TẠP CHÍ KHOA HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH

Tập 21, Số 11 (2024): 2063-2076

Website: https://journal.hcmue.edu.vn

ISSN: 2734-9918

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE

Vol. 21, No. 11 (2024): 2063-2076

https://doi.org/10.54607/hcmue.js.21.11.4071(2024)

Bài báo nghiên cứu

HIỆN TƯỢNG BÙNG NỔ CỦA NGHIỆM PHƯƠNG TRÌNH PARABOLIC $p-$LAPLACE

Huỳnh Trần Minh Thuận
Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam
Tác giả liên hệ: Huỳnh Trần Minh Thuận – Email: huynhtranminhthuan09052002@gmail.com
Ngày nhận bài: 22-12-2023; ngày nhận bài sửa: 26-3-2024; ngày duyệt đăng: 04-5-2024

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi khảo sát hiện tượng bùng nổ của nghiệm phương trình Parabolic $p-$Laplace. Dựa vào bất đẳng thức Hardy, chúng tôi tìm ra điều kiện để nghiệm của phương trình Parabolic $p-$Laplace bùng nổ tại thời điểm hữu hạn. Hơn nữa, chúng tôi ước lượng chặn trên và chặn dưới cho thời điểm bùng nổ. Những kết quả này được phát triển từ bài toán của Han vào năm 2018 (Han, 2018) và giải quyết một số vấn đề mở của Liu vào năm 2016 (Liu, 2016).

Từ khóa: bùng nổ; Toán tử $p-$Laplace; Phương trình Parabolic

1. Giới thiệu

Về mặt toán học, khi nghiên cứu các phương trình Parabolic, người ta thường quan tâm nghiên cứu các vấn đề sau:

i. Sự tồn tại nghiệm địa phương hay tính chỉnh địa phương của bài toán.

ii. Vấn đề đặt ra tiếp theo là nghiệm địa phương này có tiếp tục tồn tại theo thời gian hay không? Nếu nghiệm thỏa mãn một số điều kiện cần thiết về tính trơn tiếp tục tồn tại liên tục theo biến thời gian thì ta nói đây là nghiệm toàn cục. Ngược lại, nếu tồn tại một thời gian $T>0$ sao cho $\|u(t)\|_X$ được xác định với $0<t<T$ và không bị chặn khi t dần đến T, nghĩa là $\|u(t)\|_X \to \infty$ khi $t \to T$, thì ta nói nghiệm $u(t)$ bùng nổ trong không gian X tại thời gian T và T được gọi là thời điểm bùng nổ.

Trong thực tế, người ta muốn biết nghiệm của bài toán có bùng nổ hay không, và nếu có thì bùng nổ vào thời điểm T nào. Vì T không thể được xác định một cách rõ ràng trong hầu hết các trường hợp, nên vấn đề quan trọng là phải thiết lập được chặn trên hoặc chặn dưới cho T. Một trong những phương trình $p-$Laplace được quan tâm hiện nay có dạng

---

Cite this article as: Huynh Tran Minh Thuan (2024). The Blow – up phenomenon of the parabolic $p-$ laplace equation. *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science, 21*(11), 2063-2076.
.

$$a(x)u_t - \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) = f(u). \tag{1.1}$$

Trong vài thập kỉ qua, các nhà nghiên cứu đã nỗ lực để giải quyết các vấn đề trên, chủ yếu là cho trường hợp $a(x)=1$ (xem (Dibenedetto, 1993)) trong (1.1). Năm 2004, Tan (Tan, 2004) đã xem xét sự tồn tại và dáng điệu tiệm cận của nghiệm toàn cục và hiện tượng bùng nổ cho nghiệm bài toán của Han (Han, 2018). Bằng cách sử dụng phương pháp giếng thế do Payne và Sattinger (Sattinger, 1968; Payne & Sattinger, 1975), và cùng với bất đẳng thức Hardy, Tan đã đưa ra một số điều kiện đủ cho sự tồn tại nghiệm toàn cục hoặc hiện tượng bùng nổ cho thời điểm hữu hạn, khi năng lượng ban đầu ở mức dưới tới hạn. Những kết quả này đã được mở rộng cho các phương trình môi trường xốp của Zhou (Zhou, 2014). Năm 2016, bằng cách xác định mức giếng thế mới và tập hợp tương ứng của chúng, Liu (Liu, 2016) đã chứng minh được sự tồn tại của nghiệm toàn cục và thời điểm bùng nổ hữu hạn của nghiệm bài toán của Han (Han, 2018) khi năng lượng ban đầu là tới hạn. Liu cũng đề xuất một bài toán mở về việc liệu bài toán của Han (Han, 2018) có thời điểm bùng nổ khi năng lượng ban đầu là trên tới hạn.

Từ đó, chúng tôi mở rộng bài toán của Han (Han, 2018) thành bài toán

$$\begin{aligned}
&\frac{u_t}{|x|^2} - L_p u = u^q, \quad (x,t)\in\Omega\times(0,T),\\
&u(x,t)=0, \qquad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T),\\
&u(x,0)=u_0(x), \quad x\in\Omega,
\end{aligned} \tag{1.2}$$

trong đó $L_p u = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u A(x)\right)$. Mục tiêu của bài báo này nhằm khảo sát hiện tượng bùng nổ của bài toán (1.2) dựa trên ý tưởng chính của Han (Han, 2018).

