TẠP CHÍ KHOA HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE

ISSN: 2734-9918

Tập 21, Số 2 (2024): 256-263

Vol. 21, No. 2 (2024): 256-263

Website: https://journal.hcmue.edu.vn

https://doi.org/10.54607/hcmue.js.21.2.4072(2024)

Bài báo nghiên cứu

BẤT ĐẲNG THỨC HARNACK YẾU CHO TOÁN TỬ LOẠI SCHRODINGER

Nguyễn Đức Trung**, Nguyễn Trọng Nhân,
Trương Lê Gia Khánh, Nguyễn Ngọc Hữu Ân, Nguyễn Thủy Tiên
Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam
**Tác giả liên hệ: Nguyễn Đức Trung – Email: nguyenductrung2282002@gmail.com*
Ngày nhận bài: 22-12-2023; ngày nhận bài sửa: 01-02-2024; ngày duyệt đăng: 20-02-2024

TÓM TẮT

Trong lí thuyết chính quy, bất đẳng thức Harnack yếu đóng vai trò quan trọng. Bất đẳng thức Harnack yếu là cần thiết để chứng minh tính liên tục Holder của nghiệm yếu. Trong bài báo này, chúng tôi chứng minh bất đẳng thức Harnack yếu cho toán tử loại Schrodinger $-div(A\nabla u)+Vu$*, là một trong những phương trình có nhiều ứng dụng quan trọng trong vật lí cơ học lượng tử, với A là ma trận hằng và thế năng V thuộc lớp Holder ngược. Để thu được điều đó, chúng tôi cần đến các đánh giá cho hàm phụ trợ, bất đẳng thức Fefferman-Phong, bất đẳng thức Caccioppoli và bất đẳng thức Friedrichs. Trong Shen (1995), ông đã thiết lập bất đẳng thức Hanack yếu cho nghiệm của phương trình* $-\Delta u+Vu=0$*. Kết quả của chúng tôi là sự tổng quát kết quả đã có của Shen (1995).*

Từ khóa: biên Neumann; toán tử loại Schrodinger; Bất đẳng thức Harnack yếu

1. Giới thiệu

Khi xét toán tử Schrodinger, trong bài báo quan trọng và khởi đầu của Shen (1995), tác giả đã chứng minh bất đẳng thức Harnack yếu cho toán tử loại Schrodinger $-\Delta+V$ với thế năng V thuộc lớp Holder ngược. Trong bài báo này chúng tôi mở rộng kết quả trên cho toán tử $-div(A\nabla u)+Vu$ với A là ma trận hằng với điều kiện biên Neumann.

Thế năng V thuộc lớp Holder ngược, được định nghĩa như sau:

Định nghĩa 1.1. Ta nói $V\in RH_\infty$ khi đó $V(X)\le Cm^2(V,X)$. Hơn nữa,

$$\|V\|_{L^\infty(B)}\le\frac{C}{|B|}\int_B V(X)dX$$

với mọi quả cầu mở B trong $\mathbb{R}^n$.

Với $Q\in\partial\Omega$ tùy ý và $r<diam(\partial\Omega)$, ta gọi:

$$Z(Q,r)=\left\{(X',X_n):\left|X'-Q'\right|<r,\left|X_n-Q_n\right|<(1+2m)r\right\}$$

là tọa độ trụ và m là hệ số Lipschitz của biên.

Cite this article as: Nguyen Duc Trung, Nguyen Trong Nhan, Truong Le Gia Khanh, Nguyen Ngoc Huu An, & Nguyen Thuy Tien (2024). Weak Harnack inequality for Schrodinger operator. *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science*, *21*(2), 256-263.

Ta sẽ chứng minh **bất đẳng thức Harnack yếu cho nghiệm của phương trình** $-div(A\nabla u)+Vu=0$ trong bài toán sau:

Bài toán: *Cho* $1<p\le 2$ *và* $V\in RH_\infty$, Ω là miền Lipschitz bị chặn *và cho* $g\in L^p(\partial\Omega)$*:*

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(A\nabla u)+Vu&=0, \text{ trong } \Omega\\ A\nabla u.\vec{v}&=g, \text{ trên } \partial\Omega\\ \left\|(\nabla u)^*\right\|_{L^p(\partial\Omega)}&<\infty \end{aligned}$$

trong đó:

- $A\nabla u.\vec{v}=g$ *trên* $\partial\Omega$ *theo nghĩa*

$$\lim_{X\to Q, X\in\Gamma(Q)} \nabla u(X)\cdot\vec{v}(Q)=g(Q)$$

hầu khắp nơi cho $Q\in\partial\Omega$.

