn nữa, ta sẽ dùng chuẩn

$$\left\|u\right\|_{\beta}:=\left(\int_{\Omega}\left|\nabla u\right|^{p}\mathrm{d}x+\int_{\partial\Omega}\beta\left|u\right|^{p}\mathrm{d}\sigma\right)^{1/p}$$

tương đương với chuẩn thông thường trên $W^{1,p}(\Omega)$ (Deng, 2009).

Bổ đề 2.5. Cho B được xác định trong (2.8). Khi đó, với mọi $u,v\in W^{1,p}(\Omega)$ ta có

$$\left\langle Bu-Bv,u-v\right\rangle\ge\left(\left\|u\right\|_{\beta}^{p-1}-\left\|v\right\|_{\beta}^{p-1}\right)\left(\left\|u\right\|_{\beta}-\left\|v\right\|_{\beta}\right).$$

Hơn nữa, $\langle Bu - Bv, u - v \rangle = 0$ khi và chỉ khi $u = v$ hkn trên Ω.

Chứng minh. Bổ đề được chứng minh trong (Rahmani et al., 2012). □

Mệnh đề 2.6. Cho G' được xác định trong (2.8). Khi đó, G' thoả mãn (A3).

Chứng minh. Ta có $G' = pB$ nên ta chỉ cần chứng minh B thoả mãn (A3). Bằng cách áp dụng phép nhúng Sobolev, bất đẳng thức Hölder và lập luận tương tự **Mệnh đề 2.4** ta được B liên tục và bị chặn.

Ta chứng minh B thoả mãn điều kiện (S_0), tức là,

$$u_n \rightharpoonup u,\ G'(u_n) \to v,\ \langle G'(u_n), u_n \rangle \to \langle v, u \rangle$$

với $v \in W^{1,p}(\Omega)^*$ và $u \in W^{1,p}(\Omega)$ kéo theo $u_n \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$.

Do $W^{1,p}(\Omega)$ là không gian lồi đều địa phương nên để chứng minh $u_n \to u$ trên $W^{1,p}(\Omega)$ ta chỉ cần chứng minh $\|u_n\|_\beta \to \|u\|_\beta$. Ta có

$$\lim_{n\to\infty} \langle Bu_n - Bu, u_n - u \rangle = \lim_{n\to\infty} \left(\langle Bu_n, u_n \rangle - \langle Bu, u_n \rangle - \langle Bu, u_n - u \rangle \right) = 0.$$

Mặt khác, theo **Bổ đề 2.5** ta có

$$\langle Bu_n - Bu, u_n - u \rangle \geq \left(\|u_n\|_\beta^{p-1} - \|u\|_\beta^{p-1} \right) \left(\|u_n\|_\beta - \|u\|_\beta \right).$$

Do đó $\|u_n\|_\beta \to \|u\|_\beta$ khi $n \to \infty$.

Vậy B thoả mãn điều kiện (S_0). □

3. Kết luận

Bây giờ, ta sẽ chứng minh sự tồn tại của dãy giá trị riêng bằng cách áp dụng **Định lí 2.1** theo nguyên lí Ljusternik-Schnirelman.

Định lí 3.1. Cho F, G là các hàm xác định trên $W^{1,p}(\Omega)$ trong (2.5), (2.6). Khi đó, tồn tại một dãy không tăng các giá trị riêng không âm $\{\mu_n\}$ có được từ nguyên lí Ljusternik-Schnirelman sao cho $\mu_n \to 0$ khi $n \to \infty$, trong đó

$$\mu_n = \sup_{H \in \mathbb{A}_n} \inf_{u \in H} F(u) \tag{3.1}$$

và mỗi μ_n là giá trị riêng của $F'(u) = \mu G'(u)$.

Chứng minh. Sự tồn tại của dãy $\{\mu_n\}$ được suy ra từ **Định lí 2.1 (5)**. Từ (2.5), (2.6), (2.7) và (2.8) ta có

$$\mu_n = \mu_n G(u_n) = \mu_n \langle Bu_n, u_n \rangle = \langle Au_n, u_n \rangle = F(u_n) = a_n.$$

Kết hợp tất cả với (2.2) ta được (3.1). □

Hệ quả 3.2. Tồn tại một dãy không giảm các giá trị riêng không âm $\{\lambda_n\}$ của (1.1) thu được bằng cách áp dụng nguyên lí Ljusternik-Schnirelman sao cho $\lambda_n = \dfrac{1}{\mu_n} \to \infty$ khi $n \to \infty$, với μ_n là giá trị riêng của phương trình $F'(u) = \mu G'(u)$ được xác định trong (3.1).