Cấu trúc bài báo bao gồm 2 phần:

+ *Phần 1*: Giới thiệu bài toán và một số kiến thức chuẩn bị.

+ *Phần 2*: Hiện tượng bùng nổ nghiệm của phương trình đạo hàm riêng.

Trong *phần 1*, chúng tôi giới thiệu về bài toán, một số định nghĩa và bổ đề để hỗ trợ cho nội dung chính của bài. Trong *phần 2*, chúng tôi đưa ra điều kiện để nghiệm yếu của bài toán (1.2) bùng nổ tại thời điểm hữu hạn và tìm được chặn trên cho thời điểm ấy . Đồng thời, chúng tôi sẽ tìm chặn dưới cho thời điểm bùng nổ hữu hạn.

2. Nội dung nghiên cứu

2.1. Giới thiệu bài toán và các kiến thức chuẩn bị

2.1.1. Giới thiệu bài toán

Trong bài báo này, ta khảo sát tính chất bùng nổ nghiệm của bài toán

$$\begin{aligned} &\frac{u_t}{|x|^2} - L_p u = u^q, \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ &u(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ &u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \end{aligned} \tag{2.1}$$

trong đó $L_p u = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2} \nabla u A(x)\right)$, Ω là miền bị chặn trên $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$ với biên trơn $\partial\Omega$, $0 \in \Omega$, $2 < p < n$, $p < q+1 < p^* = \dfrac{np}{n-p}$, $0 \leq u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ và $u_0(x) \not\equiv 0$. Hơn nữa $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$ và ma trận hàm $A(x) = \left(a_{ij}(x)\right)_{n\times n}$ thỏa điều kiện Elliptic đều, nghĩa là tồn tại $\lambda > 0$ sao cho

$a_{ij}(x)\xi_j\xi_i \geq \lambda|\xi|^2$ với mọi $\xi \in \mathbb{R}^n$ và $x \in \Omega$ hầu khắp nơi.

2.1.2. Kiến thức chuẩn bị

Ta kí hiệu $\|\cdot\|_r$ là chuẩn trên không gian $L^r(\Omega)(1 \leq r \leq \Omega)$, $(\cdot,\cdot)$ là tích vô hướng trên $L^2(\Omega)$ và $W_0^{1,p}(\Omega)$ là không gian Sobolev với chuẩn $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \|\nabla u\|_p$.

Định nghĩa 2.1.1. (Tan, 2004) Hàm u được gọi là nghiệm yếu của bài toán (2.1) trên $\Omega \times (0,T)$ nếu

$$u \in L^\infty\left(0,T; W_0^{1,p}(\Omega)\right), \int_0^T \left\| \frac{u_t(x,t)}{|x|} \right\|_2^2 dt < \infty,$$

$u(x,t)$ thỏa mãn $u(x,0) = u_0(x)$ và

$$\int_\Omega \left(\frac{u_t(x,t)}{|x|^2} v + |\nabla u(x,t)|^{p-2} \nabla u(x,t) A(x) \cdot \nabla v \right) dx = \int_\Omega u^q(x,t) v dx, \tag{2.2}$$

với mọi $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $t \in (0,T)$.

Sự tồn tại địa phương của nghiệm yếu cho bài toán (2.1) được đưa ra trong (Han & Li, 2018). Nếu không có sự nhầm lẫn, để đơn giản, ta viết $u(t)$ là nghiệm yếu $u(x,t)$ trong bài toán (2.1). Ta kí hiệu $T^* \in [0,+\infty)$ là thời điểm tồn tại lớn nhất của $u(t)$ được định nghĩa như sau

Định nghĩa 2.1.2. Giả sử $u(t)$ là nghiệm yếu của bài toán (2.1). Ta nói $u(t)$ bùng nổ tại hữu hạn điểm T^* khi $u(t)$ tồn tại với mọi $t \in \left[0,T^*\right)$ và

$$\lim_{t \to T^*} \left\| \frac{u(t)}{|x|} \right\|_2^2 = +\infty. \tag{2.3}$$

Khi đó, ta gọi T^* là thời điểm tồn tại lớn nhất của $u(t)$. Nếu (2.3) không xảy ra tại bất kì T^* hữu hạn nào thì $u(t)$ được gọi là nghiệm toàn cục và thời điểm tồn tại lớn nhất của $u(t)$ là $+\infty$.

Lấy $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tùy ý, ta định nghĩa

$$J(u) = \frac{1}{p}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u A(x), \nabla u\right) - \frac{1}{q+1}\|u\|_{q+1}^{q+1}, \tag{2.4}$$

và

$$I(u) = \left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u A(x), \nabla u\right) - \|u\|_{q+1}^{q+1}. \tag{2.5}$$

Vì $q+1 < p^*$ nên áp dụng phép nhúng Sobolev, ta có $J(u)$ và $I(u)$ xác định và liên tục trên $W_0^{1,p}(\Omega)$ với mọi $t \in [0, +\infty)$.