- $\vec{v}(Q)$ *là vectơ pháp tuyến đơn vị hướng ra ngoài biên* $\partial\Omega$.
- A *là ma trận hằng số cấp* $n\times n$*, đối xứng và eliptic đều. Nghĩa là:*

$$a_{ij}=a_{ji};\exists\lambda\in(0,1] \text{ sao cho } \lambda|\xi|^2\le\sum_{i,j=0}^{n}a_{ij}\xi_i\xi_j\le\lambda^{-1}|\xi|^2$$

với mỗi $\xi\in\mathbb{R}^n$.

2. Một số kết quả cần thiết

Trong phần này, ta đề cập một số kết quả về các đánh giá liên quan đến thế năng V và hàm m.

Định lí 2.1. (Shen, 1995, Bổ đề 1.4): *Tồn tại* $C>0, c>0$ *và* $k_0>0$ *chỉ phụ thuộc vào* n *và hằng số* RH_∞ *sao cho với mọi* $X,Y\in\mathbb{R}^n$*, ta có:*

a) $m(V,X)\sim m(V,Y)$ *nếu* $|X-Y|\le\dfrac{1}{m(V,X)}$.

b) $m(V,Y)\le C\left(1+|X-Y|m(V,X)\right)^{k_0}m(V,X)$.

c) $m(V,Y)\ge\dfrac{Cm(V,X)}{\left\{1+|X-Y|m(V,X)\right\}^{k_0/(k_0+1)}}$.

trong đó

$$m(V,X)=\inf\left\{\frac{1}{r}>0:\frac{1}{r^{n-2}}\int_{B(X,r)}V(Y)dY\le 1\right\}.$$

Hệ quả 2.2. (Shen, 1995, Hệ quả 1.5): *Với mọi* $X,Y\in\mathbb{R}^n$*, ta có:*

$$\begin{aligned} C\left\{1+|X-Y|m(V,Y)\right\}^{\frac{1}{k_0+1}}&\le 1+|X-Y|m\left(V,X\right)\\ &\le C\left\{1+|X-Y|m\left(V,Y\right)\right\}^{k_0+1} \end{aligned}$$

Định lí 2.3. (Bất đẳng thức Fefferman-Phong) (Shen, 1994, Bổ đề 1.11):

Cho $u \in C_0^1\left(\mathbb{R}^n\right)$. *Khi đó:*

$$\int_\Omega |u(X)|^2 m(V,X)^2 dX \le C\int_\Omega |\nabla u|^2 dX + C\int_\Omega |u(X)|^2 V(X)dX.$$

Định lí 2.4. (Bất đẳng thức Caccioppoli) (Kurata & Sugano, 2000, Bổ đề 2.3)**:** *Cho* $u \in H_{loc}^1\left(B\left(X_0,2R\right)\right)\left(W_{loc}^{1,2} := H_{loc}^1\left(B\left(X_0,2R\right)\right)\right)$ *là nghiệm của* $-\mathrm{div}(A\nabla u) + Vu = 0$ *trên* $B\left(X_0,2R\right)$. *Với mọi* $\tau \in (0,1)$, *tồn tại hằng số* $C > 0$ *chỉ phụ thuộc vào* n *và* λ *sao cho:*

$$\int_{B(X_0,\tau R)} \left(|\nabla u|^2 + V|u|^2\right) dX \le \frac{C}{(1-\tau)^2 R^2}\int_{B(X_0,R)} |u|^2 dX.$$

Định lí 2.5. (Bất đẳng thức Friedrichs) (Kurata, & Sugano, 2000, Định lí 6.1)**:** *Cho* Ω *là miền Lipschitz bị chặn trong* $\mathbb{R}^n$ *với* $n \le 2$. *Cho* $E \subset \partial\Omega$ *thỏa* $\sigma(E) > 0$. *Khi đó, tồn tai hằng số* $C = C(n,\Omega,E) > 0$ *sao cho:*

$$\int_\Omega |u|^2 dX \le C\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dX + \int_E |u|^2 d\sigma\right)$$

với mọi $u \in W^{1,2}(\Omega)$.