Chứng minh. $F'(u) = \mu G'(u)$ tương đương với

$$\int_\Omega m|u|^{p-2} uv\,\mathrm{d}x = \mu\left(\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \beta |u|^{p-2} uv\,\mathrm{d}\sigma\right)$$

với mọi $v \in W^{1,p}(\Omega)$

hay

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \beta |u|^{p-2} uv\,\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{\mu}\int_\Omega m|u|^{p-2} uv\,\mathrm{d}x$$

với mọi $v \in W^{1,p}(\Omega)$. Suy ra u là một nghiệm yếu của (1.1) liên kết với giá trị riêng $\frac{1}{\mu}$. Do đó, áp dụng **Định lí 3.1** ta được kết quả. □

Định lí 3.3. Tập hợp các giá trị riêng của bài toán biên Robin (1.1) là tập đóng.

Chứng minh. Giả sử $\{(u_n, \gamma_n)\}$ là dãy các cặp riêng của (1.1) sao cho $\gamma_n \to \gamma$ với $\gamma \ge 0$. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $\|u_n\|_\beta = 1$. Khi đó, $u_n \rightharpoonup u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Theo **Bổ đề 2.5**, ta có

$$\langle Bu_n - Bu, u_n - u\rangle \ge \left(\|u_n\|_\beta^{p-1} - \|u\|_\beta^{p-1}\right)\left(\|u_n\|_\beta - \|u\|_\beta\right).$$

Mặt khác, do (u_n, γ_n) là cặp riêng của bài toán (1.1) nên ta có

$$\langle Bu_n - Bu, u_n - u\rangle = \langle Bu_n, u_n - u\rangle - \langle Bu, u_n - u\rangle = \gamma_n \langle Au_n, u_n - u\rangle - \langle Bu, u_n - u\rangle.$$

Mà $\langle Bu_n - Bu, u_n - u\rangle \to 0$ khi $n \to \infty$ nên $\|u_n\|_\beta \to \|u\|_\beta$ khi $n \to \infty$. Suy ra $u_n \to u$ trên $W^{1,p}(\Omega)$ do $W^{1,p}(\Omega)$ là không gian lồi đều địa phương.

Để chứng minh γ là giá trị riêng của (1.1) và u là hàm riêng tương ứng, ta cần chứng minh rằng với mọi $v \in W^{1,p}(\Omega)$ khi $n \to \infty$ thì

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \nabla v\,\mathrm{d}x \to \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v\,\mathrm{d}x \tag{3.2}$$

$$\int_\Omega m(x)|u_n|^{p-2} u_n v\,\mathrm{d}x \to \int_\Omega m(x)|u|^{p-2} uv\,\mathrm{d}x \tag{3.3}$$

$$\int_{\partial\Omega} \beta(x)|u_n|^{p-2} u_n v\,\mathrm{d}\sigma \to \int_{\partial\Omega} \beta(x)|u|^{p-2} uv\,\mathrm{d}\sigma \tag{3.4}$$

Đặt $w_n = |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n$ và $w = |\nabla u|^{p-2} \nabla u$. Khi đó, do $u_n \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$ nên

$$w_n(x) \to w(x) \text{ hkn trên } \Omega \text{ và } \int_\Omega |w_n|^{\frac{p}{p-1}}\,\mathrm{d}x \to \int_\Omega |w|^{\frac{p}{p-1}}\,\mathrm{d}x.$$

Theo (Le, 2006), ta suy ra $w_n \to w$ trên $L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega)$. Do đó, áp dụng bất đẳng thức Hölder, ta được (3.2). Tương tự, ta cũng có (3.3) và (3.4). □

Định lí 3.4. Cho u là hàm riêng của bài toán (1.1). Khi đó, $u \in L^\infty(\Omega)$.

Chứng minh. Theo định lí phép nhúng Sobolev, ta chỉ cần chứng minh trong trường hợp $p \le N$. Ta sẽ dùng kĩ thuật lặp Moser trong chứng minh này.

Giả sử $u \geq 0$ trên Ω. Với mỗi $M > 0$, ta xét $v_M(x) = \min\{u(x), M\}$.