Nhận xét 2.1.3. Ta biểu diễn $J(u)$ theo $I(u)$ và ngược lại như sau

$$J(u) = \frac{q+1-p}{p(q+1)}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u A(x), \nabla u\right) + \frac{1}{q+1} I(u),$$

và

$$I(u) = (q+1) J(u) - \frac{q+1-p}{p}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u A(x), \nabla u\right).$$

Bổ đề 2.1.4. (Liu, 2016; Tan, 2004) *Giả sử $u(t)$ là nghiệm yếu của bài toán (2.1). Khi đó $J(u(t))$ không tăng theo t và với mọi $t \in (0,T)$, ta được*

$$\int_0^t \left\|\frac{u_\tau(\tau)}{|x|}\right\|_2^2 d\tau + J(u(t)) = J(u_0). \tag{2.6}$$

Hơn nữa, theo Định lí 1.2 của Tan (Tan, 2004), *nếu tồn tại $t_0 \in [0,T)$ sao cho $J(u(t_0)) \le 0$ thì $u(t)$ bùng nổ tại thời điểm hữu hạn. Do đó, nếu nghiệm yếu $u(t)$ của bài toán (2.1) là toàn cục, khi đó*

$$J(u(t)) > 0 \text{ với mọi } t \in [0,T). \tag{2.7}$$

Bổ đề 2.1.5. *(Bất đẳng thức Hardy* (Chong, 1974)*) Giả sử $1 < p < n$ và $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Khi đó $\frac{u}{|x|} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ và*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u|^p}{|x|^p} dx \le C_{n,p} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx, \tag{2.8}$$

trong đó $C_{n,p} = \left(\frac{p}{n-p}\right)^p$. *Nếu* $p = 2$ *thì ta kí hiệu* $C_{n,2} = C_n$.

Nhận xét 2.1.6. Với mọi $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, ta mở rộng $u(x) \equiv 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Khi đó $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ và bất đẳng thức (2.8) đúng với mọi $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Bổ đề 2.1.7. *(Bất đẳng thức Gagliardo – Nirenberg* (Brezis & Brézis, 2011)) *Lấy* $2 \le p < q+1 < p^* = \frac{np}{n-p}$. *Khi đó với mọi* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, *ta được*

$$\|u\|_{q+1}^{q+1} \le C_G \|\nabla u\|_p^{\alpha(q+1)} \|u\|_2^{(1-\alpha)(q+1)}, \tag{2.9}$$

trong đó $\alpha = \frac{q-1}{2(q+1)}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}-\frac{1}{p}\right)^{-1} \in (0,1)$ *và* $C_G > 0$ *là hằng số chỉ phụ thuộc vào* n, p *và* q.

Bổ đề 2.1.8. (Liao & Gao, 2017) *Giả sử* $f(t)$ *là hàm dương, khả vi bậc 2 và thỏa mãn*

$$f''(t)f(t) - (1+\theta)(f'(t))^2 \ge 0,$$

trong đó $\theta > 0$. *Nếu* $f(0) > 0$ *và* $f'(0) > 0$ *thì* $f(t) \to +\infty$ *khi* $t \to t_* \le t^* = \frac{f(0)}{\theta f'(0)}$.

2.2. Các định lí chính

Với các kiến thức đã được chuẩn bị ở *2.1.2.*, ta phát biểu và chứng minh các định lí chính trong bài viết. Để đơn giản, ta đặt $U_0 = \left\|\frac{u_0}{|x|}\right\|_2^2$ và

$$U(t) = \left\|\frac{u(t)}{|x|}\right\|_2^2.$$

2.2.1. Chặn trên cho thời điểm bùng nổ nghiệm

Định lí 2.2.1. *Giả sử* $2 < p < n$, $p < q+1 < p^*$ *và* $u(t)$ *là nghiệm yếu của bài toán (2.1). Nếu*

$$0 < K_1 J(u_0) < \frac{1}{2}U_0 - K_2$$

thì $u(t)$ *bùng nổ tại thời điểm hữu hạn* T^*. *Hơn nữa, chặn trên của* T^* *thỏa*

$$T^* \le \frac{4K_1U_0}{(q-1)^2 H(0)},$$

trong đó $H(0)=\frac{1}{2}U_0-K_1J(u_0)-K_2>0$, $K_1=\frac{(q+1)C_n}{\lambda(q+1-p)}\cdot\left(\frac{p-2}{p}\right)^{\frac{p-2}{2}}$, $K_2=\frac{C_n}{2}|\Omega|$, C_n *là hằng số dương từ bất đẳng thức Hardy,* λ *là hằng số dương sinh ra từ điều kiện Elliptic đều của ma trận hàm* $A(x)$ *và* $|\Omega|$ *là độ đo Lebesque của* Ω.

Chứng minh. Bằng các sử dụng ý tưởng từ (Sun et al., 2018) và áp dụng bất đẳng thức Hardy, đầu tiên ta chứng minh nghiệm yếu của bài toán (2.1) bùng nổ tại thời điểm hữu hạn khi $0<K_1J(u_0)<\frac{1}{2}U_0-K_2$. Ta có

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}U(t)=\int_\Omega\frac{u_t(t)u(t)}{|x|^2}dx.$$

Mặt khác, $u(t)$ là nghiệm yếu của bài toán (2.1) nên từ (2.2) và thay $v=u(t)\in W_0^{1,p}(\Omega)$, ta được

$$\int_\Omega\left(\frac{u_t(t)u(t)}{|x|^2}+|\nabla u(t)|^{p-2}\nabla u(t)A(x)\cdot\nabla u(t)\right)dx=\int_\Omega u^q(t)u(t)dx,$$

hay

$$\int_\Omega\frac{u_t(t)u(t)}{|x|^2}dx=-\left(|\nabla u(t)|^{p-2}\nabla u(t)A(x),\nabla u(t)\right)+\|u(t)\|_{q+1}^{q+1}.$$