Định lí 2.6. *Cho* u *là nghiệm của* $-\mathrm{div}(A\nabla u) + Vu = 0$ *trong* $Z\left(X_0,2R\right) \cap \Omega$ *với mọi* $X_0 \in \overline{\Omega}$ *và* $R > 0$. *Giả sử* $(\nabla u)^* \in L^2$ *và* $A\nabla u \cdot \vec{v} = 0$ *trên* $Z\left(X_0,2R\right) \cap \Omega$. *Khi đó, ta có đánh giá sau:*

$$\sup_{X \in D(X_0,R)} |u| \le C\left(\frac{1}{R^n}\int_{D\left(X_0,\frac{3R}{2}\right)} |u|^2 dX\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Chứng minh. Cố định $R > 0$. Không mất tính tổng quát, ta giả sử $X \in \partial\Omega$. Với mỗi $M > 0$ và $X \in D\left(X_0,2R\right) = B\left(X_0,2R\right) \cap \Omega$, ta định nghĩa:

$$v_M(X) = \begin{cases} u(X), & \text{khi } -M < u(X) < M \\ M\,\mathrm{sign}(u), & \text{còn lai.} \end{cases}$$

và

$$\nabla v_M(X) = \begin{cases} \nabla u(X), & \text{khi } -M < u(X) < M \\ 0, & \text{còn lai.} \end{cases}.$$

Lấy $\varphi \in C_c^\infty\left(B\left(X_0,\frac{3R}{2}\right)\right)$ và $D = D\left(X_0,\frac{3R}{2}\right)$. Theo công thức tích phân từng phần, ta có:

$$\begin{aligned}\int_D \left(A\nabla u\right)\cdot\nabla\left(v_M\varphi^2\right)dX &= \int_{\partial D}\left[\left(A\nabla u\right)\cdot\vec{v}\right]v_M.\varphi^2 d\sigma - \int_D v_M\varphi^2 \mathrm{div}\left(A,\nabla u\right)dX \\ &= -\int_D v_M\varphi^2\,\mathrm{div}(A\cdot\nabla u)dX \le 0.\end{aligned}$$

Suy ra,

$$\int_D \left[(A\nabla u)\cdot(\nabla v_M)\right]\varphi^2 dX + 2\int_D \left[(A\nabla u)\cdot(\nabla v_M)\right] v_M \varphi dX \le 0.$$

Tiếp theo, ta chéo hóa ma trận A. Do A đối xứng nên ta có thể viết:

$$A = P^T E P = P^T \sqrt{E}\sqrt{E} P$$

trong đó, E là ma trận đường chéo và P là ma trận trực giao. Ta có:

$$\int_D \left[(A\nabla u)\cdot(\nabla v_M)\right]\varphi^2 dX = \int_D \left[\left(\sqrt{E}P\nabla v_M\right)\cdot\left(\sqrt{E}P\nabla v_M\right)\right]\varphi^2 dX$$

$$= \int_D \left[\left(\sqrt{E}P\nabla v_M\right)\varphi\right]^2 dX.$$

Tương tự, ta cũng có:

$$\int_D \left[(A\nabla u)\cdot\nabla\varphi\right] v_M \varphi dX = \int_D \left[\left(\sqrt{E}P\nabla v_M\right)\cdot\left(\sqrt{E}P\nabla\varphi\right)\right]\varphi . v_M dX.$$

Do đó

$$\int_D \left[\left(\sqrt{E}P\nabla v_M\right)\varphi\right]^2 dX + 2\int_D \left[\left(\sqrt{E}P\nabla v_M\right)\cdot\left(\sqrt{E}P\nabla\varphi\right)\right]\varphi . v_M dX \le 0.$$

Suy ra,

$$\int_D \left[\sqrt{E}P\nabla\left(v_M\varphi\right)\right]^2 dX \le \int_D \left[(\sqrt{E}P\nabla\varphi)\cdot v_M\right]^2 dX.$$

Hơn nữa, theo tính chất eliptic đều, với mọi $\xi \in \mathbb{R}^n$, ta có:

$$\lambda|\xi|^2 \le \left[\sqrt{E}P\xi\right]^2 = \left(\sqrt{E}P\xi\right)\cdot\left(\sqrt{E}P\xi\right) = (A\xi)\cdot\xi \le \lambda^{-1}|\xi|^2.$$