Cho $f(x) = x$ nếu $x \leq M$ và $f(x) = M$ nếu $x > M$. Khi đó, theo (Le, 2006), ta suy ra được $v_M \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Với mỗi $k > 0$, ta xét $\varphi = v_M^{kp+1}$. Khi đó, $\nabla\varphi = (kp+1)v_M^{kp}\nabla v_M$. Suy ra $\varphi \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$

Chọn φ là hàm thử trong (2.4), ta được

$$\begin{aligned}(kp+1)\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v_M v_M^{kp}\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega}\beta|u|^{p-2}uv_M^{kp+1}\,\mathrm{d}\sigma &= \lambda\int_\Omega m|u|^{p-2}uv_M^{kp+1}\,\mathrm{d}x \\ &\leq \lambda\int_\Omega m|u|^{(k+1)p}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

hay

$$\frac{kp+1}{(k+1)^p}\int_\Omega \left|\nabla v_M^{k+1}\right|^p \mathrm{d}x \leq \lambda\int_\Omega m|u|^{(k+1)p}\,\mathrm{d}x.$$

Suy ra

$$\frac{kp+1}{(k+1)^p}\int_\Omega \left(\left|\nabla v_M^{k+1}\right|^p + \left|v_M^{k+1}\right|^p\right)\mathrm{d}x \leq \left[\lambda + \frac{kp+1}{(k+1)^p}\right]\int_\Omega m|u|^{(k+1)p}\,\mathrm{d}x.$$

Do đó

$$\left\|v_M^{k+1}\right\|^p \leq \left[\lambda\frac{kp+1}{(k+1)^p} + 1\right]\|m\|_\infty \|u\|_{(k+1)p}^{(k+1)p}.$$

Áp dụng phép nhúng Sobolev, tồn tại $c_1 > 0$ sao cho

$$\left\|v_M^{k+1}\right\|_{p^*} \leq c_1\left\|v_M^{k+1}\right\|$$

trong đó $p^* = \dfrac{Np}{N-p}$ nếu $p < N$ và $p^* = 2p$ nếu $p \geq N$. Do đó

$$\begin{aligned}\|v_M\|_{(k+1)p^*} &\leq \left\|v_M^{k+1}\right\|_{p^*}^{\frac{1}{k+1}} \\ &\leq c_1^{\frac{1}{k+1}}\left[\lambda\frac{kp+1}{(k+1)^p} + 1\right]^{\frac{1}{(k+1)p}}\|m\|_\infty \|u\|_{(k+1)p}.\end{aligned}$$

Hơn nữa, tồn tại $c_2 > 0$ sao cho

$$\left[\lambda\frac{kp+1}{(k+1)^p} + 1\right]^{\frac{1}{p\sqrt{k+1}}}\|m\|_\infty \leq c_2, \forall k > 0.$$

Do đó

$$\|v_M\|_{(k+1)p^*} \leq c_1^{\frac{1}{k+1}}c_2^{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}\|u\|_{(k+1)p}.$$

Theo bổ đề Fatou, cho $M \to \infty$, ta được

$$\|u\|_{(k+1)p^*} \leq c_1^{\frac{1}{k+1}}c_2^{\frac{1}{\sqrt{k+1}}}\|u\|_{(k+1)p} \tag{3.5}$$

Chọn k_1 sao cho $(k_1+1)p = p^*$, khi đó (3.5) trở thành

$$\|u\|_{(k_1+1)p^*} \le c_1^{\frac{1}{k_1+1}} c_2^{\frac{1}{\sqrt{k_1+1}}} \|u\|_{p^*}.$$

Ta tiếp tục chọn k_2 sao cho $(k_2+1)p = (k_1+1)p^*$, khi đó cho $k_2 = k$ trong (3.5), ta được

$$\|u\|_{(k_2+1)p^*} \le c_1^{\frac{1}{k_2+1}} c_2^{\frac{1}{\sqrt{k_2+1}}} \|u\|_{(k_2+1)p} = c_1^{\frac{1}{k_2+1}} c_2^{\frac{1}{\sqrt{k_2+1}}} \|u\|_{(k_1+1)p^*}.$$

Bằng quy nạp, ta được

$$\|u\|_{(k_n+1)p^*} \le c_1^{\frac{1}{k_n+1}} c_2^{\frac{1}{\sqrt{k_n+1}}} \|u\|_{(k_{n-1}+1)p^*},$$

trong đó dãy $\{k_n\}$ thoả mãn $(k_n+1)p = (k_{n-1}+1)p^*, k_0 = 0$. Rõ ràng, $k_n + 1 = \left(\frac{p^*}{p}\right)^n$. Do đó

$$\|u\|_{(k_n+1)p^*} \le c_1^{\sum_{i=1}^n \frac{1}{k_i+1}} c_2^{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{k_i+1}}} \|u\|_{p^*}.$$

Do $\frac{p^*}{p} < 1$ nên tồn tại $C > 0$ sao cho với mọi $n = 1, 2, \dots$

$$\|u\|_{r_n} \le C\|u\|_{p^*}, \tag{3.6}$$

với $r_n = (k_n+1)p^* \to \infty$ khi $n \to \infty$.