Do đó, từ (2.5), suy ra

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}U(t)=-\left(|\nabla u(t)|^{p-2}\nabla u(t)A(x),\nabla u(t)\right)+\|u(t)\|_{q+1}^{q+1}=-I(u(t)) \quad (2.10)$$

Giả sử phản chứng $u(t)$ là nghiệm toàn cục, nghĩa là $T^*=+\infty$. Khi đó, với mọi $t\in(0,+\infty)$, ta có

$$\int_0^t\left\|\frac{u_\tau(\tau)}{|x|}\right\|_2d\tau\geq\left\|\int_0^t\frac{u_\tau(\tau)}{|x|}d\tau\right\|_2=\left\|\frac{u(t)}{|x|}-\frac{u_0}{|x|}\right\|_2\geq U^{\frac{1}{2}}(t)-U_0^{\frac{1}{2}}. \quad (2.11)$$

Từ (2.6) và bất đẳng thức Holder, ta có

$$U^{\frac{1}{2}}(t)\leq U_0^{\frac{1}{2}}+\left(t\int_0^t\left\|\frac{u_\tau(\tau)}{|x|}\right\|_2^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}=U_0^{\frac{1}{2}}+t^{\frac{1}{2}}\left[J(u_0)-J(u(t))\right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.12)$$

Vì $u(t)$ là nghiệm toàn cục nên theo (2.7), $J(u(t))>0$ với mọi $t\in[0,+\infty)$. Do đó, từ (2.12) suy ra

$$U^{\frac{1}{2}}(t)\leq U_0^{\frac{1}{2}}+t^{\frac{1}{2}}\left[J(u_0)-J(u(t))\right]^{\frac{1}{2}}<U_0^{\frac{1}{2}}+t^{\frac{1}{2}}J^{\frac{1}{2}}(u_0). \quad (2.13)$$

Mặt khác, áp dụng bất đẳng thức Young, ta được

$$\|\nabla u(t)\|_2^2 \le \int_\Omega \left[\frac{2}{p}\left(\frac{p-2}{p}\right)^{\frac{p-2}{2}} |\nabla u(t)|^p + 1\right] dx = \frac{2}{p}\left(\frac{p-2}{p}\right)^{\frac{p-2}{2}} \|\nabla u(t)\|_p^p + |\Omega|,$$

hay

$$\|\nabla u(t)\|_p^p \ge \frac{p}{2}\left(\frac{p}{p-2}\right)^{\frac{p-2}{2}} \left(\|\nabla u(t)\|_2^2 - |\Omega|\right). \tag{2.14}$$

Hơn nữa, do $A(x)$ thỏa điều kiện Elliptic đều nên tồn tại $\lambda > 0$ sao cho

$$\left(|\nabla u(t)|^{p-2} \nabla u(t) A(x), \nabla u(t)\right) \ge \lambda \|\nabla u(t)\|_p^p. \tag{2.15}$$

Khi đó, từ (2.10), Nhận xét (2.1.3) và Bổ đề (2.1.5) dẫn đến

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}U(t) &= \frac{q+1-p}{p}\left(|\nabla u(t)|^{p-2} \nabla u(t) A(x), \nabla u(t)\right) - (q+1) J(u(t)) \\
&\ge \frac{\lambda(q+1-p)}{p} \|\nabla u(t)\|_p^p - (q+1) J(u(t)) \\
&\ge \frac{\lambda(q+1-p)}{2} \cdot \left(\frac{p}{p-2}\right)^{\frac{p-2}{2}} \left(\|\nabla u(t)\|_2^2 - |\Omega|\right) - (q+1) J(u(t)) \qquad (2.16) \\
&\ge \frac{\lambda(q+1-p)}{2} \cdot \left(\frac{p}{p-2}\right)^{\frac{p-2}{2}} \left(\frac{1}{C_n} U(t) - |\Omega|\right) - (q+1) J(u(t)) \\
&:= K_0\left(\frac{1}{2}U(t) - K_1 J(u(t)) - K_2\right),
\end{aligned}$$

trong đó $K_0 = \frac{\lambda(q+1-p)}{C_n} \cdot \left(\frac{p}{p-2}\right)^{\frac{p-2}{2}}$, $K_1 = \frac{(q+1)C_n}{\lambda(q+1-p)} \cdot \left(\frac{p-2}{p}\right)^{\frac{p-2}{2}}$ và $K_2 = \frac{C_n}{2}|\Omega|$. Đặt $H(t) = \frac{1}{2}U(t) - K_1 J(u(t)) - K_2$. Theo Bổ đề (2.1.4) thì $\frac{d}{dt} J(u(t)) \le 0$ nên

$$\frac{d}{dt} H(t) \ge \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}U(t)\right) \ge K_0 H(t). \tag{2.17}$$

Vì $H(0) = \frac{1}{2}U_0 - K_1 J(u_0) - K_2 > 0$ nên $H(t) > 0$ với mọi $t \in [0, +\infty)$. Lấy tích phân hai vế của (2.17) trên $[0, t]$ ta được

$$H(t) \ge H(0) e^{K_0 t}. \tag{2.18}$$

Do $0 < J(u(t)) \le J(u_0)$ với mọi $t \in [0, +\infty)$ nên từ (2.18), ta có

$$U(t) \geq 2H(t) \geq 2H(0)e^{K_0 t},$$

với mọi $t \in [0,+\infty)$, mâu thuẫn với (2.13) khi t đủ lớn. Vì vậy, $T^* < +\infty$ và $u(t)$ bùng nổ tại thời điểm hữu hạn.