Ta suy ra:

$$\lambda\int_D \left|\nabla\left(v_M\varphi\right)\right|^2 dX \le \int_D \left[\sqrt{E}P\nabla\left(v_M.\varphi\right)\right]^2 dX \le \int_D \left[\left(\sqrt{E}P\nabla\varphi\right)v_M\right]^2 dX \le \lambda^{-1}\int_D v_M^2 |\nabla\varphi|^2 dX.$$

Vậy

$$\int_D \left|\nabla\left(v_M\varphi\right)\right|^2 dX \le \lambda^{-2}\int_D v_M^2 |\nabla\varphi|^2 dX.$$

Mặt khác, với phép nhúng Sobolev số mũ $p = \dfrac{2n}{n-2}$, ta có:

$$\left(\int_D |v_M.\varphi|^p\right)^{\frac{2}{p}} \le C\left(\int_D |v_M\varphi|^2 dX + \int_D \left|\nabla\left(v_M\varphi\right)\right|^2 dX\right)$$

Theo **Định lí 2.5**, ta có:

$$\left(\int_D |v_M\varphi|^p\right)^{\frac{2}{p}} \le C\int_D \left(v_M |\nabla\varphi|\right)^2 dX$$

Ta chọn $\varphi \in C_c^\infty\left(B\left(X_0, s\right)\right)$ sao cho:

$$0 \le \varphi \le 1, \varphi = 1 \text{ trong } B\left(X_0, t\right) \text{ và } |\nabla\varphi| \le \frac{C}{s-t}.$$

trong đó $0 < t < s < \frac{3R}{2}.$

Do đó:

$$\left(\int_{D(X_0,t)} |v_M|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \frac{C}{s-t} \cdot \left(\int_{D(X_0,s)} v_M^2 \, dX\right)^{\frac{1}{p}}$$

Đặt:

$$\gamma := \frac{n}{n-2} > 1 \text{ và } \phi(q,t) := \left(\int_{D(X_0,t)} |v_M|^q \, dX\right)^{\frac{1}{q}} \tag{1.1}$$

Lặp (1.1) m lần $(m \in \mathbb{N})$ với:

$$t = R + \frac{R}{2^{m+1}}; s = R + \frac{R}{2^m}$$

Suy ra,

$$\phi\left(2\gamma^{m+1}, R + \frac{R}{2^{m+1}}\right) \le \left(\frac{C}{R}\right)^{\sum_{j=0}^{m} \frac{1}{\gamma^3}} (2\gamma)^{\sum_{j=0}^{m} \frac{j}{\gamma^3}} \phi\left(2, \frac{3R}{2}\right).$$

trong đó,

$$\sum_{j=0}^{m} \frac{1}{\gamma^3} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} = \frac{n}{2}.$$

Cho $m \to +\infty,$ ta được:

$$\sup_{X \in D(X_0,R)} |v_M| \le C\left(\frac{1}{R^n} \cdot \int_{D\left(X_0, \frac{3R}{2}\right)} |v_M|^2 \, dX\right)^{\frac{1}{2}}$$

Cho $M \to +\infty,$ ta được:

$$\sup_{X \in D(X_0,R)} |u| \le C\left(\frac{1}{R^n} \cdot \int_{D\left(X_0, \frac{3R}{2}\right)} |u|^2 \, dX\right)^{\frac{1}{2}}$$ □

3. Kết luận

Cuối cùng, chúng tôi xây dựng bất đẳng thức Harnack yếu cho toán tử $-div(A\nabla u) + Vu$ thông qua định lí sau đây.

Định lí 3.1. ***(Harnack yếu):*** *Cho $V \in RH_\infty, -div(A\nabla u) + Vu = 0$ trong $Z(X_0, 2R) \cap \Omega$ với mọi $X_0 \in \overline{\Omega}$ và $R > 0.$ Giả sử $(\nabla u)^* \in L^2$ và $\langle A\nabla u \cdot \vec{v} \rangle = 0$ hay $u = 0$ trên $Z(X_0, 2R) \cap \partial\Omega.$ Thì với mỗi số nguyên dương k sẽ tồn tại hằng số C_k sao cho:*

$$\sup_{X\in D(X_0,R)}|u|\le \frac{C_k}{\{1+Rm(V,X_0)\}^k}\cdot\left(\frac{1}{R^n}\cdot\int_{D(X_0,2R)}|u|^2\,dY\right)^{\frac{1}{2}}$$