Ta chứng minh $u \in L^\infty(\Omega)$ bằng phản chứng. Giả sử $u \notin L^\infty(\Omega)$ khi đó tồn tại $\varepsilon > 0$ và tập A có độ đo dương trong Ω sao cho $|u(x)| > C\|u\|_{p^*} + \varepsilon = K$ với mọi $x \in A$. Khi đó

$$\liminf_{n\to\infty} \|u\|_{r_n} \ge \liminf_{n\to\infty} \left(\int_A K^{r_n}\right)^{1/r_n} = \liminf_{n\to\infty} K|A|^{1/r_n} = K > C\|u\|_{p^*}.$$

Điều này mâu thuẫn với (3.6). Vậy $u \in L^\infty(\Omega)$.

Nếu u (hàm riêng của (1.1) đổi dấu trên Ω, ta chứng minh u^+ và u^- thuộc $L^\infty(\Omega)$. Khi đó, $u = u^+ - u^- \in L^\infty(\Omega)$. □

Định lí 3.5. Cho Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^N$ với biên $C^{1,\gamma}$, $0 < \gamma \le 1$ và u bị chặn là nghiệm yếu của bài toán

$$\begin{cases} -\Delta_p u(x) = g(x) & x \in \Omega, \\ |\nabla u|^{p-2} \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \phi(x,u) & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

với $\|u\|_\infty \le M$. Nếu $g \in L^\infty(\Omega)$ với $\|g\|_\infty \le K$ và ϕ thoả mãn điều kiện (S_1), tức là, tồn tại $L > 0$ sao cho

$$|\phi(x,z) - \phi(y,w)| \le L\left(|x-y|^\gamma + |z-w|^\gamma\right) \text{ và } |\phi(x,z)| \le L$$

với mọi $(x,z),(y,w)\in\partial\Omega\times\left[-M,M\right]$. Khi đó, tồn tại hằng số $\alpha=\alpha\left(\gamma,N,p,M,K\right)$ dương sao cho $u\in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ và $\|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})}\le C\left(\gamma,N,p,M,K,L,\Omega\right)$.

Chứng minh. Định lí được chứng minh trong (Le, 2006). ☐

Định lí 3.6. Cho $\partial\Omega$ thuộc lớp $C^{1,\gamma}$, $\beta\in C^{1,\gamma}(\partial\Omega)$ với $0<\gamma\le 1$ và u là hàm riêng của (1.1). Khi đó, $u\in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ với $\alpha\in(0,1)$.

Chứng minh. Ta có $u\in L^{\infty}(\Omega)$ và $m\in L^{\infty}(\Omega)$ nên

$$g(x)=\lambda m(x)|u(x)|^{p-2}u(x)\in L^{\infty}(\Omega) \text{ và } \|g\|_{\infty}\le K.$$

Bây giờ, ta chứng minh $\phi(x,u)=-\beta(x)|u|^{p-2}u$ thoả mãn điều kiện (S_1). Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned}|\phi(x,z)-\phi(y,w)|&=\left|-\beta(x)|z|^{p-2}z+\beta(y)|w|^{p-2}w\right|\\&\le\beta(y)\left||w|^{p-2}w-|z|^{p-2}z\right|+|\beta(y)-\beta(x)||z|^{p-1}\end{aligned}$$

Chú ý rằng $\beta\in C^{1,\gamma}(\partial\Omega)$ và $\varphi(x,z)=|z|^{p-2}z$ thoả mãn điều kiện (S_1) với mọi $0<\gamma\le\min\{p-1,1\}$ (Le, 2006). Khi đó, tồn tại $C_1>0, C_2>0$ và $C_3>0$ sao cho

$$\beta(y)\le C_1,\ |\beta(y)-\beta(x)|\le C_2|x-y|^{\gamma} \text{ và } \left||w|^{p-2}w-|z|^{p-2}z\right|\le C_3\left(|x-y|^{\gamma}+|w-z|^{\gamma}\right)$$

với mọi $0<\gamma\le\min\{p-1,1\}$.