Tiếp theo, ta tìm chặn trên cho T^*. Từ nhận xét (2.1.3), điều kiện $K_1 J(u_0) + K_2 < \frac{1}{2}U_0$, (2.14), (2.15) và Bổ đề (2.1.5), ta có

$$\begin{aligned}
I(u_0) &= (q+1)J(u_0) - \frac{q+1-p}{p}\left(|\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0 A(x), \nabla u_0\right) \\
&\leq (q+1)J(u_0) - \frac{\lambda(q+1-p)}{p}\|\nabla u_0\|_p^p \\
&= K_0\left[K_1 J(u_0) + K_2 - \frac{1}{2}U_0\right] - \frac{\lambda(q+1-p)}{p}\left[\|\nabla u_0\|_p^p + \frac{p}{2}\cdot\left(\frac{p}{p-2}\right)^{\frac{p-2}{2}}\left(|\Omega| - \frac{1}{C_n}U_0\right)\right] \\
&\leq K_0\left[K_1 J(u_0) + K_2 - \frac{1}{2}U_0\right] - \frac{\lambda(q+1-p)}{2}\cdot\left(\frac{p}{p-2}\right)^{\frac{p-2}{2}}\left(\|\nabla u_0\|_2^2 - \frac{1}{C_n}U_0\right) \\
&< 0.
\end{aligned}$$

Ta chứng minh $I(u(t)) < 0$ với mọi $t \in [0,T^*)$. Vì $I(u_0) < 0$ và tính liên tục của I nên tồn tại $t_1 > 0$ đủ nhỏ sao cho $I(u(t)) < 0$ với mọi $t \in [0,t_1)$. Giả sử phản chứng tồn tại $t_0 \in (0,T^*)$ và $t_0 > t_1$ sao cho $I(u(t)) < 0$ với mọi $t \in [0,t_0)$ và $I(u(t_0)) = 0$. Từ (2.10) nên $U(t)$ tăng ngặt trên $[0,t_0)$ và vì thế

$$K_1 J(u_0) + K_2 < \frac{1}{2}U_0 < \frac{1}{2}U(t_0). \tag{2.19}$$

Mặt khác, do Bổ đề (2.1.5), (2.14), (2.15) và tính đơn điệu của $J(u(t))$ trong Bổ đề (2.1.4), khi đó

$$\begin{aligned}
K_1 J(u_0) + K_2 &\geq K_1 J(u(t_0)) + K_2 \\
&= K_1\left[\frac{q+1-p}{p(q+1)}\left(|\nabla u(t_0)|^{p-2}\nabla u(t_0)A(x), \nabla u(t_0)\right) + \frac{1}{q+1}I(u(t_0))\right] + \frac{C_n}{2}|\Omega| \\
&\geq \frac{K_1\lambda(q+1-p)}{p(q+1)}\|\nabla u(t_0)\|_p^p + \frac{C_n}{2}|\Omega| = \frac{C_n}{2}\left[\frac{2}{p}\cdot\left(\frac{p-2}{p}\right)^{\frac{p-2}{2}}\|\nabla u(t_0)\|_p^p + |\Omega|\right] \\
&\geq \frac{C_n}{2}\|\nabla u(t_0)\|_2^2 \geq \frac{1}{2}U(t_0),
\end{aligned}$$

mâu thuẫn với (2.19). Do đó $I(u(t)) < 0$ với mọi $t \in [0,T^*)$ và $U(t)$ tăng ngặt trên $[0,T^*)$.

Lấy $T \in (0,T^*)$, $\beta > 0$ và $\sigma > 0$ tùy ý, ta định nghĩa

$$F(t) := \int_0^t U(\tau)\,d\tau + (T-t)U_0 + \beta(t+\sigma)^2, \tag{2.20}$$

với $t \in [0,T]$. Từ (2.6), (2.10), (2.15) và Nhận xét (2.1.3), ta có

$$\begin{aligned} F'(t) &= U(t) - U_0 + 2\beta(t+\sigma) \\ &= \int_0^t \frac{d}{d\tau}U(\tau)\,d\tau + 2\beta(t+\sigma) = 2\int_0^t \left(u(\tau), \frac{u_\tau(\tau)}{|x|^2} \right) d\tau + 2\beta(t+\sigma), \end{aligned} \tag{2.21}$$

và

$$\begin{aligned} F''(t) &= 2\left(u(t), \frac{u_t(t)}{|x|^2} \right) + 2\beta = -2I(u(t)) + 2\beta \\ &= -2(q+1)J(u(t)) + \frac{2(q+1-p)}{p}\left(|\nabla u(t)|^{p-2}\nabla u(t)A(x), \nabla u(t) \right) + 2\beta \\ &\geq -2(q+1)J(u(t)) + \frac{2\lambda(q+1-p)}{p}\|\nabla u(t)\|_p^p + 2\beta \\ &= -2(q+1)J(u_0) + 2(q+1)\int_0^t \left\| \frac{u_\tau(\tau)}{|x|} \right\|_2^2 d\tau + \frac{2\lambda(q+1-p)}{p}\|\nabla u(t)\|_p^p + 2\beta. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Lấy $t \in [0,T]$ tùy ý, đặt