Chứng minh. Ta có thể giả sử $X_0\in\partial\Omega$. Do $(\nabla u)^*\in L^2\left(Z\left(X_0,2R\right)\cap\partial\Omega\right)$ và $\left\langle A\nabla u\cdot\vec{v}\right\rangle=0$ trên $Z\left(X_0,2R\right)\cap\partial\Omega$. Theo **Định lí 2.6**, ta có:

$$\sup_{X\in D(X_0,R)}|u|\le C\left(\frac{1}{R^n}\cdot\int_{D\left(X_0,\frac{3R}{2}\right)}|u|^2\,dX\right)^{\frac{1}{2}}$$

Do $V\ge 0$ nên để hoàn tất chứng minh, ta có thể giả sử $R>\frac{1}{m(V,X_0)}$ theo **Định lí 2.4:**

$$\int_{D\left(X_0,\frac{3R}{2}\right)}|\nabla u|^2\,dX+\int_{D\left(X_0,\frac{3R}{2}\right)}|u|^2\cdot V dX\le\frac{C}{R^2}\int_{D(X_0,2R)}|u|^2\,dX$$

Cho $\eta\in C_C^\infty\left(B\left(X_0,\frac{3R}{2}\right)\right)$ sao cho $\eta\sim 1$ trên $B\left(X_0,R\right)$ và $|\nabla\eta|\le\frac{C}{R}$. Theo

Định lí 2.5., ta áp dụng cho hàm $u\eta\in C_C^1\left(D\left(X_0,\frac{3R}{2}\right)\right)$:

$$\int_{D(X_0,R)}m(V,X)^2\cdot|u|^2\,dX=\int_{D(X_0,R)}m(V,X)^2\cdot|u\eta|^2\,dX$$
$$\le C\int_{D(X_0,R)}|\nabla(u\eta)|^2\,dX+C\int_{D(X_0,R)}|u\eta|^2\cdot VdX$$
$$\le C\int_{D(X_0,R)}|\nabla u\cdot\eta+\nabla\eta\cdot u|^2\,dX+C\int_{D(X_0,R)}|u\eta|^2\cdot VdX$$
$$\le C\int_{D(X_0,R)}|\nabla u\eta|^2+|\nabla\eta u|^2\,dX+C\int_{D(X_0,R)}|u\eta|^2\cdot VdX$$
$$\le C\int_{D(X_0,R)}|\nabla u\eta|^2\,dX+C\int_{D(X_0,R)}|u\eta|^2\cdot VdX+\frac{C}{R^2}\int_{D(X_0,R)}|u|^2\,dX$$
$$\le\int_{D\left(X_0,\frac{3R}{2}\right)}|\nabla u|^2\,dX+C\int_{D\left(X_0,\frac{3R}{2}\right)}|u|^2\cdot VdX+\frac{C}{R^2}\int_{D(X_0,R)}|u|^2\,dX$$
$$\le\frac{C}{R^2}\int_{D(X_0,2R)}|u|^2\,dX$$

Theo **Định lí 2.1.** ta có:

$$m(V,X)\ge\frac{C\left[m(V,X_0)\right]^{\frac{1}{k_0+1}}}{R^{\frac{k_0}{k_0+1}}}$$

Với mọi $X \in D\left(X_0, R\right)$.

Thật vậy, ta có:

$$1+\left|X-X_0\right| m\left(V, X_0\right)<1+rm\left(V, X_0\right)<2rm\left(V, X_0\right) \text{ với mọi } X \in D\left(X_0, R\right).$$

Khi đó:

$$m(V, X) \geq \frac{Cm\left(V, X_0\right)}{\left(1+\left|X-X_0\right| m\left(V, X_0\right)\right)^{\frac{k_0}{k_0+1}}} \geq \frac{Cm\left(V, X_0\right)}{\left(2Rm\left(V, X_0\right)\right)^{\frac{k_0}{k_0+1}}} \geq \frac{Cm\left(V, X_0\right)^{\frac{1}{k_0+1}}}{(R)^{\frac{k_0}{k_0+1}}}$$