Do đó, tồn tại $L>0$ sao cho

$$|\phi(x,z)-\phi(y,w)|\le L\left(|x-y|^{\gamma}+|z-w|^{\gamma}\right) \text{ và } |\phi(x,z)|\le L$$

với mọi $(x,z),(y,w)\in\partial\Omega\times\left[-M,M\right]$, với mọi $0<\gamma\le\min\{p-1,1\}$.

Áp dụng **Định lí 3.5**, tồn tại hằng số $\alpha=\alpha\left(\gamma,N,p,M,K\right)$ dương sao cho

$$u\in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}) \text{ và } \|u\|_{C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})}\le C\left(\gamma,N,p,M,K,L,\Omega\right).$$ ☐

❖ ***Tuyên bố về quyền lợi:*** *Tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Allegretto, W., & Huang, Y. X. (1998). A Picone's identity for the p-Laplacian and applications. *Nonlinear Analysis, 32*(7), 819-830. https://doi.org/10.1016/s0362-546x(97)00530-0

Anane, A. (1987). Étude des valeurs propres et de la résonance pour l'opérateur p-Laplacien [Study of eigenvalues and resonance for the p-Laplacian operator]. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 305*, 725-728.

Arouzi, G. A., & Khademloo, S. (2007). Principal eigenvalues of the p-Laplacian with the boundary condition involving indefinite weight. *World Journal of Modelling and Simulation, 3*(4), 299-304.

Browder, F. (1970). Existence theorems for nonlinear partial differential equations. In *Global analysis, Proceedings of the Symposium Pure Mathematics* (Vol. XVI, Berkeley, California, 1968, pp. 1-60). American Mathematical Society. https://doi.org/10.1090/pspum/016/0269962

Cuesta, M. (2001). Eigenvalue problems for the p-Laplacian with indefinite weights. *Electronic Journal of Differential Equations*, *2001*(33), 1-9.

Deng, S. G. (2009). Positive solutions for Robin problem involving the p(x)-Laplacian. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *360*(2), 548-560. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2009.06.032

Huang, Y. X. (1990). On eigenvalue problems of the p-Laplacian with Neumann boundary conditions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, *109*, 177-184. https://doi.org/10.2307/2048377

Le, A. (2006). Eigenvalue problems for the p-Laplacian. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, *64*(5), 1057-1099. https://doi.org/10.1016/j.na.2005.05.056

Le, V. K., & Schmitt, K. (1997). Global Bifurcation in Variational Inequalities: Applications to Obstacle and Unilateral Problems. *Springer*. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1820-3

Rahmani, M., Tsouli, N., Darhouche, O., & Chakrone, O. (2012). Eigenvalue Robin problem for the p-Laplacian with weight. *Journal of Abstract Differential Equations and Applications*, *3*(2), 60-74.

Torne, O. (2005). Steklov problem with an indefinite weight for the p-Laplacian. *Electronic Journal of Differential Equations*, *2005*(87), 1-8.

Zeidler, E. (1980). The Ljusternik-Schnirelman theory for indefinite and not necessarily odd nonlinear operators and its applications. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, *4*(3), 451-489. https://doi.org/10.1016/0362-546x(80)90085-1

EIGENVALUE ROBIN PROBLEM FOR THE P-LAPLACIAN WITH WEIGHT

Nguyen Ngoc Huy Truong

Ho Chi Minh City University of Education, Vietnam

Corresponding author: Nguyen Ngoc Huy Truong – Email: hitruongofficial@gmail.com

Received: November 22, 2023; Revised: April 11, 2024; Accepted: January 24, 2025

ABSTRACT

The eigenvalue problem is an essential part of mathematics and is often encountered in various fields, such as computer science, engineering, physics, and many others. Properties of eigenvalues have attracted the attention of mathematicians for centuries. In this paper, we conducted a study on the existence of a non-negative, non-decreasing sequence of eigenvalues for p-Laplacian and the closedness property of the set of these eigenvalues. Specifically, the study explores the boundedness and Hölder continuity of eigenfunctions under Robin boundary conditions. This investigation involves a function β *defined on the boundary* $\partial\Omega$*, which is not necessarily continuous but satisfies* $\beta \in L^\infty(\Omega)$ *and* $\int_{\partial\Omega} \beta(x)\mathrm{d}\sigma > 0$.

Keywords: Eigenvalue problem; p-Laplacian; Robin boundary conditions with weights