$$\begin{aligned} f(t) &= \left[\int_0^t U(\tau)\,d\tau + \beta(t+\sigma)^2 \right]\left[\int_0^t \left\| \frac{u_\tau(\tau)}{|x|} \right\|_2^2 d\tau + \beta \right] - \left[\int_0^t \left(u(\tau), \frac{u_\tau(\tau)}{|x|^2} \right) d\tau + \beta(t+\sigma) \right]^2 \\ &= \int_0^t U(\tau)\,d\tau \int_0^t \left\| \frac{u_\tau(\tau)}{|x|} \right\|_2^2 d\tau - \left[\int_0^t \left(u(\tau), \frac{u_\tau(\tau)}{|x|^2} \right) d\tau \right]^2 + \\ &\quad \beta\left[\int_0^t U(\tau)\,d\tau + (t+\sigma)^2 \int_0^t \left\| \frac{u_\tau(\tau)}{|x|} \right\|_2^2 d\tau - 2(t+\sigma)\int_0^t \left(u(\tau), \frac{u_\tau(\tau)}{|x|^2} \right) d\tau \right]. \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Holder và bất đẳng thức Cauchy – Schwarz, khi đó $f(t)$ không âm trên $[0,T]$. Vì thế, từ (2.14), (2.20), (2.21), (2.22), Bổ đề (2.1.5) và tính đơn điệu của $U(t)$, ta có

$$
\begin{aligned}
&F(t)F''(t)-\frac{q+1}{2}\left(F'(t)\right)^2\\
&=F(t)F''(t)+2(q+1)\left[f(t)-\left(F(t)-(T-t)U_0\right)\left(\int_0^t\left\|\frac{u_\tau(\tau)}{|x|}\right\|_2^2 d\tau+\beta\right)\right]\\
&\ge F(t)F''(t)-2(q+1)F(t)\left(\int_0^t\left\|\frac{u_\tau(\tau)}{|x|}\right\|_2^2 d\tau+\beta\right)\\
&>F(t)\left[-2(q+1)J(u_0)+\frac{2\lambda(q+1-p)}{p}\|\nabla u(t)\|_p^p-2(q+1)\beta\right]\\
&\ge F(t)\left[-2(q+1)J(u_0)+\lambda(q+1-p)\left(\frac{p}{p-2}\right)^{\frac{p-2}{2}}\left(\frac{1}{C_n}U(t)-|\Omega|\right)-2(q+1)\beta\right]\\
&=F(t)\left[-2(q+1)J(u_0)+\frac{q+1}{K_1}U(t)-\frac{q+1}{K_1}C_n|\Omega|-2(q+1)\beta\right]\\
&\ge F(t)\left[-2(q+1)J(u_0)+\frac{q+1}{K_1}U_0-\frac{q+1}{K_1}C_n|\Omega|-2(q+1)\beta\right]\\
&=2(q+1)F(t)\left[\frac{1}{K_1}\left(\frac{1}{2}U_0-K_1J(u_0)-K_2\right)-\beta\right]\\
&=2(q+1)F(t)\left[\frac{H(0)}{K_1}-\beta\right]\ge 0,
\end{aligned}
$$

với mọi $t\in[0,T]$ và $\beta\in\left(0,\frac{H(0)}{K_1}\right]$. Do đó

$$F(t)F''(t)-\left(1+\frac{q-1}{2}\right)\left(F'(t)\right)^2\ge 0.$$

Mà $F(0)>0$ và $F'(0)>0$ nên từ Bổ đề (2.1.8), ta được

$$T\le\frac{2F(0)}{(q-1)F'(0)}=\frac{U_0}{(q-1)\beta\sigma}T+\frac{\sigma}{q-1}. \tag{2.23}$$

Cố định $\beta_0\in\left(0,\frac{H(0)}{K_1}\right]$. Khi đó với mọi

$$\sigma\in\left(\frac{U_0}{(q-1)\beta_0},+\infty\right),$$

ta có

$$0<\frac{U_0}{(q-1)\beta_0\sigma}<1,$$

và từ (2.23), suy ra

$$T \le \frac{\sigma}{q-1}\left(1-\frac{U_0}{(q-1)\beta_0\sigma}\right)^{-1} = \frac{\beta_0\sigma^2}{(q-1)\beta_0\sigma - U_0}. \tag{2.24}$$

Cực tiểu hóa vế phải của (2.24) với $\sigma \in \left(\frac{U_0}{(q-1)\beta_0}, +\infty\right)$, khi đó

$$T \le \min_{\sigma \in \left(\frac{U_0}{(q-1)\beta_0}, +\infty\right)} \frac{\beta_0\sigma^2}{(q-1)\beta_0\sigma - U_0} = \frac{4U_0}{(q-1)^2\beta_0}, \tag{2.25}$$

với mọi $\beta_0 \in \left(0, \frac{H(0)}{K_1}\right]$. Cực tiểu hóa vế phải của (2.25) với $\beta_0 \in \left(0, \frac{H(0)}{K_1}\right]$, ta được

$$T \le \min_{\beta_0 \in \left(0, \frac{H(0)}{K_1}\right]} \frac{4U_0}{(q-1)^2\beta_0} = \frac{4K_1U_0}{(q-1)^2 H(0)}.$$