Ta có:

$$\int_{D\left(X_0, R\right)} m(V, X)^2 \cdot|u|^2 dX \leq \frac{C}{R^2} \cdot \int_{D\left(X_0, 2R\right)}|u|^2 dX$$

Suy ra,

$$\left(\frac{Cm\left(V, X_0\right)^{\frac{1}{k_0+1}}}{(R)^{\frac{k_0}{k_0+1}}}\right)^2 \cdot \int_{D\left(X_0, R\right)}|u|^2 dX \leq \int_{D\left(X_0, R\right)} m(V, X)^2 \cdot|u|^2 dX \leq \frac{C}{R^2} \cdot \int_{D\left(X_0, 2R\right)}|u|^2 dX.$$

Vậy

$$\int_{D\left(X_0, R\right)}|u|^2 dX \leq \frac{C}{\left[Rm\left(V, X_0\right)\right]^{\frac{2}{k_0+1}}} \cdot \int_{D\left(X_0, 2R\right)}|u|^2 dX.$$

Lập luận tương tự như trên, ta có:

$$\int_{D\left(X_0, \frac{3R}{2}\right)}|u|^2 dX \leq \frac{C_k}{\left[Rm\left(V, X_0\right)\right]^k} \cdot \int_{D\left(X_0, 2R\right)}|u|^2 dX, \forall k \in \mathbb{Z}, k>0.$$

Do đó:

$$\begin{aligned}
\sup_{X \in D\left(X_0, R\right)}|u(X)| &\leq C\left(\frac{1}{R^n} \cdot \int_{D\left(X_0, \frac{3R}{2}\right)}|u|^2 dY\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{C_k}{\left(Rm\left(V, X_0\right)\right)^{\frac{k}{2}}} \cdot\left(\frac{1}{R^n} \int_{D\left(X_0, 2R\right)}|u|^2 dY\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{C_k}{\left\{\frac{1}{2}\left(1+Rm\left(V, X_0\right)\right)\right\}^{\frac{1}{2}}} \cdot\left(\frac{1}{R^n} \int_{D\left(X_0, 2R\right)}|u|^2 dY\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{C_{k'}}{\left\{1+Rm\left(V, X_0\right)\right\}^{k'}}\left(\frac{1}{R^n} \int_{D\left(X_0, 2R\right)}|u|^2 dY\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

□

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Kurata, K., & Sugano, S., (2000). A Remark on Estimates for Uniformly Elliptic Operators on Weighted Lp Spaces and Morrey Spaces. *Mathematische Nachrichten*, *209*, 137-150. https://doi.org/10.1002/(SICI)1522-2616(200001)209:1%3C137::AID-MANA137%3E3.0.CO;2-3

Shen, Z., (1994). On the Neumann problem for Schrodinger operators in Lipschitz domains. *Indiana University Mathematics Journal*, *43*(1) 43, 143-174. https://www.jstor.org/stable/24898030

Shen, Z., (1995). L^p estimates for Schrödinger operators with certain potentials. *Annales de l'Institut Fourier*, *45*(1995), 513-546. http://doi.org/10.5802/aif.1463

WEAK HARNACK INEQUALITY FOR SCHRODINGER OPERATOR

Nguyen Duc Trung**, Nguyen Trong Nhan,

Truong Le Gia Khanh, Nguyen Ngoc Huu An, Nguyen Thuy Tien

Ho Chi Minh City University of Education, Vietnam

**Corresponding author: Nguyen Duc Trung – Email: nguyenductrung2282002@gmail.com*

Received: December 22, 2023; Revised: February 01, 2024; Accepted: February 20, 2024

ABSTRACT

In regularity theory, weak Harnack inequality play an important role. Weak Harnack inequality is necessary to prove Holder continuty of weak solution. In this paper, we prove weak Harnack inequality for Schrodinger operator $-div(A\nabla u)+Vu$ *which is crucial and has many applications in quantum mechanical physics, where A is a constant matrix and V is potental belong to Reverse Holder. To obtain that, we need estimate for fundamental solution, Fefferman-Phong's inequality, Caccioppoli inequality and Friedrichs inequality. In paper of Shen Z. (1995), he established weak Harnack inequality for operator* $-\Delta+V$. *The outcomes in our paper represent a generalization of the results presented in the paper of Shen Z. (1995).*

Keywords: Neumann boundary; Schrodinger operator; Weak Harnack inequality