Mà $T < T^*$ tùy ý nên

$$T^* \le \frac{4K_1U_0}{(q-1)^2 H(0)}.$$

Vậy ta được điều phải chứng minh. □

2.2.2. Chặn dưới cho thời điểm bùng nổ nghiệm

Định lí 2.2.2. *Giả sử rằng $2 < p < n$, $p < q+1 < p\left(1+\frac{2}{n}\right)$, $u(t)$ là nghiệm yếu của bài toán (2.1) bùng nổ tại thời điểm T^* và các giả thuyết của Định lí (2.2.1) xảy ra. Khi đó*

$$T^* \ge \frac{U_0^{1-\gamma}}{C^*(\gamma-1)},$$

trong đó $\gamma > 1$ và $C^* > 0$ là 2 hằng số được xác định trong chứng minh.

Chứng minh. Từ chứng minh của Định lí (2.2.1) thì $I(u(t)) < 0$ với mọi $t \in [0, T^*)$, nghĩa là

$$\left(\left|\nabla u(t)\right|^{p-2}\nabla u(t)A(x), \nabla u(t)\right) < \left\|u(t)\right\|_{q+1}^{q+1}, \tag{2.26}$$

với mọi $t \in [0, T^*)$. Từ (2.15) dẫn đến

$$\left\|\nabla u(t)\right\|_p^p < \frac{1}{\lambda}\left\|u(t)\right\|_{q+1}^{q+1}.$$

Khi đó, từ (2.26) và Bổ đề (2.1.7), ta có

$$\begin{aligned} \left\|u(t)\right\|_{q+1}^{q+1} &\le C_G \left\|\nabla u(t)\right\|_p^{\alpha(q+1)} \left\|u(t)\right\|_2^{(1-\alpha)(q+1)} \\ &\le C_G \lambda^{\frac{-\alpha(q+1)}{p}} \left(\left\|u(t)\right\|_{q+1}^{q+1}\right)^{\frac{\alpha(q+1)}{p}} \left(\left\|u(t)\right\|_2^2\right)^{\frac{(1-\alpha)(q+1)}{2}}. \end{aligned} \tag{2.27}$$

Mặt khác,

$$\|u(t)\|_2^2 = \int_\Omega |u(t)|^2\, dx = \int_\Omega |x|^2 \frac{|u(t)|^2}{|x|^2}\, dx \le (\operatorname{diam}(\Omega))^2 U(t).$$

Do đó, từ (2.27) suy ra

$$\|u(t)\|_{q+1}^{q+1} \le C_G \lambda^{\frac{-\alpha(q+1)}{p}} \left(\|u(t)\|_{q+1}^{q+1}\right)^{\frac{\alpha(q+1)}{p}} \left[(\operatorname{diam}(\Omega))^2 U(t)\right]^{\frac{(1-\alpha)(q+1)}{2}},$$

hay

$$\left(\|u(t)\|_{q+1}^{q+1}\right)^{1-\frac{\alpha(q+1)}{p}} \le C_* \left[U(t)\right]^{\frac{(1-\alpha)(q+1)}{2}}, \tag{2.28}$$

trong đó $C_* = C_G \lambda^{\frac{-\alpha(q+1)}{p}} (\operatorname{diam}(\Omega))^{(1-\alpha)(q+1)}$, $\alpha = \frac{q-1}{2(q+1)} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n} - \frac{1}{p}\right)^{-1}$ và $\operatorname{diam}(\Omega) > 0$ là đường kính của Ω. Ta có

$$q+1 < p\left(1 + \frac{2}{n}\right),$$

nên

$$1 - \frac{\alpha(q+1)}{p} > 0.$$

Do đó

$$\gamma := \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-\alpha)(q+1)}{1 - \frac{\alpha(q+1)}{p}} = \frac{q+1-p}{2\left(1 - \frac{\alpha(q+1)}{p}\right)} + \frac{p}{2} > \frac{p}{2} > 1.$$

Vì vậy, từ (2.10) ta được

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} U(t) &= -2\left(|\nabla u(t)|^{p-2} \nabla u(t) A(x), \nabla u(t)\right) + 2\|u(t)\|_{q+1}^{q+1} \\ &< 2\|u(t)\|_{q+1}^{q+1} < 2C_*^{\frac{1}{1-\frac{\alpha(q+1)}{p}}} U^\gamma(t) := C^* U^\gamma(t). \end{aligned}$$

với mọi $t \in [0, T^*)$, trong đó $C^* = 2C_*^{\frac{1}{1-\frac{\alpha(q+1)}{p}}}$. Do $I(u(t)) < 0$ với mọi $t \in [0, T^*)$ nên $U(t) > 0$ với mọi $t \in [0, T^*)$. Dẫn đến

$$\frac{\frac{d}{dt} U(t)}{U^\gamma(t)} \le C^*. \tag{2.29}$$

Lấy tích phân hai vế của (2.29) trên $[0, t]$, ta có

$$\frac{1}{1-\gamma}\left(U^{1-\gamma}(t)-U_0^{1-\gamma}\right)\le C^*t. \tag{2.30}$$

Do $u(t)$ bùng nổ tại thời điểm T^* nên $\lim_{t\to T^*}U(t)=+\infty$. Cùng với $\gamma>1$ nên khi cho $t\to T^*$ hai vế của (2.30), ta được

$$T^*\ge\frac{U_0^{1-\gamma}}{(1-\gamma)C^*}.$$

Vậy ta được điều phải chứng minh. ▪

3. Kết luận

Trong bài báo này, dựa trên ý tưởng của Han (Han, 2018), chúng tôi đã phát triển bài toán của Han (Han, 2018) bằng cách thêm vào ma trận hàm $A(x)$ thỏa điều kiện Elliptic đều. Từ đó, chúng tôi đã đưa ra được điều kiện để nghiệm yếu bài toán (2.1) bùng nổ tại thời điểm hữu hạn và tìm được chặn trên cho thời điểm bùng nổ. Hơn nữa, nhờ vào bất đẳng thức Gagliardo – Nirenberg, chúng tôi đã tìm được chặn dưới cho thời điểm bùng nổ hữu hạn dựa trên điều kiện đưa ra ở trên.

❖ ***Tuyên bố về quyền lợi:*** *Tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Brezis, H., & Brézis, H. (2011). *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations* (Vol. 2, No. 3, p. 5). Springer.

Chong, K. M. (1974). Some extensions of a theorem of Hardy, Littlewood and Pólya and their applications. *Canadian Journal of Mathematics*, *26*(6), 1321-1340. https//doi.org/10.4153/CJM-1974-126-1

DiBenedetto, E. (1993). *Degenerate parabolic equations*. Springer Science & Business Media.

Galaktionov, V. A., & Vázquez, J. L. (2002). The problem of blow-up in nonlinear parabolic equations. *Discrete and continuous dynamical systems*, *8*(2), 399-434. https//doi.org/10.3934/dcds.2002.8.399

Han, Y. (2018). A new blow-up criterion for non-Newton filtration equations with special medium void. https//doi.org/10.1216/RMJ-2018-48-8-2489

Han, Y., & Li, Q. (2018). Threshold results for the existence of global and blow-up solutions to Kirchhoff equations with arbitrary initial energy. *Computers & Mathematics with Applications*, *75*(9), 3283-3297. https//doi.org/10.1016/j.camwa.2018.01.047

Han, Y. (2022). Blow-up phenomena for a reaction diffusion equation with special diffusion process. *Applicable Analysis*, *101*(6), 1971-1983. https//doi.org/10.1080/00036811.2020.1792447

Hu, B. (2011). *Blow-up theories for semilinear parabolic equations*. Springer.

Liao, M., & Gao, W. (2017). Blow-up phenomena for a nonlocal p-Laplace equation with Neumann boundary conditions. *Archiv der Mathematik, 108,* 313-324. https//doi.org/10.1007/s00013-016-0986-z

Liu, Y. (2016). Potential well and application to non-Newtonian filtration equations at critical initial energy level. *Acta Math. Sci. Ser. A (Chinese Ed.), 36*, 1211-1220. http://manu45.magtech.com.cn/sxwlxbA/EN/abstract/abstract13181.shtml

Payne, L. E., & Sattinger, D. H. (1975). Saddle points and instability of nonlinear hyperbolic equations. *Israel Journal of Mathematics*, *22*(3-4), 273-303. https//doi.org/10.1007/BF02761595

Sattinger, D. H. (1968). On global solution of nonlinear hyperbolic equations. *Archive for Rational Mechanics and Analysis, 30,* 148-172. https//doi.org/10.1007/BF00250942

Sun, F., Liu, L., & Wu, Y. (2018). Finite time blow-up for a thin-film equation with initial data at arbitrary energy level. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 458*(1), 9-20. https//doi.org/10.1016/j.jmaa.2017.08.047

Tan, Z. (2004). Non-Newton filtration equation with special medium void. *Acta Mathematica Scientia*, *24*(1), 118-128. https//doi.org/10.1016/S0252-9602(17)30367-3

Zhou, J. (2014). A multi-dimension blow-up problem to a porous medium diffusion equation with special medium void. *Applied Mathematics Letters, 30,* 6-11. https//doi.org/10.1016/j.aml.2013.12.003

THE BLOW – UP PHENOMENON OF THE PARABOLIC $p-$LAPLACE EQUATION

Huynh Tran Minh Thuan

Ho Chi Minh City University of Education, Vietnam

Corresponding author: Huynh Tran Minh Thuan – Email: huynhtranminhthuan09052002@gmail.com

Received: December 22, 2024; Revised: March 26, 2024; Accepted: May 04, 2024

ABSTRACT

In this paper, we investigate the phenomenon of blowup for solutions of the Parabolic $p-$Laplace equation. According to the Hardy inequality, we identify conditions under which solutions of the Parabolic $p-$Laplace equation experience blow-up at a finite time. Moreover, we establish upper and lower bounds for the blow-up time. These results extend from the work of Han in 2018 (Han, 2018) and address certain open issues raised by Liu in 2016 (Liu, 2016).

Keywords: Blow-up; $p-$Laplace operator; Parabolic equation